UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán
Secretaría General
Departamento de Matemáticas

Memorias del Congreso Internacional

sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

A través de los programas de apoyo a proyectos
PAPIME PE101623 y PE108322

ISSN 2448 - 7945

Año 8 - Número 5 - Mayo 2024

Comité editorial

Dr. Jorge Altamira Ibarra
Dr. José Luz Hernández Castillo
L. S. C. Liana Lopez Pacheco

8 y 9 de mayo 2024

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán
ISSN 2448 – 7945

Memorias del Congreso Internacional

sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

Memorias del Congreso Internacional Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas, Año 8, No. 5, agosto 2023 – agosto 2024, es una publicación anual editada por la Universida Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, Ciudad de México, C.P. 04510, a través de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, Carretera Cuautitlán – Teoloyucán km. 2.5, Col. San Sebastián Xhala, Cuautitlán Izcalli, Estado de México, C.P. 54714, Tel. (55)56231890 y (55)56231886, http://congresomatematicas.cuautitlan2.unam.mx. Editor responsable Dr. Jorge Altamira Ibarra, altamira@unam.mx. Reserva de Derecho al uso Exclusivo No. 04-2016-080508273200-203. Otorgado por el Instituto Nacional del derecho de Autor, ISSN 2448-7945, ambos otorgados por el Instituto Nacional de derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, Carretera Cuautitlán – Teoloyucán km. 2.5, Col. San Sebastián Xhala, Cuautitlán Izcalli Estado de México, C.P. 54714, fecha de la última modificación, mayo 2024. Se autoriza la reproducción total o parcial de los textos aquí publicados siempre y cuando se cite la fuente completa y la dirección electrónica de la publicación.

ISSN 2448 – 7945

Agradecimientos

A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, por brindar la oportunidad de desarrollar el pensamiento crítico, analítico, creativo e innovador.

A LA FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLÁN, por todas las facilidades prestadas al buen desempeño del Congreso Internacional sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas.

AL DIRECTOR, Dr. David Quintanar Guerrero, Director de la FES-Cuautitlán, Dr. Benjamín Velasco Bajarano, Secretario General de la FES-Cuautitlán y a la Lic. Claudia Vanessa Joachin Bolaños Coordinadora de Comunicación y Extensión Universitaria, por brindarnos su apoyo para la realización de este congreso.

AL COMITÉ ORGANIZADOR, por sus valiosas sugerencias y por su esfuerzo conjunto para el éxito del evento.

A todos aquellos profesionales que enviaron y presentaron sus trabajos académicos y científicos, y al grupo de alumnos y profesores que participaron en la realización de este Congreso.

COMITÉ ORGANIZADOR

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán
ISSN 2448 – 7945

Comité arbitral

Comité evaluador científico nacional:

Dr. Aguilar Márquez Armando
Dr. Altamira Ibarra Jorge
Dra. Canabal Cáceres Silvia Guadalupe
FM. Castillo Padilla Juana
Dr. Contreras Espinosa José Juan
M. en C. Flores Pérez Judith Mayte
Dr. García León Omar
M en I. García Ruiz Juan José
Dr. Guzmán Tinajero Pedro
Dr. Hernández Castillo José Luz
Dr. Hernández Gómez Víctor Hugo
M en SI. Lara Martínez Maricela
Dra. León Rodríguez Frida María
LSC. López Pacheco Liana
Dr. López Salazar Leonel Gualberto
M en CE. Márquez Ortega Domingo
Dr. Mata Vargas Iván Noé
Dra. Mora Reyes Laura
Dr. Oropeza Legorreta Carlos
Dr. Osorio Galicia Ramón
M en I. Pineda Becerril Miguel de Nazareth
Ing. Rico Castro José Juan
Dra. Rigaud Téllez Nelly
Dr. Roldan Vázquez Valentín
M. en GTI. Rosas Fonseca Rosalba Nancy
Dr. Sánchez Barrera Julio Moisés
M en C. Sánchez Guerra José Isaac
Dr. Sánchez Nava Hugo
Dra. Urrutia Vargas Celina Elena
M en C. Vázquez Salazar María Guadalupe
M en I. Vázquez Suarez Vicente

Comité evaluador científico internacional:

Dra. Crespo Crespo Cecilia (Argentina)
Dr. Gaitán Lozano Ricardo (Colombia)
Dra. Mota Villegas Dorenis Josefina (Venezuela)
Mtro. Valle Pereira Ricardo Enrique (Venezuela)

ISSN 2448 – 7945

Índice

1. El impacto del modelo Addie en la enseñanza de las matemáticas
2. La aplicación de la inteligencia artificial (ia) para potenciar el aprendizaje de las matemáticas
3. Aplicación de series de tiempo en la realización de pronósticos utilizando rstudio
4. Relación de las tareas de enseñanza con las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas
5. Elaboración de un libro digital del tema de distribuciones de probabilidad
6. La resolución de problemas y el pensamiento computacional de los profesores de matemáticas
7. Diseño de un recurso digital para enseñar cálculo
8. Aprendizaje invertido para cálculo diferencial: una experiencia didáctica
9. Rally matemático, una actividad lúdica y complementaria al currículo en el CCH Vallejo
10. La importancia de la simulación y modelación matemática en la enseñanza de la física experimental
11. Impacto de la evaluación formativa en estudiantes
12. Reflexión y contingencia: dinamizando el conocimiento en la enseñanza de la función cuadrática
13. Diseño instruccional: trascendencia en la elaboración de contenidos educativos digitales en las matemáticas
14. Ecuaciones diferenciales de maxwell en el desarrollo de prototipos de ingeniería
15. Importancia de los números complejos en electromagnetismo
16. Omisiones y errores de estudiantes de bachillerato cuando construyen histogramas
17. Chatbot conversacional para evaluación formativa en la asignatura de análisis numérico
18. Aprendizaje basado en problemas: enfoque en el análisis estadístico en psicología
19. Dificultades de comprensión de la suma de fracciones en alumnos de bachillerato
20. Procesos cognitivos promovidos en libros de texto de segundo grado de secundaria: funciones lineales
21. La alfabetización matemática de los futuros docentes, una propuesta para implementar P.E. 2022

ISSN 2448 – 7945

22. Modelos matemáticos en el desarrollo de aplicaciones para personas con discapacidad auditiva
23. Estrategias que implementan profesores de matemáticas al resolver tareas con múltiples soluciones utilizando geogebra
24. Matemáticas en el contexto de problemas de balance
25. Sistemas conceptuales generados por estudiantes de nuevo ingreso a matemáticas aplicadas en tareas de modelación
26. Uso de tutores autónomos en probabilidad y estadística
27. Solución de problemas matriciales mediante un enfoque de optimización a través de ecuaciones diferenciales
28. Dificultades que presentan estudiantes de secundaria al resolver problemas de cálculo mental
29. Transferencia de conocimientos de álgebra lineal en un problema de redes cristalinas
30. Pensamiento crítico en una sinergia de inteligencia artificial y álgebra lineal en ingeniería
31. Modelación dinámica en ecología, software y aplicaciones
32. Aplicación de anova en el ensayo de dureza para la caracterización de materiales compuestos
33. Algoritmo genético aplicado a la movilidad humana
34. Introducción sobre diferentes enfoques de redes neuronales artificiales
35. La raíz cuadrada y su utilidad “final”
36. Transformaciones semióticas en la enseñanza de la función lineal en secundaria
37. Primer ciclo del círculo de lectura “descifrando las matemáticas a través de la lectura”
38. Red neuronal convolucional para el reconocimiento de personas
39. Métodos matemáticos aplicados a la ingeniería de software
40. Resolución de problemas en la enseñanza de matemáticas con estudiantes de tercer grado de secundaria
41. Análisis de parámetros matemáticos en emg: influencia en la diferenciación de movimientos en miembro superior
42. Un estudio del concepto de variación en la resolución de problemas de tipo geométrico
43. La retro alimentación docente en la UPIICSA del IPN
44. El uso de la modelación matemática en el aula para el estudio de funciones polinomiales
45. Análisis de fracciones mediantas en el proceso de coincidencia de pulsos

ISSN 2448 – 7945

46. Estrategias didácticas contextualizadas: una respuesta educativa para la nueva normalidad
47. Mejorando el aprendizaje en ingeniería: exploración y aplicación con estrategias didácticas basadas en algoritmos
48. Una experiencia didáctica de la interpretación geométrica de la integral definida
49. Uso de las matemáticas en el diseño y desarrollo de las aplicaciones web
50. El proctoring una tecnología que utiliza inteligencia artificial
51. Protocolo de enrutamiento interior OSPF con el algoritmo de Dijkstra
52. Minimización de funciones de varias viables en el método de regresión lineal usando maple
53. Libretas jupyter para la enseñanza de solución de ecuaciones por el método del punto fijo
54. El conocimiento numérico y su incidencia en la alfabetización financiera: estudio empírico en estudiantes universitarios
55. Los fractales de sierpinski. una aplicación del cálculo geométrico
56. Uso del enfoque steam para modelar con gráficas de laboratorio virtual: labu4
57. Propuesta de una secuencia didáctica para la enseñanza del interés compuesto en el nivel bachillerato
58. Calcular áreas analíticamente por el método del producto vectorial y programación java
59. Correlación lineal para obtener parámetros termodinámicos de la adsorción de estroncio por electrocoagulación
60. Optimización de un tanque abierto como un problema geométrico de aplicación de la derivada
61. Incidencia de una metodología inductiva en matemáticas en el sistema de Bachillerato abierto
62. Material didáctico de apoyo personalizado para el desarrollo de hablilidades en integración de funciones reales
63. Estudio de los fundamentos y deducción física-matemática de la definición del centro de gravedad de un cuerpo con masa en ingeniería mecánica
64. Matemáticas, más interesantes de lo que crees: su aplicación a un problema clásico de electromagnetismo
65. Factores que influyen en el desempeño del aprendizaje de matemáticas discretas en ciencias computacionales

MEMORIAS DEL Congreso Internacional sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

EL IMPACTO DEL MODELO ADDIE EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Monroy Carreño Patricia [1, *], Monroy Carreño Mireya[2] y Monroy Carreño Roberto[3]
[1,2 y 3] *Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Vallejo, UNAM. Av. 100 Metros - Frente a Metro Central Camionera, Av. Fortuna Esq., Magdalena de las Salinas, Gustavo A. Madero, 07760 Ciudad de México, CDMX*

EN-POSM003

Resumen

Las matemáticas tienen varios desafíos para que los jóvenes aprendan de manera significativa, sin mencionar que la situación se complicó debido a la pandemia de Covid-19. Por esto, los docentes han tenido que adaptar y buscar estrategias para que los estudiantes alcancen los conocimientos propuestos en los Programas de Estudio, por ende, esta investigación tuvo el objetivo de diseñar materiales audiovisuales basados en el modelo ADDIE que combinan aspectos disciplinarios, pedagógicos y tecnológicos para promover el desarrollo de habilidades matemáticas. Para esto, se trabajó con una muestra por conveniencia no probabilística de 26 estudiantes que cursaban el segundo semestre en la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, plantel Vallejo, logrando así que los jóvenes mejoraran significativamente en habilidades de dominio de procedimientos básicos, comprensión de lenguaje, razonamiento matemático y manejo de las herramientas tecnológicas, dado que es un arquetipo que conjuga lo práctico, lo teórico y lo tecnológico a partir de un enfoque pedagógico, siendo así una alternativa viable para reforzar y consolidar conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales que impacten positivamente en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, es imperativo que los docentes continúen explorando y perfeccionando estrategias que se ajusten a los desafíos de un contexto cambiante.

Palabras clave: M*odelo, enseñanza, matemáticas, tecnología, didáctica.*

1. Introducción

El modelo de educación presencial ha estado en el centro de los debates educativos, generando tensiones debido a la escasa incorporación de tecnologías de comunicación e información, tanto en la forma de estructurar el funcionamiento en el aula, como en la organización del sistema educativo y la gobernanza de las instituciones y la forma en la cual se organiza la enseñanza (Rama, 2021). Esto fue un aspecto crucial en la pandemia, puesto trajo consigo la obligatoriedad de generar un cambio abrupto en la adecuación del proceso de enseñanza-aprendizaje, requiriendo un ajuste que garantizará la continuidad de actividades formativas por medio de la educación a distancia. Demandando con ello una transformación de la docencia, donde esté fuera capaz de adaptarse al uso de tecnologías digitales y recursos que se utilizan en la educación no presencia y semipresencial (Espinosa, 2020). Los enfoques

[1*] *Autor para la correspondencia. E-mail: patricia.monroy@cch.unam.mx*

ISSN 2448 – 7945

sobre cómo afrontar esta nueva perspectiva varían significativamente de acuerdo con los contextos y la capacidad de las comunidades estudiantiles de adaptarse a un modelo educativo de emergencia que podrá ser incorporado por el docente en su estrategia didáctica postpandemia en pro a concientizar la importancia de estas herramientas como una alternativa para la formación de los saberes esperados desde un enfoque más flexible y metodologías activas (Caballero, 2021).

Ante este escenario no quedó duda que la educación a distancia debía tomar un rol protagónico en pandemia, demostrado sus bondades en cuanto a cobertura, conveniencia, vigencia y calidad. (García, Román, Aparicio y Olivos, 2021). Con ello, como objetivo toma relevancia la implementación de un modelo híbrido en etapa post contingencia, ya que esto propone no perder las habilidades y experiencia adquiridas ante esta adversidad, concibiendo que los docentes adquieran un rol secundario de orientador, y que los estudiantes adquieren un rol primario como agente activo, al estudiar y realizar las actividades fuera de las clases presenciales, para que, posteriormente sea en el aula donde interactúen entre sus pares y el docente (Mayanaza, Palomino, y Arpi, 2023).

En el mismo sentido, Arias, Brechner, Pérez y Vásquez (2020) destacan que la aceptación de un modelo de educación hibrida permite capturar la atención y el interés de los estudiantes por aprender y asegurar interacciones significativas e integradas del alumno con el contenido, con sus compañeros y con los docentes. Requiriendo con ello satisfacer tres elementos claves para avanzar en esta modalidad, enfocar la educación a un aprendizaje activo, a fin de aplicar el conocimiento a situaciones de la vida real; que el docente tome un papel que brinde orientación y apoyo para moderar, dar dirección y retroalimentar los proyectos de los estudiantes y; concebir a la educación como un proceso continuo que sigue a los alumnos y al docente en todas sus actividades diarias. Esto último haciendo referencia a la búsqueda y aprovechamiento de un enfoque transdisciplinario que correlacione los diferentes tipos de conocimiento; epistemológico y ontológico (Acuña, 2021).

Por ende, la propuesta didáctica desde esta visión debe adoptar un modelo apropiado para esta tarea, uno de ellos es el modelo ADDIE (Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación y Evaluación) el cual es adecuado cuando se pretende integrar e implantar algún elemento tecnológico en el proceso de enseñanza-aprendizaje, debido a que permite definir el público antes y después de su integración en el entorno de aprendizaje, sirviendo de guía en el diseño y desarrollo de herramientas para la educación empleando las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación). Que dentro de una de sus principales ventajas es su adaptabilidad a técnicas y estrategias que se fundamenten en el constructivismo, por medio de un proceso orientado no solo a los contenidos y objetivos de aprendizaje, sino también a la adquisición y construcción del conocimiento (Castellanos, y Rocha 2020; Fuentes, Díaz, Hernández, Jiménez y Urbina, 2019).

Ante ello, Grisales (2018) menciona que una de las ventajas de estas propuestas didácticas es la creación de comunidades de aprendizaje que se unen para compartir recursos y experiencias en el aula de clases, tales como las redes sociales y páginas multimedia, que admiten trascender barreas geográficas e idiomáticas. A lo cual, Matute, Herrera, Álvarez y Álvarez, (2020) complementan que en la actualidad existen

ISSN 2448 – 7945

un sin número de plataformas y aplicaciones educativas para el abordaje de las matemáticas, que su integración consiente que el estudiante no esté preocupado en repetir ejercicios de manera abstracta y mecánica, sino, por el contrario, al incorporar estas alternativas, su actuar se centra en analizar y comprender de manera detallada como se desarrollan los procesos matemáticos.

2. Metodología

En esta propuesta didáctica se utilizó el modelo ADDIE, en consideración a una educación híbrida dirigida al desarrollo de un pensamiento crítico y un enfoque constructivista. Todo esto en consideración al programa de estudios de la asignatura de matemáticas II de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, integrando los niveles cognitivos sugeridos para el estudio de las diferentes temáticas, en conjunto con la incorporación de herramientas tecnológicas en pro de ser una alternativa viable para reforzar y consolidar conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales que impacten positivamente en el proceso de aprendizaje de las matemáticas en los jóvenes.

Para esto, se trabajó con una muestra por conveniencia no probabilística de 26 estudiantes que cursaban el segundo semestre en la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, plantel Vallejo, aplicando las fases de la metodología ADDIE que a continuación se describen:

- Fase 1. Análisis: En esta etapa se aplicó una evaluación diagnóstica a la población en estudio, diseñada en un formulario Forms de Teams con el fin de obtener información necesaria de los conocimientos previos y herramientas tecnológicas de apoyo para el estudio de la asignatura de matemáticas.
- Fase 2. Diseño: Al tener un análisis de los resultados anteriores, se evaluó los intereses, preocupaciones y aspectos más relevantes que hicieron alusión los estudiantes sobre las carencias y fortalezas presentes al estudiar la asignatura, para poder elegir las herramientas tecnológicas que se adecuan al objetivo de consolidar estas debilidades mostradas por medio de la creación de materiales audiovisuales.
- Fase 3. Desarrollo: Teniendo en cuenta los factores a tomar en consideración se procedió a la creación de guiones, recursos visuales, audios, elementos para corroborar el alcance de los saberes esperados, entre otros materiales. Así como la adecuación de los espacios virtuales que servirían para llevar el proceso de enseñanza desde una perspectiva híbrida.
- Fase 4. Implementación: En esta fase se capacitó a los participantes en el uso del aula virtual y cuál era el objetivo de los elementos presentes y su forma de evaluación tanto cualitativa como cuantitativa. Posteriormente, se procedió a calificar y retroalimentar las actividades propuestas.
- Fase 5. Evaluación: Se contrapusieron los resultados obtenidos por parte de los estudiantes con los objetivos y aprendizajes esperados por parte del docente. Para subsecuentemente optimizar los materiales en consecuencia de los aspectos débiles observados al evaluar a los participantes.

ISSN 2448 – 7945

2.1 Desarrollo

En la tabla 1 se engloba de manera resumida los elementos considerados para la creación de los repositorios de materiales, que fungieron como un espacio para la implementación de las actividades, su retroalimentación y evaluación. Para ello se emplearon materiales como tabletas digitales, micrófonos con cancelación de ruido y programas como Microsoft Teams, Photoshop, Vegas Pro, Microsoft, Canva, entre otras herramientas para la creación de vídeos, infografías, cuestionarios; así como la incorporación de elementos para abordar las temáticas de matemáticas II propuestas en el CCH desde un enfoque tecnológico, como softwares para la creación de mapas mentales, conceptuales y, graficadores de funciones que explican el proceso de resolución tanto gráfica como cuantitativa; tales como GeoGebra y Wolfram Alpha.

Tabla 1. Aplicación del Método ADDIE en la enseñanza de matemáticas.

Fases	Actividades
Análisis	• Creación de actividades diagnósticas, tales como cuestionarios previos, lluvia de ideas, cuadro CQA. • Interpretar la información para contar con el conocimiento de las necesidades presentes en los estudiantes sobre el uso tecnológico y estudio de la asignatura.
Diseño	• Focalizar los factores observados entre los saberes previos del estudiante, cuáles son sus conocimientos sobre plataformas digitales y herramientas matemáticas para la resolución de problemas de ecuaciones de segundo grado. • Integrar los elementos anteriores con las temáticas del programa de estudios de la asignatura, su nivel cognitivo propuesto, la sugerencia de estudio y el contexto presente en la población en estudio. • Se establece las estrategias didácticas, guiones y bocetos de los materiales, así como la valuación de los repositorios en pro de la experiencia de su uso por parte de los estudiantes.
Desarrollo	• Se crean y optimizan los materiales antes diseñados. • Se desarrolla el ambiente y entorno de aprendizaje. • Se incorporan, las practicas, ejercicios, simulaciones y por menores de los contenidos. • Se incorporan los elementos multimedia creados. • Se establece la forma de trabajo y evaluación.
Implementación	• Se activa la plataforma para el estudiante. • Se capacita a la población para que sepa el objetivo y funcionamiento del aula virtual y como se incorporará en su proceso educativo.

ISSN 2448 – 7945

	• Se pone en práctica lo creado en las fases anteriores de manera formativa y participativa por parte del alumno. • Se funge como guía para que las actividades se lleven a cabo en pro a los aprendizajes esperados. • Se mantiene una retroalimentación constante de las tareas realizadas por el alumno. • Se optimiza cualquier problema que tenga el material o entorno digital propuesto.
Evaluación	• Se evalúa de manera formativa y sumativa las actividades llevadas a cabo por los estudiantes. • Se completa y se analiza el cuadro CQA. • Se realiza una evaluación de aceptación de la población participante por medio de una escala Likert. • Se contrapone los objetivos, metas y aprendizajes esperados, con los resultados obtenidos por parte de las actividades y actitudes de los estudiantes. • Se retroalimenta, reformula o se modifican los entornos virtuales, materiales y tareas propuestas en consideración de los resultados de la evaluación anterior.

Congreso Internacional sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

3. Resultados y análisis

En la tabla 2 se engloban los resultados de los análisis e interpretación de los datos recolectados de la aceptación de la población estudiantil del uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas por medio de una escala Likert

Tabla 2. Satisfacción del uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas.

Opciones	**Frecuencia**	**Porcentaje (%)**
Totalmente en desacuerdo	0	0
En desacuerdo	2	7.69%
Indeciso	4	15.38%
De acuerdo	6	23.08%
Totalmente de acuerdo	14	53.85%
Total	26	100%

La aceptación de la incorporación de este enfoque alternativo en el estudio de las matemáticas fue alto, puesto los alumnos hicieron alusión en sus trabajos y evaluaciones que les era más fácil poder visualizar los conceptos, teoría y procedimientos al poder ligarlos con sus temas de interés o con situaciones que están en su contexto, lo cual les resulta interesante. Además, de que al disponer de materiales fuera del salón de clase pueden estudiar y repasar una y otra vez las temáticas, lo cual funge como un motivante por seguir aprendiendo más de la temática

ISSN 2448 – 7945

por su cuenta, y posteriormente aclarar las dudas que le quedan en el salón de clases con sus compañeros y docente. Lo cual vuelve más dinámica la didáctica en el salón de clases y que admite poder profundizar más y mejor el nivel de los aprendizajes esperados.

Por otra parte, los estudiantes que mostraron indecisión o están en desacuerdo, su principal crítica es que requieren de un equipo tecnológico y/o servicio de internet que en ocasiones por sus situaciones personales no puede disponer. Aunado a ello, mencionan que debido a su carga de actividades por parte de las materias que cursan, el incorporar aplicaciones digitales requieren mayor parte de su tiempo, por lo que prefieren un curso tradicional de enseñanza.

4. Conclusiones

La implementación del modelo ADDIE en la enseñanza de las matemáticas mostró tener un impacto positivo en la actitud con la que los estudiantes afrontan el estudio de la asignatura. Principalmente, ya que sienten motivación al aplicar elementos de su actuar diario en su proceso educativo, lo cual a su vez disminuye esa esencia pragmática y compleja con la que los alumnos relacionan la materia; puesto al poder ligarlo con su contexto diario y saberes previos les permite comprender cuál es la aplicación real de lo que están aprendiendo.

Aunado a lo anterior, la estructura de este modelo admite que se mantenga la esencia del CCH, al poder enfocar las estrategias desde un enfoque constructivista que ligue los conocimientos teóricos y prácticos, así como los aprendizajes esperados y aprovechar la incorporación de la tecnología de aprendizaje para personalizar las actividades en relación con las necesidades de los estudiantes. Lo cual quedo reflejado en la profundidad con la que los jóvenes podían fundamentar sus respuestas y tenían una actitud afable para el debate y más proactiva en su proceso educativo.

Por otro lado, como los resultados mostraron, esta metodología tiene dos principales desventajas, la primera de ellas es que requiere bastante tiempo para su implementación, puesto el docente requiere analizar, diseñar y crear materiales en relación con las necesidades de cada grupo de estudiantes y que a su vez se liguen satisfactoriamente con los saberes esperados, aspecto que es semejante para los alumnos, puesto requieren ser capacitados y adecuarse a las herramientas digitales propuestas. Su segunda desventaja, es que requiere que todos los involucrados tomen una participación activa en este proceso, por lo que puede ser una barrera al inicio para los estudiantes al no estar acostumbrados a aprender por su cuenta, por lo que se es necesario eliminar en primera instancia este limitante por medio de actividades que los motiven y que sean atractivo para ellos.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado con el apoyo de la Iniciativa UNAM-DGAPA-INFOCAB-PB100424

ISSN 2448 – 7945

5. Índice de referencias

- Acuña, M. (2021). La educación híbrida: un modelo transformador de la educación tradicional a la virtualidad. Una mirada a la transformación de las nuevas generaciones desde la óptica de los actores del proceso formativo en la educación virtual, 26-33. DOI: 10.46642/educacion.v3i1.139
- Arias Ortiz, E., Brechner, M., Pérez Alfaro, M., y Vásquez, M. (2020). De la educación a distancia a la híbrida: 4 elementos clave para hacerla realidad. URL: https://publications.iadb.org/publications/spanish/document/De-la-educaci%C3%B3n-a-distancia-a-la-h%C3%ADbrida-4-elementos-clave-para-hacerla-realidad.pdf
- Caballero, V. C. (2021). Desafíos de la Educación a Distancia en tiempos de pandemia. Revista Paraguaya de Educación a Distancia (REPED), 2(1), 3-5. URL: https://revistas.una.py/index.php/reped/article/view/1528
- Castellanos, H., y Rocha, E. H. (2020). Aplicación de ADDIE en el proceso de construcción de una herramienta educativa distribuida b-learning. Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología, (26), 10-19. DOI: 10.24215/18509959.26e02
- Espinosa, A. B. (2020). Desafíos de la educación superior en tiempos de pandemia: la contingencia inesperada. La humanidad a prueba, 25. URL: https://www.redalyc.org/pdf/552/55265221002.pdf
- Fuentes, L. M. E., Díaz, G. G., Hernández, M. D. J. B., Jiménez, P. D. C. M., y Urbina, V. S. (2019). Curso en línea basado en modalidad instruccional ADDIE y Prototipización rápida. Revista de Investigación Educativa del Tecnológico de Monterrey, 9(18), 2-10. DOI: 10.21500/19002386.4274
- García, C. E. C., Román, R. R., Aparicio, L. A. S., y Olivos, M. A. A. (2021). De la educación a distancia en pandemia a la modalidad hibrida en pospandemia. Revista Venezolana de Gerencia: RVG, 26(96), 1154-1171. DOI: 10.37960/revista v26i96.36228
- Grisales, A. M. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. Entramado, 14(2), 198-214. DOI: 10.18041/entramado.2018v14n2.28297
- Matute, J. F. A., Herrera, D. G. G., Álvarez, C. A. E., y Álvarez, J. C. E. (2020). GeoGebra como estrategia de enseñanza de la Matemática. EPISTEME KOINONIA: Revista Electrónica de Ciencias de la Educación, Humanidades, Artes y Bellas Artes, 3(6), 211-230. DOI: 10.35381/ek.v3i6.1039
- Mayanaza, D. V. C., Palomino, R. G., y Arpi, F. N. C. (2023). Oportunidades y desafíos de la educación híbrida en el contexto pospandémico. Horizontes Revista de Investigación en Ciencias de la Educación, 7(28), 1028-1041. DOI: 10.24265/horizontes.2023.v7n28.17
- Rama, C. (2021). *La nueva educación híbrida*. UDUAL. DOI: 10.46642/educacion.v3i1.139

ISSN 2448 – 7945

LA APLICACIÓN DE LA INTELIGENCIA ARTIFICIAL (IA) PARA POTENCIAR EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

Monroy Carreño Patricia[1, *], Monroy Carreño Mireya[2] y Monroy Carreño Roberto[3]
[1,2 y 3] *Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Vallejo, UNAM. Av. 100 Metros - Frente a Metro Central Camionera, Av Fortuna Esq, Magdalena de las Salinas, Gustavo A. Madero, 07760 Ciudad de México, CDMX*

ID-POSM004

Resumen

La Inteligencia Artificial (IA) ofrece múltiples beneficios en varios campos, incluyendo la educación. Por ello, este trabajo destaca el impacto de la IA en la enseñanza de la asignatura de Matemáticas II, por lo que el objetivo fue diseñar actividades de aprendizaje respaldadas por la IA que fomenten la autorreflexión y la metacognición en los estudiantes a través de una evaluación continua y oportuna. Es importante señalar que se utilizó un enfoque alternativo y metodologías activas que integraron aspectos disciplinares, pedagógicos y tecnológicos que se aplicó a una muestra por conveniencia a 26 estudiantes de primer año del turno vespertino en la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, plantel Vallejo. Los resultados indican que la IA es un aliado valioso para personalizar el aprendizaje, adaptándolo a los estilos y tipos de aprendizaje individuales, ya que los jóvenes desarrollaron distintas habilidades matemáticas, que ayudaron en la resolución de problemas complejos y en una retroalimentación adaptativa, lo que promueve un aprendizaje sólido, significativo, motivador y centrado en el estudiante. En conclusión, esta propuesta aprovechó las ventajas y capacidades de la IA, no obstante, es crucial entender que no reemplaza la interacción humana y debe ser utilizada de manera informada y planificada.

Palabras clave: *enseñanza, matemáticas, inteligencia, artificial*

1. Introducción

La Inteligencia Artificial (IA) se ha posicionado como una tecnología revolucionaria en el ámbito educativo. La habilidad de las máquinas para procesar y analizar grandes cantidades de datos, identificar patrones y tomar decisiones fundamentadas en algoritmos avanzados, está redefiniendo nuestros métodos de enseñanza y aprendizaje en diferentes áreas (González, 2023, p.52). La integración IA en el ámbito educativo posee un enorme potencial para revolucionar tanto las experiencias de enseñanza como de aprendizaje, y para optimizar los resultados académicos de los estudiantes. Uno de los beneficios más destacados de la IA es su habilidad para personalizar las experiencias de aprendizaje de cada estudiante. A través de herramientas y plataformas potenciadas por IA, los educadores tienen la capacidad de

[1] * *Autor para la correspondencia. E-mail: patricia.monroy@cch.unam.mx*

ISSN 2448 – 7945

adaptar la instrucción y el contenido a las necesidades y preferencias individuales de cada estudiante (Melo, Coto y Acosta, 2023, p.252).

En contraste, la inteligencia artificial generativa es una rama de la inteligencia artificial que se centra en la creación de sistemas capaces de generar contenido nuevo, como imágenes, música, texto y otros tipos de datos. Esta esfera de la IA revolucionando verdaderamente todos los campos, dado que la IA no solo aprende, sino que también crea nuevas ideas y productos a partir de los patrones identificados en los datos de entrenamiento. Además, genera nuevos datos basados en estos patrones, una habilidad que antes solo atribuíamos a los seres humanos. Es precisamente este tipo de IA el que está transformando radicalmente nuestra comprensión e interacción con el mundo digital (Gonzáles, 2023, p.56).
Por ende, la inteligencia artificial es parte de cada uno de los aspectos más importantes y funcionales de la red (Internet), en consecuencia, en la educación no debemos mirar la aparición de la inteligencia artificial como un enemigo sino como una herramienta que brinda nuevas oportunidades en el diseño de nuevas estrategias para el aprendizaje, puesto que es generadora de nuevas preguntas para la investigación educativa que convienen aprovechar para nuestra práctica docente (Moreno, 2019, p. 262).

En el mismo sentido, Jara y Ochoa (2020), destacan que la inteligencia artificial contribuye a la educación mediante la personalización a través de sistemas de enseñanza adaptativos. Estos sistemas ofrecen rutas de aprendizaje personalizadas basadas en los perfiles, respuestas e interacciones de los estudiantes. Dichas aplicaciones tienen como objetivo ajustar el tipo, la dificultad, la secuencia y el ritmo de los materiales de aprendizaje, así como sus diálogos, preguntas y retroalimentación, a las necesidades individuales de cada estudiante (p.7).

La inteligencia artificial (IA) presenta oportunidades y desafíos para el campo de la educación. Por un lado, la IA puede optimizar los procesos educativos al ofrecer metodologías innovadoras basadas en el constructivismo, el aprendizaje basado en problemas, la inteligencia colectiva y la adaptabilidad. Estas metodologías pueden favorecer el desarrollo de habilidades, la personalización del aprendizaje, la resolución de problemas complejos y la colaboración entre los estudiantes, como señalan Johnson (2019) y Jara y Ochoa (2020). Por otro lado, la IA también implica riesgos y desafíos relacionados con la protección de la privacidad y la equidad educativa. La IA utiliza la información de los estudiantes y sus familias disponible en las escuelas, así como sus registros de imágenes, videos y audios que generan las aplicaciones para adaptar sus respuestas. Esto puede vulnerar el derecho a la intimidad y el control de los datos personales. Además, la IA requiere de una inversión económica y una capacitación docente que pueden no estar al alcance de todos los sectores sociales, lo que puede generar brechas educativas.
“Todo tipo de tareas de resolución de problemas, como probar teoremas y jugar ajedrez, implican tomar decisiones. Los algoritmos de búsqueda heurística son parte de una colección de métodos que se basan en representar el conocimiento implícito o

ISSN 2448 – 7945

procedimental que poseen los humanos de forma explícita, utilizando símbolos y reglas (legibles por humanos) en programas informáticos" (Abeliuk y Gutiérrez, 2021, p.15). Conocer la historia de las matemáticas no es una herramienta principal para aprender matemáticas mejor y más a fondo. Al usar la historia como una meta, el aprendizaje de los aspectos evolutivos de las matemáticas sirve en sí mismo para ilustrar otros aspectos históricos de la disciplina (Santágueda y Lorenzo, 2019, p.21)

2. Metodología

La presente propuesta se fundamentó en el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), aprovechando un enfoque alternativo, que permitiera la formación integral de conocimiento interdisciplinario aprovechando los saberes previos y contexto del estudiante, así como la integración de herramientas tecnológicas. Pasando por las siguientes etapas:

- Investigación: El alumno, al tomar un papel activo, se le guía para plantear una pregunta guía que le ayude a coadyuvar su interés con las temáticas en estudio y que será una guía para la planificación de sus saberes.
- Planificación: Se estructuran los elementos que se revisarán del programa de Matemáticas II del CCH y los estándares de trabajo solicitados.
- Búsqueda y procesamiento de la información: Se introduce la aplicación perpexity, como herramienta para la resolución de preguntas principales y las subsecuentes de estas.
- Elaboración del producto: Se mantiene una retroalimentación constante por medio de un repositorio digital, donde los estudiantes suben sus avances y se les orienta para que puedan resolver la pregunta propuesta, alcanzando los saberes deseados por el docente.
- Evaluación y difusión: Durante el proceso se utiliza la autoevaluación, la coevaluación y la heteroevaluación, con tal de mantener un proceso reflexivo donde los estudiantes desarrollen un pensamiento crítico, que favorezca a la autocrítica, el debate y la exposición de sus conclusiones desde bases conceptuales bien fundamentadas, para la cimentación de saberes de calidad.

2.1 Desarrollo

Se empleó la aplicación "Perplexity" con el objeto de integrar esta inteligencia artificial en el estudio de la Unidad 1: Ecuaciones cuadráticas y la Unidad 2: Funciones cuadráticas y aplicaciones, del programa de estudios de la asignatura de Matemáticas II del Colegio de Ciencias y Humanidades. Para ello, el estudiante diseñó en un archivo de PowerPoint un repositorio de información similar a un portafolio de evidencias, pero digital, que el estudiante diseña, retroalimenta, adapta y mejora empleando el uso de la IA.

De esta manera, partiendo de los niveles de cognitivos sugeridos por la taxonomía de Bloom, el material creado progresa de manera gradual, partiendo de lo simple a lo complejo, realizando preguntas a esta herramienta tecnológica mejor fundamentadas

ISSN 2448 – 7945

y más centradas en las necesidades presentes de cada estudiante. Para lo anterior en la Tabla 1. Se hace sugerencias de los elementos principales que se tomaron en consideración para la elaboración de este material.

Tabla 1. Diseño de actividad empleando IA

Propósito:	El alumno: • Resolverá ecuaciones cuadráticas mediante diversos métodos de solución. • Modelará problemas que conduzcan a este tipo de ecuaciones. • Establecerá la relación que existe entre el grado de la ecuación y el número de soluciones. • Analizará el comportamiento de las funciones cuadráticas en términos de sus parámetros mediante la contrastación de la representación gráfica y analítica. • Resolverá problemas de optimización con métodos algebraicos, a fin de continuar con el estudio de las funciones a partir de situaciones que varían en forma cuadrática y contrastará este tipo de variación con la lineal.
Población	Su implementación se llevó a cabo en una muestra por conveniencia a 26 estudiantes de primer año del turno vespertino en la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, plantel Vallejo.
Descripción de la actividad	Por medio del uso de la IA el estudiante es el formador de su propio conocimiento al, ir formando un repositorio de materiales que le admita, mejora su conocimiento al ir retroalimentando sus saberes a partir de preguntas generales que desencadenaran en cuestionamientos más específicos del tema de ecuaciones de segundo grado con relación al contexto presente del alumno.
Objetivos	Utilizar los conocimientos adquiridos, para la resolución de problemas.
Apartados sugeridos para la presentación	
Introducción	• Portada. • Explicar brevemente qué es una ecuación de segundo grado. • Mencionar la forma general de una ecuación cuadrática.
Desarrollo	• Aclarar el significado de los coeficientes. • Explicar el término "raíz" en el contexto de ecuaciones cuadráticas. • Introducir y definir el discriminante. • Tipos de soluciones. • Fórmula cuadrática. • Ceros de la función. • Ejemplos numéricos.

ISSN 2448 – 7945

	• Gráficos y sus propiedades.
Conclusión	• Aplicaciones prácticas. • Resumen y conclusiones. • Fuentes.

3. Resultados y análisis

La Figura 1 muestra un ejemplo de la utilización de la herramienta perplexity, para la búsqueda de un apartado sugerido en la creación del material. Aparte de que no es necesario contar con alguna cuenta para utilizar esta aplicación, una de las ventajas de emplear esta IA, en contraposición con sus semejantes de uso gratuito, es que dispone de un apartado que muestra las fuentes donde está obtuvo la información, así como sugerencias de materiales audiovisuales que puede revisar para fortalecer la comprensión del material.



Figura 1. Uso de la IA perplexity en la asignatura de matemáticas.

Lo que genera que las actividades creadas por los estudiantes estén supeditadas por el nivel de comprensión logrado por el mismo, y de la necesidad presente que tenga. Siendo elementos que modifican el resultado tanto de manera favorable como no, puesto dependerá de la forma de realiza la pregunta, el interés particular que tenga, las fuentes sugeridas por la IA, y la profundidad con la que se abarque cada apartado sugerido.

4. Conclusiones

El realizar una propuesta didáctica que incorpore el uso tecnológico, tiene el objeto de motivar al joven, por medio de la integración de herramientas actuales en su proceso de aprendizaje, lo cual a su vez admite que esté contextualice sus saberes ante

ISSN 2448 – 7945

situaciones con las que está en contacto día con día, o temas de interés. Teniendo con ello una gama de diferentes propuestas, que al finalizar el estudio de las temáticas estudiadas permitirá que al presentar su material en plenaria con sus compañeros se tenga una retroalimentación reflexiva de cómo puede seguir profundizando su saber, generando con ello alumnos más activos y que estén teniendo una formación integral en actitudes y habilidades necesarias para el debate y la exposición de sus ideas de forma bien fundamentada.

Esta actividad fortalece que el centro de su propio aprendizaje sea el alumno, requiriendo que el docente lo guie en cómo va formando estos saberes. Pues, si bien la inteligencia artificial es una herramienta óptima para apoyar en la adquisición de datos y las resoluciones de cuestionamientos, está limitada a responder en relación con su algoritmo de programación, lo cual se puede observar en las fuentes de información que dispone y que si el alumno no es bien orientado puede obtener respuestas que no sean fidedigna o que no corresponde a su nivel de estudio. Por lo cual no hay que considerarlo como un elemento que sustituirá la forma de enseñanza actual, sino como una herramienta más que dispone el docente para adaptar sus estrategias ante el contexto cambiante de la educación.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado con el apoyo de la Iniciativa UNAM-DGAPA-INFOCAB-PB100424

5. Índice de referencias

- Abeliuk, A., & Gutiérrez, C. (2021). Historia y evoluación de la inteligencia artificial. *Revista Bits de Ciencia*, (21), 14-21.
- González, C. S. (2023). El impacto de la inteligencia artificial en la educación: transformación de la forma de enseñar y de aprender. Revista Curriculum, 36, 51-60. https://doi.org/10.25145/j.qurricul.2023.36.03
- Jara, I., & Ochoa, J. M. (2020). Usos y efectos de la inteligencia artificial en educación. *Sector Social división educación. Documento para discusión número IDB-DP-00-776. BID. https://ie42003cgalbarracin.edu.pe/biblioteca/LIBR-NIV331012022134652.pdf*
- Johnson, M. (2019). Artificial intelligence in education: Promises and implications for teaching and learning. Center for Digital Education, 1-14.
- Melo, G.E., Coto, M.F. y Acosta, M.G. (2023). Educación y la Inteligencia Artificial (IA). Revista Científica. Dominio de las Ciencias 9(4), 242-255. https://dominiodelasciencias.com/ojs/index.php/es/article/view/3587/7865
- Moreno, R. D. (2019). La llegada de la inteligencia artificial a la educación. Revista de Investigación en Tecnologías de la Información: RITI, 7(14), 260-270. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7242777

ISSN 2448 – 7945

209 • Santágueda, M. y Lorenzo, G. (2019). Historia de las matemáticas para la
210 formación inicial de maestros. Matemáticas, Educación y Sociedad, 2(2), 19-32.

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

APLICACIÓN DE SERIES DE TIEMPO EN LA REALIZACIÓN DE PRONÓSTICOS UTILIZANDO RSTUDIO.

Lagunes Toledo Ana Maria[1*], Córdoba Lobo Víctor Manuel[2],
Machuca Mejia Eugenio Santiago[3]
[1]Unidad Profesional de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas (UPIICSA) del IPN [1] Av. Té 950, Col. Granjas México, C.P. 08400, Del. Iztacalco, Ciudad de México

IP-POSM007

Resumen

Durante el año 2023, el colegio de profesores de la academia de Estadística Aplicada, dirigió sus trabajos de investigación académica hacia la elaboración de una propuesta de aplicación de una serie de tiempo para la elaboración de pronósticos a corto plazo, utilizando metodología de suavizamiento exponencial simple con Rstudio, dirigida a los estudiantes que cursan la unidad de aprendizaje de Estadística Aplicada del programa académico de Ingeniería en Transporte, que se imparte en la UPIICSA del IPN.
El objetivo general es pronosticar para el 2023, el número de accidentes de tránsito terrestre en zonas urbanas y suburbanas en la alcaldía Iztacalco a partir de una muestra compuesta por los datos históricos proporcionados por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) desde 1997-2022.
Este artículo describe los pasos que los profesores realizaron para el diseño y desarrollo de la propuesta metodológica. Como primer punto se incluye una revisión teórica documental sobre Series de Tiempo, métodos cuantitativos para hacer pronósticos, así como las principales métricas para determinar su precisión. Para realizar el análisis estadístico y gráficos de la serie de tiempo, se propone trabajar los datos con Rstudio (entorno de desarrollo integrado) ya que es una herramienta que simplifica notablemente el manejo y la programación con el lenguaje R. Finalmente se presentan resultados, conclusiones y sugerencias para futuras líneas de investigación.
La motivación y el interés de los estudiantes aumenta, cuando identifican las grandes ventajas que ofrece el uso de lenguaje de programación R con respecto al cálculo manual de los pronósticos, principalmente en la reducción del tiempo de análisis, en el aumento en su precisión, la obtención de gráficos de manera inmediata y con excelente calidad, hasta obtener inclusive, salidas para elaborar informes técnicos de resultados de una manera impecable y muy profesional.

Palabras clave: *Pronósticos, Series de tiempo, transporte, programación, Rstudio*

1. Introducción

Una toma de decisión oportuna y confiable en las empresas relacionadas con el transporte es fundamental, si lo que se busca es su expansión, la continuación en su nicho de mercado y por supuesto su éxito. Uno de los aspectos más relevantes que es necesario considerar es el pronóstico de variables. En efecto, variables externas

[1*] *Autor para la correspondencia. E-mail:* alagunest@ipn.mx

ISSN 2448 – 7945

como clima de negocios y variables internas como aquellas que están relacionadas directamente con la operación de la empresa, se utilizan para planear su actividad en cualquiera de sus áreas por ejemplo logística, márquetin, finanzas, capital humano, etc. Debe existir una compresión adecuada de las características específicas del sector que se analiza. Por ejemplo, la demanda del transporte, los viajes son producto de la necesidad de llevar a cabo actividades en el destino (transporte de carga) y se requiere definir una red de transporte estratégica que pueda ser procesada fácilmente mediante programas computacionales. Como la demanda de transporte está localizada en el espacio puede producir problemas que desequilibren la oferta-demanda (ejemplo que en el centro de la ciudad haya exceso de taxis vacíos circulando, mientras que clientes potenciales estén esperando en otras áreas) (Ortuzar, J. 2012).

En la siguiente figura se analiza la estructura general del modelo de transporte urbano, donde es posible identificar la importancia de la predicción de variables en el sector.

Para ejemplo basta un botón, el transporte aéreo de carga es la modalidad con mayor

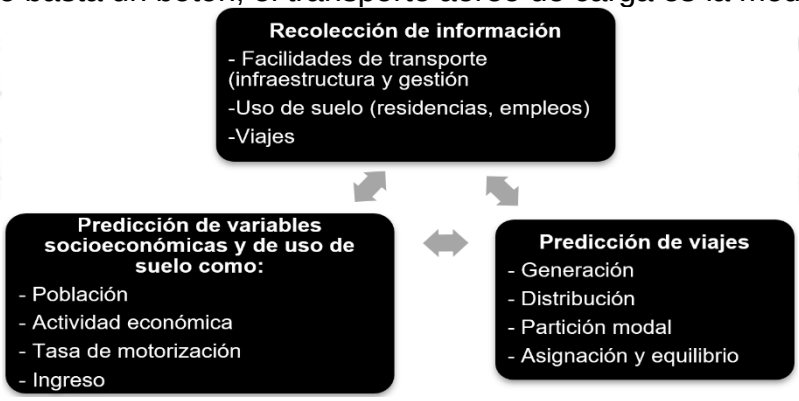


Figura 1. Estructura del modelo de transporte. Elaboración propia a partir de: Ortuzar, J (2012)

dinámica en el sector, se reporta un ritmo de crecimiento promedio anual de 8.9%. (1992-2002) es aquí donde la necesidad de contar con pronósticos confiables de la demanda esperada se convierte en prioridad para realizar una planificación muy cuidadosa de dicho crecimiento.

En un trabajo de investigación realizado por el Instituto Mexicano del Transporte (IMT) a cargo del Ing. Óscar Armando Rico Galeana, se evaluaron las técnicas de análisis de series de tiempo como una herramienta en la elaboración de pronósticos de la demanda de transporte de carga en aeropuertos mexicanos, aplica la técnica de descomposición factorial a las series de tiempo de carga transportada a través de los aeropuertos de México, Guadalajara y Monterrey. Al final el autor recomienda la utilización de la técnica propuesta para modelar el comportamiento histórico de la demanda de transporte de carga aérea en aeropuertos. Sin embargo, subraya el hecho de qué, al usar estas técnicas, se deben considerar las limitaciones características de los modelos de tendencias, así como establecer horizontes de pronóstico no muy largos, a fin de disminuir la posibilidad de cambios significativos en los factores sociales, económicos y tecnológicos que determinan la movilidad de las mercancías, y en consecuencia la demanda de transporte.

ISSN 2448 – 7945

Por otra parte, uno de los problemas más importantes que tienen las empresas es la precisión de los pronósticos, por mencionar algunos: el desabasto o el exceso de inventario que nos causaría tener un pronóstico muy por debajo o encima de la demanda real, traería una afectación considerable en la rentabilidad de la empresa. En la tarea cotidiana que realizan directivos de las empresas para la administración de flotillas, es indispensable llevar un control de todos los vehículos que destinan para las labores de trabajo. Desde microempresas (una empresa que se dedica a repartir flores con 3 vehículos en su flotilla) hasta una macroempresa (una empresa refresquera trasnacional con 3 mil camiones de reparto). Obviamente, ambas requieren una buena administración y control de los trámites y suministros que requieren para su funcionamiento. Aquí es donde los pronósticos toman una gran relevancia en el proceso de gestión de un Ingeniero en transporte

2. Desarrollo

2.1 Conceptos básicos

En su libro Gestión del pronóstico estratégico, su autor asegura que un buen pronóstico es aquel que combina las diferentes técnicas cualitativas y cuantitativas, el buen juicio, la experiencia, el sentido común y la intuición. Efectivamente, un pronóstico es un sistema de control de gestión, para anticipar el futuro y cuyo resultado permita implementar planes para lograr lo que la alta gerencia busca y generar valor empresarial a accionistas; En el aquí y ahora, las empresas están expuestas a cambios drásticos en el entorno, entonces un buen pronóstico no solo nos ayuda a predecir el futuro, sino nos permite anticipar los movimientos de los mercados. (Cadena, 2017)
Se denomina Serie de Tiempo a cualquier variable que conste de datos reunidos, registrados u observados sobre incrementos sucesivos de tiempo. Es una secuencia ordenada de observaciones sobre una variable en particular. (Ruiz, 2018)
Existen métricas para medir el desempeño de un pronóstico obtenido a partir de una serie de tiempo, en la siguiente tabla, se mencionan algunas de las más utilizadas. Para esta investigación se utiliza el Error cuadrático medio.



Figura 2. Ejemplos de métricas para medir desempeño de un pronóstico. Elaboración propia a partir de (Cadena, 2017)

Anderson et.al (2005) describen varios métodos de pronósticos: Suavizamiento exponencial, promedio móvil y promedio móvil ponderado. Estos métodos se llaman métodos de suavizamiento ya que su objetivo es suavizar las fluctuaciones aleatorias

ISSN 2448 – 7945

causadas por el componente irregular de la serie de tiempo, son adecuados para series de tiempo estables (Series que no presenten grandes efectos de tendencia, cíclicos o estacionales). Para fines de esta investigación, se utiliza Suavizamiento exponencial simple, ya que es fácil de aplicar y ofrece una gran precisión en pronósticos a corto plazo (pronósticos para el siguiente intervalo de tiempo)
Cadena (2017) refiere que desde el año 1984, las técnicas que tienen mayor uso y familiaridad con las empresas son: Para horizontes a corto plazo “Series de tiempo y el suavizamiento exponencial” y para horizontes a largo plazo “Modelos de regresión lineal”. En la tabla siguiente se presentan los cuatro métodos de pronósticos más utilizados por los expertos según el autor.

Tabla 1. Métodos de pronósticos.

MÉTODO	PORCENTAJE DE USO
Regresión lineal	63%
Box Jenkings	54%
Suavizamiento exponencial simple	40%
Media móvil simple	35%

En la actualidad, existen un gran número de paquetes de software diseñados para ofrecer al investigador diversos métodos para elaborar pronósticos. Para este trabajo se selecciona R, un programa de última generación para realizar análisis de datos, es un lenguaje de programación orientado a objetos de tipo interpretado, que proporciona un gran número de herramientas estadísticas para el análisis de datos, modelos lineales y no lineales para regresión, tests estadísticos, análisis de series de tiempo, algoritmos de clasificación y agrupamiento, gráficas etc. (Jiménez, 2019). Rstudio es un programa para manejar R que permite hacerlo de una manera más fácil y ordenada.

2.2 Procedimiento

A continuación se describen las Funciones y paquetes por utilizar en R:

Tabla 2. Funciones y paquetes para utilizar en R.

	Nombre	Acción
Funciones	install.packages()	Instala un paquete en R.
	library()	Usada para cargar un paquete.
	autoplot()	Grafica la serie de tiempo.
	labs()	Reemplaza los títulos de ejes.
	plot()	Crea gráficos.
	summary()	Obtiene resúmenes de datos a través de estadísticos descriptivos.
	MSE()	Error cuadrático medio
Paquetes	readxl	Facilita la obtención de datos de Excel a R**.**
	fpp2	Para el análisis de datos.
	fitted	Obtiene un ajuste con la data historia
	MLmetrics	Colección de métricas de evaluación, incluidas funciones de pérdida, puntuación y utilidad

ISSN 2448 – 7945

Problema a resolver: Utilizar un $\alpha=0.10$ para calcular los valores de la serie de tiempo con suavizamiento exponencial simple. ¿Cuál es el pronóstico para el año 2023? Calcular el error cuadrático medio como métrica del desempeño del pronóstico.

Se tienen los siguientes datos de serie de tiempo (el conjunto de datos consta de 26 registros correspondientes a las mediciones anuales, de la variable número de Accidentes de tránsito terrestre en zonas urbanas y suburbanas en la alcaldía Iztacalco desde 1997 hasta 2022).

Tabla 3. Datos obtenidos del Instituto Nacional de Estadística y Geografía. INEGI.

Año	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Accidentes	906	696	115	735	696	453	301	397	387	398	554	729	754	680	728	721	710	690	381	356	511	462	421	300	254	289

Paso 1: Etapa de preparación de los datos, se aplica algunas técnicas como: detección e imputación de datos faltantes, la detección e imputación de datos atípicos, eliminación de datos duplicados, etc. (Yajure, C. 2023).

Paso 2: Exploración de patrones con un análisis de autocorrelación. Un factor muy influyente en la selección de la técnica de elaboración de pronóstico, es la identificación y comprensión de patrones históricos de los datos, por lo que se procede a elaborar los correlogramas (Hanke, J. 2010).

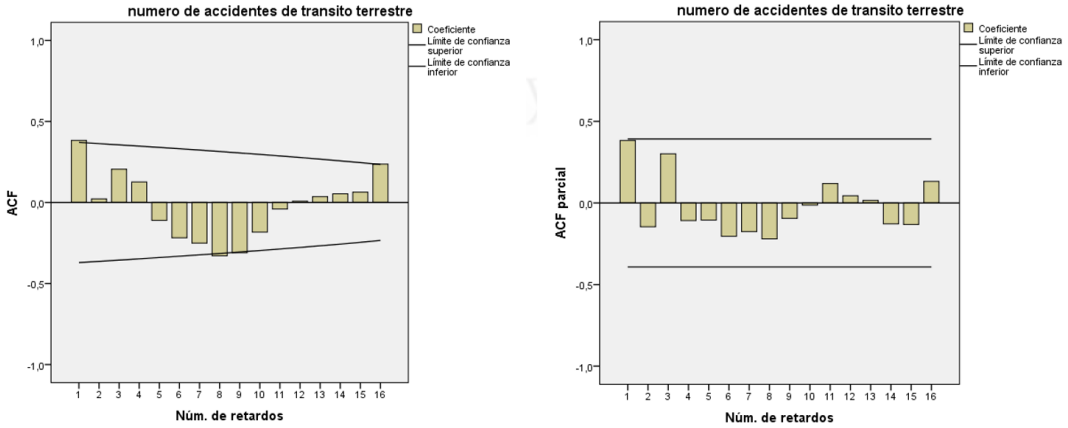


Figura 3. Correlograma o Función de autocorrelación de los datos. Elaboración propia a partir de IBM Statistics SPSS20.

De acuerdo al correlograma no se observa un patrón tendencia. La primera autocorrelación es significativa y después ya no. Se presume un patrón horizontal o estacionario. Es importante aclarar, que los alumnos de Estadística Aplicada realizan todas sus prácticas del curso con SPSS, manejan diferentes metodologías, por esa razon, se les solicitó realizar la fase exploratoria de patrones y de preparación de los datos con el software . Dejando unicamente el gráfico de la serie, el cálculo de pronóstico y el error cuadrático medio en el código de R

Paso 3: Abrimos Rstudio, un nuevo R script

ISSN 2448 – 7945

File → New File → R script

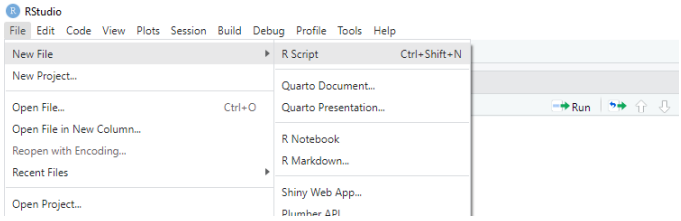


Figura 4. Elaboración propia a partir de R versión 4.3.1 (2023-06-16)

Paso 4: Importar datos de Excel **(BD_Series_de_tiempo.xls)**, nos vamos a File → Import Dataset → From Excel.

Paso 5: Introducir el código completo en Rstudio: (Rodriguez, 2021)

```
install.packages("fpp2")
install.packages("readxl")
install.packages("MLmetrics")
library(readxl)
library(fpp2)
BD_Series_de_tiempo <- ts(BD_Series_de_tiempo, frequency=1, start=1997)
autoplot(BD_Series_de_tiempo)+
  labs(title = "Serie de tiempo",
       x = "Valor",
       y = "Prediccion",
       colour = "#00a0dc")+
  theme_bw()
fit_ses<-ses(BD_Series_de_tiempo,h=1, initial ="simple", alpha=0.1)
fit_ses
plot(fit_ses)
summary(fit_ses)
fit_ses$fitted
library(MLmetrics)
MSE(BD_Series_de_tiempo,fit_ses$fitted)
```

Paso 6: Seleccionar el código y dar click en el botón run.

3. Resultados y análisis

En la siguiente figura se presentan los resultados obtenidos en Rstudio.

ISSN 2448 – 7945

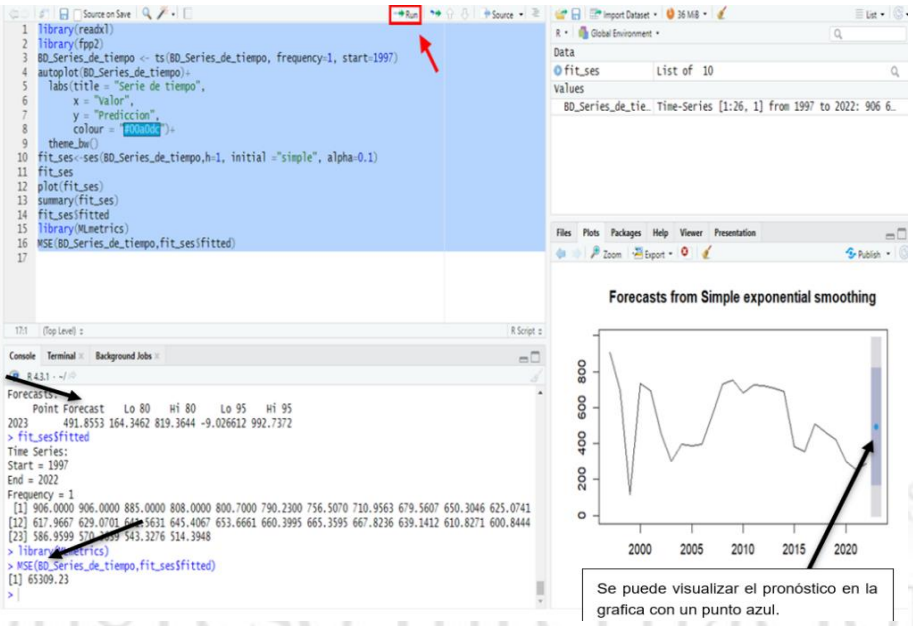


Figura 5. Resultados. Elaboración propia a partir de R versión 4.3.1 (2023-06-16)

En la consola se obtiene un pronóstico para el *2023* = ***491.8553***

MSE= ***65309.23***

A continuación, los estudiantes realizan un corrimiento en Excel QM para verificar los resultados obtenidos:

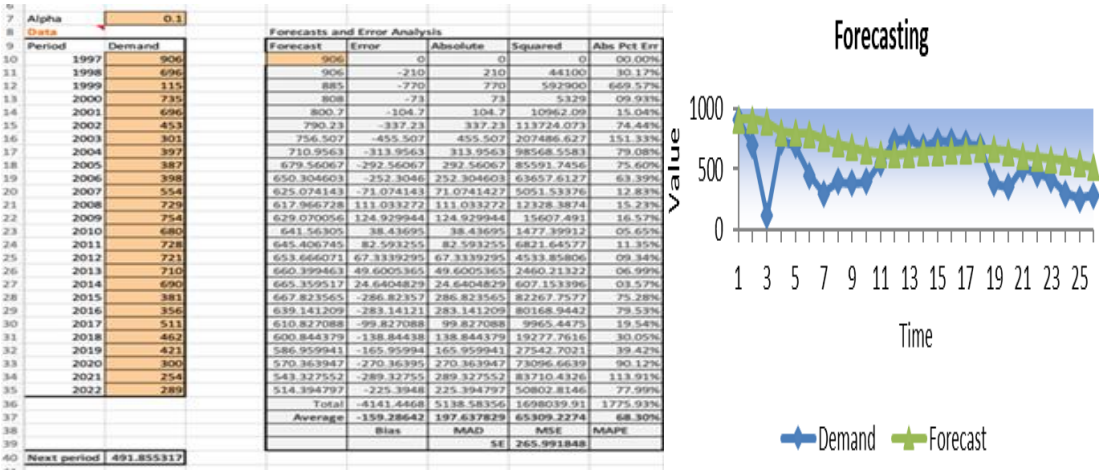


Figura 6. Resultados Elaboración propia a partir de Excel QM

El pronóstico para el año *2023* = ***491.8553***

MSE= ***65309.2274***

4. Conclusiones

-Los resultados obtenidos pronostican aproximadamente 492 accidentes de tránsito terrestres durante el 2023, con un incremento del 70% con relación a lo registrado en el 2022.

ISSN 2448 – 7945

-Cuando los datos recopilados en el transcurso del tiempo fluctúan alrededor de un nivel o una media constante nos indica un patrón horizontal o estacionario.
-Debido a que el patrón de los datos fue horizontal, el horizonte en tiempo fue a corto plazo y el tipo de modelo es una serie de tiempo, el método que se recomienda utilizar para el análisis de los datos es suavizamiento exponencial simple.
- Rstudio nos ofrece una solución fácil de implementar en la computadora y una interpretación sencilla de resultados en la obtención de pronósticos.
- Como métrica de desempeño se utiliza el Error cuadrático medio. A menor MSE mejor pronóstico.
- Existen limitaciones de la investigación por lo que se sugiere tomar con precaución las conclusiones obtenidas en ella. Futuras líneas de investigación pueden estar enfocadas en realizar pronósticos con Rstudio, utilizando diferentes valores de constantes de suavizamiento y elegir el valor de alfa que minimice el error cuadrático medio.

4.1 Agradecimientos

El primer autor agradece el apoyo al Instituto Politécnico Nacional por la Beca EDD y COFAA otorgada a sus profesores-investigadores de la UPIICSA

5. Índice de referencias

- Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T. (2006) Estadística para Administración y Economía. Thomson Learning. Octava edición

- Ortuzar, J (2012). Modelos de Demanda de Transporte. Ediciones Universidad Catolica de Chile. Recuperado de https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=9e1TDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA4&dq=aplicaciones+de+series+de+tiempo+en+el+area+de+transporte&ots=lByQ3lWYSt&sig=I5qhK-jUAkBlc5YQPP4DDF0uG48#v=onepage&q&f=false

- Rico Galeana, O.A. (2006) Analisis de series de tiempo de la carga transportada en los principales aeropuertos mexicanos. Publicacion tecnica no. 294. Instituto Mexicano del Transporte. Disponible en: https://imt.mx/archivos/Publicaciones/PublicacionTecnica/pt294.pdf

- Ruiz Lopez, H.R. (2018) Pronósticos de las exportaciones del cacao Ecuatoriana para el 2018 con el uso de modelos de series de tiempo. Vol 3 No. 6 pp. 9-20. INNOVA Research Journal Recuperado de file:///Users/anamarialagunestoledo/Downloads/713-Texto%20del%20art%C3%ADculo-2039-3-10-20190529.pdf

- Jimenez, J.U. (2019) Introducción a R y Rstudio. Centro de Investigaciones Hidraúlicas e Hidrotécnicas. Universidad Tecnologica de Panama Recuperado de:

ISSN 2448 – 7945

https://ridda2.utp.ac.pa/bitstream/handle/123456789/9428/manual-introduccion-R.pdf?sequence=1

- Yajure, C.A (2023) Métodologia de comparacion de tecnicas de corto plazo para el pronosticos de la produccion de energia electrica de plantas solares fotovoltaicas. Revista de investigacion de sistemas e informatica. 16(1), 21-33. Recuperado de: file:///Users/anamarialagunestoledo/Downloads/99082.pdf

- Cadena, J. B. (2017). Gestión del pronóstico estratégico: una herramienta de planificación en las empresas. Recuperado de: http://hdl.handle.net/10726/2395.

- Instituto Nacional de Estadística y Geografía. INEGI. (s. f.). Descarga masiva. https://www.inegi.org.mx/app/descarga/default.html

- Hanke, J. E. (2010). Pronósticos en los negocios (D. W. Wichern, A. P. Enríquez Brito, O. Vizcaino Diaz, & J. A. Rosas Ferrer (Eds.); Novena edición). Pearson

- Rodriguez, M. (11/04/2021). Método SES (Suavización Exponencial Simple). Rpubs by Rstudio. https://rpubs.com/Maus/831078

ISSN 2448 – 7945

RELACIÓN DE LAS TAREAS DE ENSEÑANZA CON LAS ACTITUDES DE LOS ESTUDIANTES HACIA LAS MATEMÁTICAS

Castillo Filomeno Rolando[1*]
Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Tlaxcala, Plantel CECyTE 01. El Carmen Tequexquitla, Tlaxcala.

IP-POSM009

Resumen

La investigación nace de la problemática de las actitudes hacia las matemáticas en el CECyTE 01 Tlaxcala y trata de conocer las actitudes de los estudiantes hacia "la evaluación de expresiones algébricas" que generan las tareas de enseñanza con enfoque constructivista, en comparación con las tareas de enseñanza con enfoque tradicionalista.
Existen extensos estudios sobre la relación entre género, etnia, ramas de estudios universitarios, grados, uso de tecnología, desempeño, entre otras, con las actitudes hacia las matemáticas. Sin embargo, no se encontró investigación empírica que analice la relación de las tareas de enseñanza con las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas.
La metodología se ubica en un paradigma cuantitativo de tipo descriptivo y un diseño cuasiexperimental. En efecto, la muestra se conformó por 60 estudiantes de bachillerato de primer semestre del CECyTE 01.
Las actitudes se midieron a través de una adaptación de la escala Actitudes hacia la estadística de Auzmendi (1999). Se realizaron varios análisis estadísticos con el software IBM SPSS Statistics. Entre ellos, análisis de consistencia interna del instrumento de medición de actitudes, pruebas de normalidad de muestras independientes, análisis de estadística descriptiva de las actitudes, pruebas para evaluar la significancia de las diferencias entre las actitudes de los dos grupos de estudio y análisis de correlación lineal de factores actitudinales.
El estudio permite afirmar que la actitud global de los estudiantes hacia "la evaluación de expresiones algebraicas" generadas con tareas de enseñanza constructivistas, es mayor y estadísticamente significativa que la actitud generada con tareas de enseñanza tradicionalista. Asimismo, los resultados permiten aseverar que las tareas de enseñanza constructivistas tienen mayor influencia positiva en la correlación de los factores actitudinales de Utilidad-Agrado y Motivación-Confianza, que las tareas de enseñanza tradicionalistas.

Palabras clave: *Actitud, matemáticas, álgebra, enseñanza, constructivista, tradicionalista.*

1. Introducción

La investigación nace de la problemática sobre el aprendizaje y actitud de los estudiantes hacia las matemáticas en el bachillerato del CECyTE 01 Tlaxcala.
Bain (2007) señala que muchos profesores pueden atraer a sus estudiantes con estrategias como estudio de casos, solución de problemas, aprendizaje basado en proyectos, clases magistrales, etc., sin embargo, también pueden fallar, en virtud de lo que verdaderamente importa para el aprendizaje es la pregunta retadora, el desafío intelectual o la tarea autentica.

1* *Autor para la correspondencia. E-mail: rolando.castillofilomeno@cecytlax.edu.mx Tel. 247 106 5444*

ISSN 2448 – 7945

Godino, Batanero y Font (2003) identifican dos concepciones extremas sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la concepción idealista-platónica y la constructivista. La primera plantea que el alumno debe adquirir primero las estructuras fundamentales de las matemáticas de forma axiomática-deductiva y después aplicarlas para resolver problemas. En cambio, la concepción constructivista propone que la enseñanza, primero debe mostrar como las matemáticas satisfacen ciertas necesidades al resolver problemas y posteriormente enseñar las estructuras matemáticas, de manera que las aplicaciones precedan al estudio de las estructuras.
En el proceso de enseñanza y aprendizaje, una tarea de enseñanza es una situación didáctica o problema que coloca al estudiante en un contexto particular y lo obliga a movilizar diferentes recursos de forma integrada para alcanzar un objetivo de aprendizaje (Denyer, Furnemont, Poulain, y Vanloubbeeck, 2007).
Derivado de la revisión de la literatura se identificaron los atributos más relevantes de las tareas de enseñanza: Exigencia Cognitiva, Contexto, Consigna y Alineación, que permiten clasificar las tareas de enseñanza.

Tabla 1. Atributos, criterios e indicadores de las tareas de enseñanza.

Atributo	Criterio	Indicador
Exigencia Cognitiva	Recuperación	La tarea demanda un pensamiento de recuperación, memorización o reproducción del conocimiento (datos, conceptos o algoritmo).
	Comprensión	La tarea exige realizar un procedimiento o la demostración de una habilidad, generalmente mental o física simple.
	Análisis	La tarea implica un entendimiento a profundidad del conocimiento a través de nuevas conexiones o descubrir el sentido.
	Aplicación del conocimiento	La tarea implica un pensamiento complejo de aplicación que le dan significado y sentido al conocimiento.
Contexto	Contexto académico	La tarea carece de un contexto que le da sentido. La situación se presenta como simple ejercicio mental de manejo de conceptos.
	Contexto evocado	La tarea tiene un contexto diseñado para activar procesos simples o complejos para la aplicación de conceptos propios de una disciplina.
	Contexto hipotético	La tarea presenta un contexto que reproduce una parte de un contexto real. La situación es una simulación de una tarea real.
	Contexto real	La tarea presenta un contexto sociocultural donde el conocimiento tiene un sentido real y concreto.
Consigna	Manejo de información.	El enunciado de la tarea exige el manejo de conceptos, datos o procedimientos mentales y físicos simples o repetitivos.
	Pregunta compleja.	El enunciado de la tarea demanda respuesta a una pregunta desafiante. La operación mental implica relacionar datos, información o procedimientos.
	Resolución de problemas.	El enunciado de la tarea implica resolver un problema en un contexto concreto. La operación mental implica movilizar y relacionar conceptos o hechos.
	Desarrollo de proyecto.	El enunciado de la tarea exige crear un producto concreto o abstracto. La operación mental implica relacionar de manera diferente conceptos o conocimientos.
Alineación	Contenidos	El contenido de la tarea de enseñanza coincide con el contenido del programa de estudios.
	Complejidad	La complejidad de la tarea es coherente con la exigencia cognitiva del contenido del programa de estudios.

ISSN 2448 – 7945

	Amplitud	La cobertura del conocimiento de la tarea coincide con el contenido del programa de estudios.

Nota. Fuente: Denyer et al. (2007); Marzano y Pickering (2005); Font (2007); Meirieu (2009); Biggs (2010); Webb (2007). Elaboración propia

En la investigación, una tarea de enseñanza constructivista presenta un Contexto hipotético, que reproduce características del contexto real, y una Exigencia Cognitiva hacia la aplicación del conocimiento que le dan significado al aprendizaje. En cambio, una tarea de enseñanza tradicionalista carece de un Contexto que da sentido a los datos y se presenta como simple ejercicio mental de manejo de conceptos; asimismo, demanda una Exigencia Cognitiva de recuperación o reproducción de datos, conceptos o algoritmos.

Por otra parte, la actitud de una persona es la forma de responder hacia un estímulo. Hernández, Fernández y Baptista (2010) señalan que la actitud es una predisposición aprendida para actuar de manera consistente, positiva o negativa, ante un objeto, persona, tarea, etc., por lo que la actitud es como una “semilla” que bajo ciertas condiciones suele “germinar en comportamiento”.

En el mismo sentido, Hattie (2018) y Ruíz (2020) señalan que engendrar una actitud positiva hacia el trabajo escolar es un precursor del interés y logro de aprendizajes, y claramente está relacionada con el éxito.

Existen antecedentes de investigación que tratan de conocer la relación entre género, etnia, grado académico, uso de tecnología, etc., con las actitudes hacia las matemáticas (Flores y Auzmendi, 2018; Castro, García, Sirvent, Martín y Rodríguez, 2010; Pedrosa, 2020; Meléndez y Páez, 2020; Nortes y Nortes, 2020; Cardoso, 2019; Sánchez y Ursini, 2019). Sin embargo, no se encontró investigación empírica sobre la relación entre las tareas de enseñanza y las actitudes hacia las matemáticas.

2. Metodología

El estudio tiene un enfoque cuantitativo y un alcance descriptivo, asimismo, sigue un diseño de investigación cuasiexperimental.

Para la investigación se organizó una muestra de 60 alumnos de primer semestre del curso de álgebra de Bachillerato del CECyTE 01 Tequexquitla, Tlaxcala. De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2010) la muestra es no probabilística o dirigida.

Para medir las actitudes de los estudiantes hacia “la evaluación de expresiones algebraicas” se adaptó la escala de actitudes hacia la estadística de Auzmendi (1999).

La investigación consistió en hacer una intervención pedagógica de una sesión de 100 minutos en cada uno de los grupos de estudio. En efecto, en la intervención pedagógica se utilizó la técnica de microenseñanza, en virtud de que es una técnica para valorar las estrategias de enseñanza o probar materiales nuevos e implica de manera implícita, la autoevaluación y coevaluación (Nieto y Ramón, 2014).

La intervención pedagógica en un grupo de estudio se hizo con tareas de enseñanza constructivistas y otro con tareas de enseñanza tradicionalistas. Ambas intervenciones pedagógicas se organizaron con la misma secuencia didáctica, integrada por las

ISSN 2448 – 7945

etapas de apertura (introducción y práctica demostrativa), desarrollo (práctica guiada y autónoma) y cierre. Posteriormente, se midieron las actitudes de los estudiantes. La validación de contenido de las tareas de enseñanza se realizó a través de la técnica de comité de expertos con docentes del CECyTE Tlaxcala.

3. Resultados y análisis

La investigación se desarrolló en el marco del enfoque constructivista de la educación, donde el contexto, las experiencias previas y el discernimiento de los estudiantes son factores determinantes para el aprendizaje (Serrano y Pons, 2011). Asimismo, el objetivo consistió en estudiar la relación de las tareas de enseñanza: Contexto y Exigencia Cognitiva, con las actitudes de los estudiantes hacia "la evaluación de expresiones algebraicas". En el mismo sentido, la hipótesis de investigación trata de verificar que las tareas de enseñanza constructivistas generan mayores actitudes positivas hacia "la evaluación de expresiones algebraicas" en los estudiantes, que las tareas de enseñanza tradicionalistas.

El análisis de los resultados se realizó con el *Software IBM SPSS Statistics.*

La confiabilidad del instrumento, para medir las actitudes, se determinó a través del *coeficiente alfa de Cronbach*, los resultados se presentan en la tabla 2.

Tabla 2. Coeficientes alfa de Cronbach de las muestras de estudio.

Grupo	Tarea de enseñanza	*Coeficiente alfa de Cronbach*
1 (33 estudiantes)	Constructivistas: Contexto cercano al estudiante y Exigencia Cognitiva hacia la aplicación	0.772
2 (27 estudiantes)	Tradicionalistas: Contexto académico y Exigencia Cognitiva hacia la recuperación.	0.663

Nota: Elaboración propia.

El estadístico indica que el instrumento tiene una confiabilidad aceptable.

Para probar la hipótesis, sobre la diferencia significativa entre dos muestras, se requiere que las muestras tengan una distribución normal. Por tanto, para medir la normalidad de las muestras independientes se aplicó la prueba de *Shapiro-Wilk,* en virtud de que las muestras son menores a 50 elementos. Los resultados de la prueba de normalidad se presentan en la tabla 3.

Tabla 3. Resultados de la prueba de normalidad Shapiro-Wilk, W, de ambos grupos de estudio.

Factor actitudinal	Grupo expuesto a tareas de enseñanza constructivistas				Grupo expuesto a tareas de enseñanza tradicionalistas			
	W	Grados de libertad	Significancia	¿Muestra con	*W*	Grados de libertad	Significancia	¿Muestra con

ISSN 2448 – 7945

				distribución normal?				distribución normal?
Actitud global	0.984	33	0.897	Si	0.964	27	0.454	Si
Utilidad	0.975	33	0.639	Si	0.834	27	0.001	No
Agrado	0.980	33	0.773	Si	0.976	27	0.756	Si
Ansiedad	0.946	33	0.104	Si	0.953	27	0.246	Si
Motivación	0.970	33	0.471	Si	0.954	27	0.274	Si
Confianza	0.942	33	0.080	Si	0.961	27	0.390	Si

Nota. Elaboración propia.

Con base al estadístico, los datos de la Actitud global y de cada uno de los factores actitudinales de ambas muestras presentan una distribución normal, excepto el factor actitudinal de Utilidad de la muestra expuesto a tareas tradicionalistas.
La media de la Actitud global y de los factores actitudinales, así como su diferencia entre los grupos de estudio se presenta en la tabla 4.

Tabla 4. Diferencia en la puntuación media de la Actitud global y los factores actitudinales.

Grupo	Tareas de enseñanza	Puntuación media de la Actitud global	Puntuación total media por factor actitudinal				
			Utilidad	Agrado	Ansiedad	Motivación	Confianza
1	Constructivistas	81.70	18.39	15.15	15.88	15.58	16.73
2	Tradicionalistas	76.80	17.81	14.62	14.25	14.44	15.79
Diferencia en la puntuación media.		4.9	0.58	0.53	1.63	1.14	1.03

Nota. Elaboración propia.

Los resultados indican que la Actitud global y de cada uno de los factores actitudinales del grupo con tareas de enseñanza constructivistas es mayor a la Actitud del grupo con tareas tradicionalistas. Asimismo, destacan la Actitud global y los factores actitudinales de Ansiedad, Motivación y Confianza por tener las diferencias mayores.
De la misma manera, los factores actitudinales de Utilidad y Agrado mantienen una diferencia menor, sin embargo, es evidente que las puntuaciones de los factores actitudinales de los estudiantes con tareas de enseñanza constructivistas son mayores en comparación con la Actitud de los estudiantes con tareas tradicionalistas.
Para examinar las diferencias entre las dos muestras independientes respecto a sus medias de la variable de Actitud hacia “la evaluación de expresiones algebraicas” y verificar la hipótesis de investigación, se aplicó la *Prueba t-student*. La tabla 5 presenta los *p-valores* de la Actitud global y de los factores actitudinales con un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$.

Tabla 5. *p-valores de la prueba t-student de los grupos de estudio de la actitud global y factores actitudinales hacia “la evaluación de expresiones algebraicas”.*

ISSN 2448 – 7945

Comparación de las puntuaciones medias de las actitudes de los grupos	*p*-valor de la *prueba t-student*					
	Actitud global	Factor actitudinal Utilidad	Factor actitudinal Agrado	Factor actitudinal Ansiedad	Factor actitudinal Motivación	Factor actitudinal Confianza
Grupo con tareas de enseñanza constructivistas vs grupo con tareas de enseñanza tradicionalistas	$p = 0.024$	$p = 0.234$	$p = 0.221$	$p = 0.012$	$p = 0.066$	$p = 0.137$

Nota: Elaboración propia.

Derivado de los datos de los *p-valores* se verifica que únicamente las puntuaciones de Actitud global y Ansiedad del grupo con tareas constructivistas presenta diferencias, estadísticamente significativas, con respecto al grupo con tareas tradicionalistas.
En el mismo sentido, se puede señalar que la Motivación y Confianza del grupo con tareas de enseñanza constructivistas presentan diferencias notables, pero estadísticamente no significativas, con relación al grupo con tareas tradicionalistas.
Para medir la correlación entre factores actitudinales hacia "la evaluación de expresiones algebraicas" se utilizó la *Prueba r de Pearson*. Los coeficientes de correlación entre los factores actitudinales se presentan en la tabla 6.

Tabla 6. Coeficientes de correlación entre los factores actitudinales hacia "la evaluación de expresiones algebraicas" de los grupos de estudio.

Grupo de estudiantes	*Coeficientes de correlación r de Pearson*, entre factores actitudinales hacia "la evaluación de expresiones algebraicas"									
	Utilidad y Agrado	Utilidad y Motivación	Utilidad y Confianza	Utilidad y Ansiedad	Agrado y Motivación	Agrado y Confianza	Agrado y Ansiedad	Motivación y Confianza	Motivación y Ansiedad	Confianza y Ansiedad
Grupo con tareas de enseñanza constructivistas.	0.61	0.20	0.31	0.01	0.27	0.35	0.19	0.48	0.35	0.31
Grupo con tareas de enseñanza tradicionalistas.	0.42	-0.01	0.52	0.01	-0.16	0.43	0.34	-0.03	0.30	0.18

Nota. Elaboración propia.

Destaca la correlación Utilidad-Agrado en el grupo con tareas de enseñanza constructivistas con un coeficiente de correlación de 0.61, mayor a la correlación observada en el grupo con tareas de enseñanza tradicionalistas, 0.42.
De la misma manera, el grupo con tareas de enseñanza constructivistas presenta una correlación lineal positiva entre Motivación-Utilidad, Motivación-Agrado y Motivación-Confianza, en un rango de débil a considerable, en cambio en el grupo expuestos a tareas de enseñanza tradicionalistas, los mismos factores actitudinales presentan una correlación lineal negativa, con una intensidad débil.

ISSN 2448 – 7945

De manera contraria, el grupo con tareas de enseñanza tradicionalista presenta mayores coeficientes de correlación, en un rango de débil a considerable, entre los factores de Utilidad-Confianza, Agrado-Confianza, así como Agrado-Ansiedad, en comparación con el grupo con tareas de enseñanza constructivistas.

4. Conclusiones

Derivado de los resultados se concluye, que las tareas de enseñanza constructivistas tienen una mayor influencia positiva, y estadísticamente significativa, sobre la Actitud global hacia "la evaluación de expresiones algebraicas", que las tareas tradicionalistas. Asimismo, las tareas constructivistas tuvieron mayor impacto en todos y cada uno de los factores actitudinales, que las tareas tradicionalistas. Destacan, por mayor influencia los factores actitudinales de Motivación, Confianza y Ansiedad.

En relación con la correlación de factores actitudinales, los resultados señalan que las tareas de enseñanza constructivistas generan mayor correlación positiva entre Utilidad-Agrado, Utilidad-Motivación, Agrado-Motivación, Motivación-Confianza, Motivación-Ansiedad y Confianza-Ansiedad, que las tareas tradicionalistas. Sin embargo, destacan por su mayor intensidad los factores de Utilidad-Motivación, Utilidad-Agrado y Motivación-Confianza. Es decir, en la medida que los estudiantes perciban mayor utilidad de las tareas de enseñanza mayor es la motivación y agrado, asimismo, entre mayor sea la motivación mayor es la confianza.

De manera general, los resultados señalan que las tareas de enseñanza constructivistas: Contexto cercano al estudiante y Exigencia Cognitiva hacia la aplicación, generan mayor actitud positiva hacia "la evaluación de expresiones algebraicas" en los estudiantes, que las tareas de enseñanza tradicionalistas: Contexto académico y Exigencia Cognitiva hacia la recuperación.

5. Índice de referencias

- Auzmendi, E. (1999). *Las actitudes hacia la Matemática-Estadística en las enseñanzas medias y universitarias. Características y medición*. [Archivo PDF]. file:///C:/Users/educa/Downloads/Medicindelasactitudeshacialasmatemticasyestadstica.pdf
- Bain, K. (2007). *Lo que hacen los mejores profesores de universidad* (O. Barberá, trad.). Universidat de Valéncia.
- Biggs, J. (2010). *Calidad del aprendizaje universitario*. Narcea, S. A. De ediciones.
- Cardoso, E. O. (2019). Las actitudes hacia las matemáticas de estudiantes de formación inicial de profesorado en México. *Revista de psicología y ciencias del comportamiento de la Unidad Académica de Ciencias Jurídicas y Sociales*, *10*(1), 87-103. Epub 20 de noviembre de 2020. https://doi.org/10.29059/rpcc.20190602-83
- Castro, M. A., García, P. A., Sirvent, A., Martín, J. A., Rodríguez, F. (2019). Actitudes hacia las Matemáticas, conocimientos previos y resultados de

ISSN 2448 – 7945

evaluación: un estudio en primer curso de titulaciones de Ingeniería. En Roig-Vila, R. (Ed.), *Investigación e innovación en la Enseñanza Superior. Nuevos contextos, nuevas ideas*, Barcelona, Octaedro. https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/98871/1/Investigacion-e-innovacion-en-la-ES_006.pdf

- Denyer, M., Furnémont, J., Poulain, R. y Vanloubbeeck, G. (2007). *Las competencias en la educación, un balance* (J. J. Utrilla, trad.). Fondo de Cultura Económica.
- Flores, W. O. & Auzmendi, E. (2018). Actitudes hacia las matemáticas en la enseñanza universitaria y su relación con las variables género y etnia. *Profesorado, Revista De Currículum Y Formación Del Profesorado*, *22*(3), 231–251. https://doi.org/10.30827/profesorado.v22i3.8000
- Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La gaceta de la RSME, 10(2),* 247-442. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=631
- Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. [Archivo PDF]. https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf
- Hattie, J. (2018). *El sí y el no de las estrategias de enseñanza: un análisis completo del proceso de aprendizaje* (D. Islas, trad.). Trillas.
- Hernández, R. Fernández, C. y Baptista, L. (2010). *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill.
- Marzano, J. y Pickering, D. J. (2005). *Dimensiones del aprendizaje, manual para el maestro* (H. Guzmán, trad.). ITESO.
- Meirieu, P. (2009). *Aprender, sí. Pero ¿cómo?* (C. Cherigny y A. Oliveras, trad.). Octaedro, S. L.
- Meléndez R. R., Páez P. M. (2020). Las actitudes con relación a las matemáticas y el desempeño algebraico en la asignatura Matemática. *Revista de educación MENDIVE,* 18(4), 777-793. http://mendive.upr.edu.cu/index.php/MendiveUPR/article/view/2011
- Nieto, L. A. y Ramón, S. P. (2014). Microenseñanza una técnica para motivar el enseñar y aprender investigando. *Revista Perspectivas docentes*. N° 52, 23-31. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6349166
- Nortes, R. & Nortes, A. (2020). Actitud hacia las matemáticas en el Grado de Maestro de Primaria. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *23*(2). DOI: https://doi.org/10.6018/reifop.348061
- Pedrosa, C. (2020). *Actitudes hacia las matemáticas en estudiantes universitarios*. [Tesis doctoral, Universidad de Córdoba, España]. https://helvia.uco.es/bitstream/handle/10396/20175/2020000002093.pdf
- Ruíz, H. (2020). *¿Cómo aprendemos? Una aproximación científica al aprendizaje y la enseñanza.* Grao, de IRIF, S. L.
- Serrano, M. y Pons, M. (2011). Constructivismo hoy. Enfoques constructivistas en educación. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 13(1). https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=15519374001

ISSN 2448 – 7945

- Sánchez, J. G. y Ursini, S. (2010). Actitudes hacia las matemáticas y matemáticas con tecnología: estudios de género con estudiantes de secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 13(4-II), 303-318. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33558827005
- Webb, N. (2007). *Issues Related to Judging the Alignment of Curriculum Standards and Assessments*. [Archivo PDF]. file:///C:/Users/educa/Downloads/Issues_Related_to_Judging_the_Alignment_of_Curricu.pdf

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

ELABORACIÓN DE UN LIBRO DIGITAL DEL TEMA DE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Pineda Becerril Miguel de Nazareth[1, *], García León Omar[2], Aguilar Márquez Armando[3] y León Rodríguez Frida[4]
[1, 2, 3 y 4] *Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM. Carretera Cuautitlán-Teoloyucan Km. 2.5, Colonia San Sebastián Xhala. Cuautitlán Izcalli, Estado de México, C. P. 54714.*

EN-POSM010

Resumen

En este libro digital se abordan lo temas de distribuciones de probabilidad de una manera didáctica en donde se da cuenta del estudio de las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias discretas, así como de las variables aleatorias continuas; igualmente, se revisan las distribuciones especiales de probabilidad tanto para las primeras como para las segundas. Con el fin de facilitar al estudiante desarrollar habilidades en los procedimientos estadísticos se hace hincapié en los conceptos básicos y se incluyen múltiples ejercicios y preguntas de repaso, además de un completo formulario. Los alumnos podrán hojear el libro con sólo deslizar un dedo en la pantalla, los contenidos audiovisuales de este libro aportan ventajas a la hora de las explicaciones y de la comprensión de los conceptos. El libro digital no se limita a una digitalización de una versión en papel, este material además de la teoría en forma de preguntas, incluye videos de solución a problemas paso a paso, material multimedia de explicación de conceptos y calculadoras digitales para diferentes temas del libro. Al ser interactivos, se aprovecharán todas las ventajas de la red y sus aplicaciones.

Palabras clave: *Libro, digital, distribuciones, muestrales*

1. Introducción

Una variable aleatoria es una descripción numérica del resultado de un experimento, es decir, una variable aleatoria asocia un valor numérico con cada resultado experimental posible. Se puede clasificar una variable aleatoria como discreta o continua, dependiendo de los valores numéricos que esta toma. Una variable aleatoria que pude asumir una cantidad finita de valores o una sucesión infinita de valores, se le llama variable aleatoria discreta.

[1] *Autor para la correspondencia. E-mail: mnazarethp@gmail.com*

ISSN 2448 – 7945

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria es una descripción de las probabilidades asociadas con los valores posibles. Para una variable aleatoria discreta, que es el tema de este trabajo, es común especificar la distribución con una lista de valores posibles junto con la probabilidad de cada uno; en algunos casos, resulta conveniente expresar la probabilidad en términos de una formula.

La distribución continua de probabilidad más importante de toda la estadística es, sin duda alguna, la distribución normal. La importancia de esta distribución se debe a que describe con gran aproximación la distribución de las variables asociadas con muchos fenómenos de la naturaleza. Bajo ciertas condiciones, la distribución normal constituye una buena aproximación a otras distribuciones de probabilidad, como la Binomial y la de Poisson.

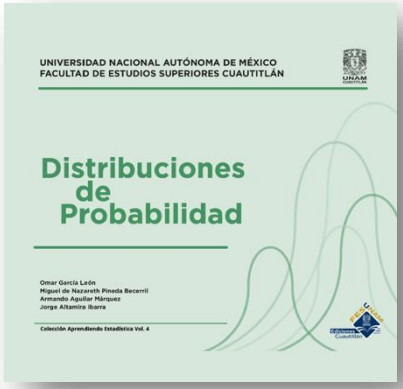
El libro electrónico está diseñado para ayudar a captar el sentido de las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas y continuas, es decir, cómo y cuándo aplicar las técnicas estadísticas en situaciones en las que haya que tomar decisiones, y lo más importante cómo interpretar los resultados obtenidos. Puesto que no se escribió para estadísticos profesionales, nuestro texto está adaptado a los conocimientos y las necesidades de estudiantes universitarios que, quizá, acepten el hecho de que la estadística puede serles de considerable utilidad en su desempeño profesional.

Con el contenido del libro el estudiante será guiado a lo largo del proceso de aprendizaje mediante recordatorios de lo que ya debería saber, por medio de widget, imágenes interactivas o imágenes virtuales, resolución de ejercicios en video, así como ejemplos con los que puede identificarse y con procesos desarrollados paso a paso o con un video utilizando un software especializado en estadística.

2. Metodología o desarrollo

Se muestra en la figura 1 la portada del libro multimedia elaborado del tema de Distribuciones de Probabilidad, este tema se contempla en las asignaturas de probabilidad y estadística que se imparte en las áreas de las ingenierías de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán.

ISSN 2448 – 7945



.

Figura 1. Portada del libro multimedia del tema de Distribuciones de Probabilidad

El contenido del libro interactivo del tema de pruebas de hipótesis es el siguiente: Video de introducción, Capítulo 1 Variable aleatoria, Capítulo 2 Distribuciones de probabilidad: Variable aleatoria discreta, Capítulo 3 Distribuciones de probabilidad: variable aleatoria continua, Capítulo 4 Distribuciones especiales de probabilidad: variable aleatoria discreta, Capítulo 5 Distribuciones especiales de probabilidad: variable aleatoria continua, Capítulo 6 Formulario, Capítulo 7 Ejercicios resueltos y Capítulo 8 Actividades 1. Ejercicios propuestos, Capítulo 9 Actividades 2. Preguntas de repaso y Capítulo 9 Bibliografía. La figura 2 nos muestra el contenido del capítulo 6.

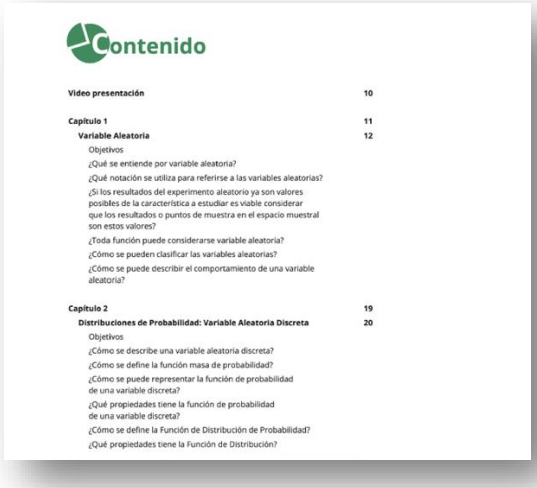


Figura 2. Capítulo 6 del libro electrónico

ISSN 2448 – 7945

Los videos cada día ganan más atención por parte de los docentes como herramienta de contenidos e información, dentro de este contexto al libro digital se realizó un video de introducción del tema de prueba de hipótesis. La figura 3 nos muestra como se ve en libro electrónico interactivo el video de introducción.



Figura 3. Video de introducción

MEMORIAS DEL Congreso Internacional Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

En cada capítulo se desarrolló la parte teórica en forma de preguntas y respuestas, con la finalidad de a los alumnos se les haga de más fácil comprensión cada uno de los temas. La figura 4 nos muestra la forma de preguntas y respuestas del capítulo de pruebas de hipótesis para una sola media con la varianza desconocida.



Figura 4. Desarrollo del tema de variable aleatoria

Como apoyo al contenido del libro se añadieron widgets. La herramienta "widgets" consta de pequeñas aplicaciones que permiten integrar contenido interactivo en el libro digital. Los widgets que se utilizaron en este libro fueron

ISSN 2448 – 7945

para resaltar algún concepto importante en cada uno de los diferentes capítulos. En la figura 5 podemos ver el widget o imagen interactiva realizada para realizar la solución de un ejemplo planteado, en este caso para ejemplificar lo que es una variable discreta, el caso de la variable binomial.

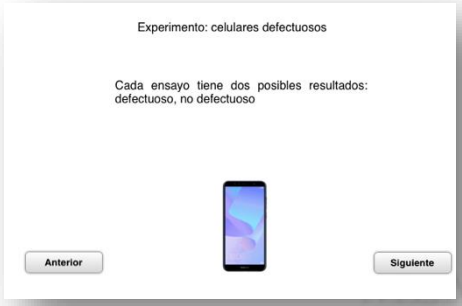


Figura 5. Imagen interactiva elaborada para el ejemplo de celulares defectuosos.

Los contenidos audiovisuales dan vida a cualquier tema en cualquier parte de la página. Ya no se trata solo de ver y leer: ahora es posible interactuar con el texto y las imágenes. Los vídeos pueden reproducirse automáticamente, o la veces que el alumno quiera, con la finalidad de entender mejor un tema o ver como se resuelve un ejercicio práctico con el uso de software. Al final de cada capítulo se elaboró un video, en el cual se muestra cómo resolver un problema práctico haciendo uso de un software estadístico. En la figura 6 se muestra como aparece el video al final del capítulo 4 en el cual con el uso de software se ve la distribución de Poisson como aproximación de la distribución binomial.

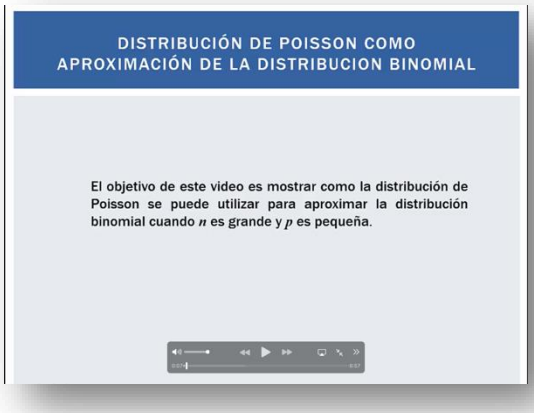


Figura 6. Video con uso de software

Las calculadoras virtuales se han convertido en una de las herramientas de más uso en el mundo de la educación tanto para alumnos como para profesores. Con

ISSN 2448 – 7945

la llegada del internet aparecieron las primeras calculadoras online capaces de realizar cualquier tipo de cálculo de forma gratuita, sin necesidad de ningún tipo de instalación. La calculadora virtual es una herramienta muy útil para realizar calculo matemáticos de manera rápida y sencilla. Dentro de este contexto para los temas de distribución Binomial, de Poisson, hipergeométrica y Normal, se realizaron calculadoras virtuales con la finalidad de facilitar los cálculos a los alumnos y enfocar su atención en la compresión de los problemas planteados. En la figura 7 se muestra una calculadora virtual de la distribución binomial, en donde es el número de ensayos, es la probabilidad de éxito es el número de éxitos en la muestra.

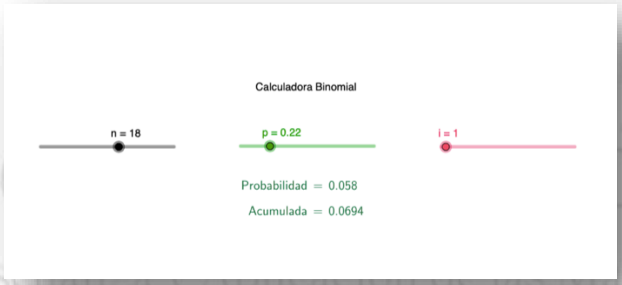


Figura 7. Calculadora virtual de la distribución binomial.

Para evaluar sus conocimientos, los lectores pueden realizar actividades de repaso: responder a un cuestionario de selección múltiple, elegir la foto correcta, poner nombre a una imagen o una mezcla de todos. En el capítulo 9 referente a Actividades 2. Preguntas de repaso, se realizaron respecto de variables aleatorias continuas y discretas. En la figura 8 podemos observar las preguntas de repaso, donde el alumno con la ayuda del mouse le pude dar un clic donde consideré que la respuesta es correcta, automáticamente se le responderá si su respuesta es correcta o incorrecta.

ISSN 2448 – 7945

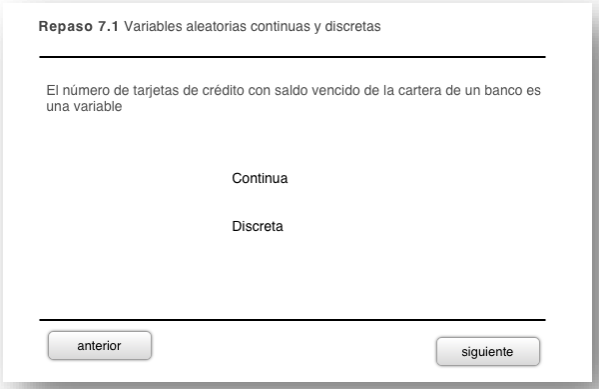


Figura 8. Preguntas de repaso

3. Conclusiones

La tecnología que se ha integrado al proceso educativo está cambiando los paradigmas de enseñanza. Esto lo podemos ver hasta en escuelas de bajo recursos. Los cambios son en términos generales, buenos. Gracias a la tecnología los libros también están cambiando la forma de enseñanza. Consideramos que el alumno al hacer uso del libro electrónico desarrollado del tema de distribuciones de probabilidad este tendrá una mejor forma de aprendizaje al considerar el libro como un material complementario para los temas del curso normal.

También se considera que al hacer uso del libro electrónico el alumno se puede enfocar a la interpretación de los resultados y a la comprensión de los temas, más que a la memorización de fórmulas; ya que con el uso de software propuesto los resultados se obtienen de una manera más rápida y el alumno se debe enfocar a la interpretación de estos con un pensamiento crítico que ayude a la toma de decisiones. También consideramos que con el apoyo de este material los alumnos mejorarán su actitud hacia las matemáticas con la finalidad de que mejore su comprensión de conceptos y pueda elegir estrategias adecuadas para la resolución de problemas.

Agradecimientos

Trabajo realizado con el apoyo del programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE101623

ISSN 2448 – 7945

4. Índice de referencias

- Anderson. D. R., (2011). Statistics for Business and Economics, México: South-Western College Pub.
- Devore, J. (2011). Probability and Statistics for Engineering and the Sciences. México: CENGAGE Learning, 8 edition
- Ellington, A. J. (2003). A meta-analysis of the effects of calculators on students' achievement and attitude levels in precollege mathematics classes. Journal for Research in Mathematics Education, 34, 433–463.
- Kuel, R. (2000). Diseño de Experimentos. México. Thomson Learning
- Gutierrez, H. (2008). Análisis y diseño de experimentos. México. McGrawHill.
- Reys, B. J., & Arbaugh, F. (2001). Clearing up the confusion over calculator use in grades K–5. Teaching Children Mathematics, 8, 90–94.

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y EL PENSAMIENTO COMPUTACIONAL DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Mejía Rodríguez Fernando[1, *]
[1]*Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México. ExRancho los Uribe, Sta. Cruz Atzcapotzaltongo, Toluca, Estado de México.*

EN-POSM012

Resumen

La ciencia informática ha experimentado un crecimiento notable en las últimas décadas, superando a otras disciplinas. Su influencia en nuestra vida diaria es cada vez más evidente, aunque a menudo no estamos conscientes de los avances en esta área. Dada esta expansión, la educación no puede permanecer ajena a estos cambios. Aunque no consideramos que la integración de la tecnología sea la única manera de mejorar el sistema educativo, sí la vemos como una alternativa viable para elevar la calidad de nuestra formación. Los docentes pueden desempeñar un papel crucial como aliados para incorporar la tecnología en el aula, siempre y cuando estén dispuestos a aceptar el desafío de fortalecer tres aspectos fundamentales: conocimientos tecnológicos, pedagógicos y de contenido. Por ejemplo de los primeros, un profesor de matemáticas puede utilizar la tecnología como una herramienta en su enseñanza, lo que puede llevar a tres posibles escenarios: una mejora en la enseñanza si se utiliza de manera efectiva y resulta significativa para los alumnos, una demora en el proceso debido al tiempo adicional necesario para diseñar e implementar actividades tecnológicas, y desventajas como distracciones de los alumnos o un enfoque excesivo en dominar la herramienta en lugar del contenido. Para desarrollar conocimientos tecnológicos, es esencial fomentar el pensamiento computacional, que consiste en una red de habilidades informáticas utilizadas para resolver problemas en diversas disciplinas. Este tipo de pensamiento se inculca en los estudiantes desde la educación básica como parte de la cultura general y no está reservado exclusivamente para los ingenieros informáticos. El objetivo de esta ponencia es analizar el pensamiento computacional de cuatro profesores de matemáticas de Toluca en la resolución de problemas. Los hallazgos apuntan a que el pensamiento computacional fortalece el pensamiento matemático de los docentes para resolver problemas.

Palabras clave: *resolución, problemas, profesores, pensamiento, computacional.*

1. Introducción

La informática ha experimentado un crecimiento más rápido que otras disciplinas científicas, a pesar de que a menudo subestimamos la frecuencia con la que la utilizamos en nuestra vida diaria (Ferragina & Luccio, 2018). La información que se genera minuto a minuto alrededor del mundo crece de manera exponencial, razón por la cual debemos ser críticos al leer mensajes del internet que pueden ser engañosos (Valera Ordaz et al., 2022).

En México, el contexto de hoy día nos señala dos asuntos a tomar en cuenta, el uso de la tecnología para las actividades cotidianas y la postura crítica que debemos tener como ciudadanos. El campo de la educación no puede permanecer aislado a dicha realidad.

¿El uso de la tecnología en el campo educativo siempre genera buenos resultados? No, esa es la conclusión de Salcines Talledo et al. (2022), quienes señalan que el

[1] * Autor para la correspondencia E-mail: fernando.mejia@isceem.edu.mx

ISSN 2448 – 7945

consumo tecnológico de los estudiantes dista de ser crítico y llega a ser una pérdida de tiempo. Entonces, la tecnología podría ayudar al proceso de enseñanza aprendizaje, pero deberá hacerse por parte de profesores que fomenten el pensamiento crítico y reflexivo (Thohir et al., 2020).

Los profesores tienen tres creencias sobre la enseñanza de las matemáticas de la mano de la tecnología: la primera, la optimista, que sugiere el beneficio que brinda la tecnología a la enseñanza; la segunda, la moderada, que reflexiona sobre el tiempo invertido necesario para implementar la tecnología en la enseñanza, que suele ser mayor; la tercera, la pesimista, que resalta las deficiencias del uso de la tecnología en la enseñanza (Thurm & Barzel, 2022).

Para los ciudadanos del siglo XXI es inevitable el elemento tecnológico en su formación, requieren fundamentos de la informática (Computer Science Teachers Association, 2017). El cúmulo de habilidades que utilizan sistemas informáticos para resolver problemas se conoce como pensamiento computacional (Taslibeyaz et al., 2020).

En esta ponencia se plantea al objetivo de analizar el pensamiento computacional de cuatro profesores de matemáticas en educación media superior al resolver problemas en una especialidad dedicada a la enseñanza de la matemática, que se llevó a cabo en el 2023 en Toluca, Estado de México.

2. Pensamiento computacional

El auge del pensamiento computacional inició en el 2013, las búsquedas en los navegadores de internet más populares registraron un pico en el 2020 (Grover, 2022). El pensamiento computacional es parte fundamental de algunos currículos nacionales en su educación básica, en países como Inglaterra, Singapur, Suecia, Finlandia y Dinamarca (Merino-Armero et al., 2021).

El primero en utilizar el término pensamiento matemático fue Papert (1996) quien lo expresó como una manera de unir ideas y usar las computadoras para resolver problemas. Funciona para aplicar el término tanto a ingenieros como no ingenieros, donde la vinculación entre el pensamiento computacional y la capacidad para resolver problemas es innegable.

El pensamiento computacional para (Grover, 2022, p. 22) es:

“una habilidad o competencia que se desarrolla con el tiempo (como ocurre con todas las habilidades) y las experiencias únicas son insuficientes. Además, el pensamiento computacional realmente no tiene un componente de "contenido" que deba enseñarse. Las habilidades se desarrollan en contexto, a través de experiencias educativas que requieren que los alumnos reconozcan la necesidad de ellas y las empleen según corresponda. Como tal, el pensamiento computacional se puede desarrollar en varios contextos de aprendizaje, tanto en aulas de las Ciencias de la Computación como en las que no lo son. Se puede enseñar a través de varios enfoques pedagógicos.”

Una parte importante del pensamiento computacional es la programación, pero “no debe restringirse definitivamente a la informática o la programación” (Li et al., 2020, p. 10). Es decir, los profesores podrán hacer uso de su pensamiento computacional para enseñar matemáticas y para resolver problemas, así como los alumnos para aprender

ISSN 2448 – 7945

matemáticas y resolver problemas; sin necesariamente, tener una formación exclusiva de la informática.

Estar dispuesto a programar requiere de tres elementos: la confianza, la persistencia y el pensamiento flexible (Hu et al., 2022). La programación tampoco es exclusiva para las matemáticas, también se podrá utilizar en otras asignaturas escolares (Vinnervik, 2022).

3. Resultados y análisis

La experiencia que compartimos es fruto de una investigación basada en el diseño que ha sido probada en contextos educativos con intervenciones tecnológicas (Anderson & Shattuck, 2012). Se diseñó una especialidad centrada en la enseñanza de la matemática dirigida a profesores de matemáticas en el nivel de educación media superior, con una duración de 240 horas, de las cuales 60 de ellas se enfocaron a la resolución de problemas matemáticos de la mano de la tecnología, sin dejar de hacer uso de la resolución clásica de lápiz y papel.

Los recursos digitales fueron varios: Excel, WolframAlpha, Photomath, GeoGebra, NetLogo, Chat GPT, Colaboratory, Python, entre otros. Los dispositivos electrónicos que llevaban los profesores eran tabletas, celulares y computadoras. Los sistemas operativos de dichos dispositivos eran Android, iOS, Windows y macOS.

Para resguardar la información personal de los profesores, utilizamos pseudónimos: Jorge, Karla, Mario y Paola. Jorge tenía 1 año de servicio y decidió ser profesor de matemáticas porque “en su secundaria en el último año no había maestro de matemáticas lo cual me causó inconvenientes al entrar a la preparatoria y decidí que nunca más alguien tuviera ese problema”. Karla contaba con 3 años como profesora de matemáticas “porque era mi última opción, yo quería ser doctora; sin embargo, ahora disfruto de la docencia”. Mario acumuló 12 años de experiencia impartiendo clases y su elección fue a temprana edad “Idea arraigada de la niñez. Fue mi primera opción de trabajo después de la Universidad”. Paola ha enseñado matemáticas por más de 18 años y en su edad escolar siempre tuvo “el agrado por la asignatura”.

Se resolvieron un total de 38 problemas en 10 sesiones. Debido al poco espacio para desarrollar aquí en la ponencia, se presenta sólo un problema que se trabajó en la especialidad con los cuatro profesores. El problema se obtuvo de un reto matemático de Escocia en 2008[2]:

En el collar de 33 perlas, en los extremos están las perlas más pequeñas y conforme se acercan al centro del collar van creciendo en tamaño y valor. La del medio es la más grande y valiosa. Las perlas están dispuestas de manera que comenzando desde un extremo, cada perla vale $100 más que la anterior, hasta [e incluyendo] la del medio; y empezando por el otro extremo, cada perla vale $150 más que la anterior, hasta la del medio. Si el valor total del collar es $65,000 ¿cuál es el valor de la perla más grande?

[2] https://josmfs.net/wordpress/wp-content/uploads/2021/07/Pearl-Necklace-Problem-210329.pdf

ISSN 2448 – 7945

El profesor Jorge empleó la inteligencia artificial con el Chat GPT en su versión 3.5 (figura 1). Desafortunadamente no entregó un resultado que resolviera el problema de forma adecuada. Las ecuaciones 1 y 4 son correctas, pero los valores de a_1 y a_2 no son los adecuados porque se parte de que valen \$100 y \$150 y no son las condiciones del problema original. Las ecuaciones 2, 3, 5 y 6 son bien ejecutadas matemáticamente hablando, pero al tener los datos a_1 y a_2 incorrectos, no se llegan a los valores esperados. La ecuación 17 llega a una contradicción, dice que \$65,000 es lo mismo que \$38,250 y eso no es posible. En la ecuación 8 se hace un cálculo que no tiene sentido y encuentra la solución incorrecta del problema.

Para resolver este problema, podemos usar la suma de una serie aritmética. Primero, determinemos el número de perlas en el collar. Sabemos que el collar tiene 33 perlas, por lo que la perla del medio está en la posición 17. Ahora, calculemos la suma de los valores de las perlas desde el extremo hasta la perla del medio. Comenzando desde el extremo con perlas de valor creciente de \$100:

$$Ecuación\ 1. \quad S_1 = \frac{n_1(a_1 + L_1)}{2}$$

Donde:
$n_1 = 17$ (el número de términos hasta la perla del medio)
$a_1 = 100$ (el primer término)
$L_1 = a_1 + (n_1 - 1)d_1$ (el último término, donde $d_1 = 100$ es la diferencia común)
Calculamos L_1:

$$Ecuación\ 2. \quad L_1 = 100 + (17 - 1) \times 100 = 100 + 16 \times 100 = 100 + 1600 = 1700$$

Luego, calculamos S_1:

$$Ecuación\ 3. \quad S_1 = \frac{17 \times (100 + 1700)}{2} = \frac{17 \times 1800}{2} = \frac{30600}{2} = 15300$$

Ahora, calculemos la suma de los valores de las perlas desde el otro extremo hasta la perla del medio. Comenzando desde el extremo con perlas de valor creciente de \$150:

$$Ecuación\ 4. \quad S_2 = \frac{n_2(a_2 + L_2)}{2}$$

Donde:
$n_2 = 17$ (el número de términos hasta la perla del medio)
$a_2 = 150$ (el primer término)
$L_2 = a_2 + (n_2 - 1)d_2$ (el último término, donde $d_2 = 150$ es la diferencia común)
Calculamos L_2:

$$Ecuación\ 5. \quad L_2 = 150 + (17 - 1) \times 150 = 150 + 16 \times 150 = 150 + 2400 = 2550$$

Luego, calculamos S_2:

$$Ecuación\ 6. \quad S_2 = \frac{17 \times (150 + 2550)}{2} = \frac{17 \times 2700}{2} = \frac{45900}{2} = 22950$$

El valor total del collar es la suma de S_1 y S_2:

$$Ecuación\ 7. \quad 65000 = S_1 + S_2 = 15300 + 22950 = 38250$$

$$Ecuación\ 8. \quad 65000 - 38250 = 26750$$

Entonces, el valor de la perla más grande es \$26,750.

Figura 1. Chat GPT

La profesora Karla elaboró una hoja de cálculo en Excel (figura 2). Para cada columna está el cálculo del valor de cada una de las 33 perlas en los renglones; de tal forma, que los primeros 17 valores van aumentando en \$100 hasta llegar a la perla central, los siguientes 16 valores van disminuyendo en \$150. Fueron 6 intentos los que realizó hasta encontrar la solución.

El primer intento está en la columna A, escribió el valor de la celda A1 como 0, los valores de A2 hasta A33 se actualizaron de forma automática. En la celda A2 está la fórmula “=A1+100”, en la celda A3 está “=A2+100”, en la A17 está “=A16+100”, en la

ISSN 2448 – 7945

A18 está “=A17-150”, en la A33 está “=A32-150”. La suma del valor de las 33 perlas está en la celda A35 que es $18,800. Se esperaba que el total fuera de $65,000; además, los valores de 6 perlas estaban como números negativos y no se llegó a la solución.

El segundo intento está en la columna B, se parte de que la perla en B1 vale $100, hay 5 perlas con valores negativos y la suma de las 33 perlas fue de $22,100. El tercer intento considera el valor de C1 como $1,000 y ya no hay valores negativos en ninguna perla, la suma es de $51,800 y se acerca más al valor esperado de $65,000.

Para el cuarto intento, se propone el valor de la celda D1 como $2,000, la suma de las 33 perlas es de $84,800; es decir, se pasó del valor esperado $65,000. Esto quiere decir que la solución está para el valor de la primera perla entre $1,000 y $2,000. Se tiene el quinto intento en la celda E1 como $1,500 y la suma de $68,300. Cada vez el objetivo está más cerca.

Para el sexto intento, se propone el valor de la celda F1 en $1,400 porque en el intento anterior se pasó del valor esperado y se intenta con un valor menor. Para esta ocasión, la suma del valor de las 33 perlas es de $65,000 que era el valor esperado. La solución del problema está en la celda F17, que es valor de la perla central, la que ocupa la posición 17 y es de $3,000.

	A	B	C	D	E	F
1	0	100	1000	2000	1500	1400
2	100	200	1100	2100	1600	1500
3	200	300	1200	2200	1700	1600
4	300	400	1300	2300	1800	1700
5	400	500	1400	2400	1900	1800
6	500	600	1500	2500	2000	1900
7	600	700	1600	2600	2100	2000
8	700	800	1700	2700	2200	2100
9	800	900	1800	2800	2300	2200
10	900	1000	1900	2900	2400	2300
11	1000	1100	2000	3000	2500	2400
12	1100	1200	2100	3100	2600	2500
13	1200	1300	2200	3200	2700	2600
14	1300	1400	2300	3300	2800	2700
15	1400	1500	2400	3400	2900	2800
16	1500	1600	2500	3500	3000	2900
17	1600	1700	2600	3600	3100	3000
18	1450	1550	2450	3450	2950	2850
19	1300	1400	2300	3300	2800	2700
20	1150	1250	2150	3150	2650	2550
21	1000	1100	2000	3000	2500	2400
22	850	950	1850	2850	2350	2250
23	700	800	1700	2700	2200	2100
24	550	650	1550	2550	2050	1950
25	400	500	1400	2400	1900	1800
26	250	350	1250	2250	1750	1650
27	100	200	1100	2100	1600	1500
28	-50	50	950	1950	1450	1350
29	-200	-100	800	1800	1300	1200
30	-350	-250	650	1650	1150	1050
31	-500	-400	500	1500	1000	900
32	-650	-550	350	1350	850	750
33	-800	-700	200	1200	700	600
34						
35	18800	22100	51800	84800	68300	65000

Figura 2. Excel

El profesor Mario escribió un algoritmo en el lenguaje de programación Python (figura 3). Las 10 líneas son el código escrito en Python, en la plataforma Colaboratory de Google. En la primer línea asigna el valor de *perla* en $2,000 porque hace la división de $^{\$65,000}/_{33}$ y lo considera como un valor cercano a 1969.696969. La variable *perla* es la perla central del collar. Se tiene un bucle que calcula la suma de las 33 perlas de las líneas 5, 6 y 7. Hay un bucle que va aumentando el valor de *perla* en una unidad desde $2,000 hasta $5,000 de las líneas 2 a la 10. Dentro del bucle, evalúa si el valor de la suma de las 33 perlas, las 16 de la izquierda más las 16 de la derecha, más la perla central; es decir la línea 8 “suma+perla” son iguales a los $65,000. En el caso de coincidir con dicha cantidad, el programa regresa el valor de *perla*. Es el número que se ve está debajo de la línea 10, después de varios cálculos, el programa entrega la solución esperada, el valor de la perla central de $3,000.

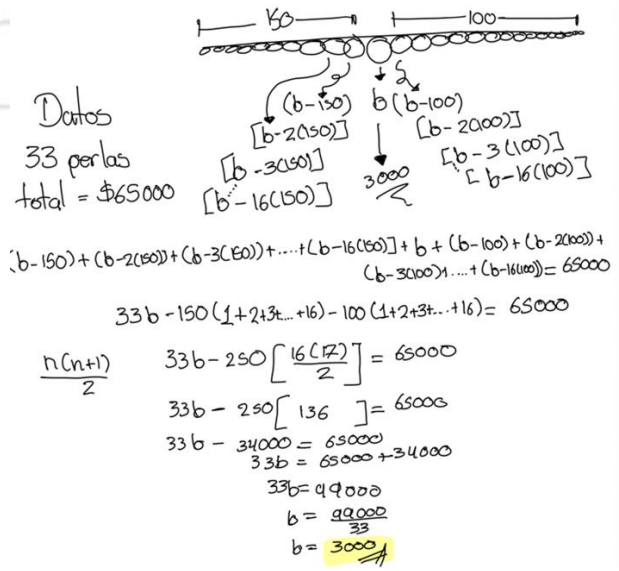
ISSN 2448 – 7945

```python
perla=2000
while perla<5000:
  k=1
  suma=0
  while k<17:
    suma=suma+(perla-100*k)+(perla-150*k)
    k=k+1
  if suma+perla==65000:
    print(perla)
  perla=perla+1
```

```
3000
```

Figura 3. Python

La profesora Paola utilizó su iPad (figura 4) donde tomaba apuntes para la especialidad y resolvió el problema planteando una ecuación. Definió como b al valor de la perla central, las perlas de la izquierda tenían que disminuir en \$150 y las de la derecha en \$100 (Ecuación 9). Factorizó dicha ecuación y le quedó la suma de los primeros 16 números enteros, que sustituyó por $\frac{(16)(17)}{2}$. Simplificó (Ecuación 10) y despejó el valor de b (Ecuación 11).



$$Ecuación\ 9.\quad (b-150)+(b-2(150))+(b-3(150))+\cdots+(b-16(150))+b+(b-100)+(b-2(100))+(b-3(100))+\cdots+(b-16(100))=65000$$

$$Ecuación\ 10.\quad 33b-34000=65000$$

$$Ecuación\ 11.\quad b=\frac{99000}{33}=3000$$

Figura 4. Ecuación de primer grado

4. Conclusiones

Apostar a que la tecnología es el único camino para mejorar el aprendizaje de las matemáticas, no es lo más adecuado. Tal como se pudo ver en la figura 1, las herramientas digitales se pueden equivocar al interpretar el problema, puede que planteen de forma incorrecta la ecuación que traduce del mundo real al matemático y no importa si la parte matemática la elaboran adecuadamente; al final, el resultado puede ser no el esperado.

Por otro lado, tal como se pudo apreciar en las figuras 2 y 3, el pensamiento computacional de los profesores para resolver un problema matemático, se manifestó de tal forma, que podemos decir que ayudó en la resolución del problema. El uso del pensamiento matemático de los profesores fue clave para poder llegar a una solución, porque en el primer caso, se pensó en una lógica de asignar valores a la perla del

ISSN 2448 – 7945

inicio del collar; para después, asignarle nuevos valores con tal de llegar a la suma que planteaba las condiciones iniciales del problema. Para el segundo caso, se parte del valor de la perla central y se calculan los demás valores; si bien es cierto, que se elaboran muchos cálculos y se podrían evitar, la computadora los efectúa en menos de un segundo.

En la especialidad que tomaron los cuatro profesores, no se le daba mayor peso a los recursos digitales; más bien, formaban parte de un portafolios que expandía las herramientas con las que contaba cada profesor para resolver problemas. La finalidad de usar las aplicaciones o el software por parte de los profesores, es de dotarlos con más artefactos que podrán utilizarlos para resolver cierto tipo de actividades.

El pensamiento computacional nos ayuda a decidir qué aplicación o software puedo usar para dividir un problema en otros más pequeños, para poder simular algunas condiciones y dejar que se hagan varios cálculos por parte de los dispositivos electrónicos; pero algo muy importante, no sustituye al profesor, ya que se requiere de una persona que pueda ir modulando un dato para afinar una respuesta.

Con las figuras 1, 2 y 3 podemos afirmar que, los recursos digitales funcionan bien para algunos tipos de problemas, pero no para todos los demás. En Python de nada sirve escribir el problema en español, porque no entiende ese lenguaje. El chat GPT entiende el español, pero no pudo resolver bien el problema. El Excel depende de fórmulas que el usuario tiene que transformar de una situación a una representación tabular, de lo contrario no podemos utilizar una hoja de cálculo.

Como se pudo apreciar en la figura 4, tampoco es necesario el uso de la tecnología para resolver el problema. Bastó con plantear una ecuación, simplificarla, despejar una incógnita y resolverla. Es decir, el uso de lápiz y papel siguen siendo los mejores aliados para el profesor de matemáticas cuando desea resolver un problema. Que se puede complementar con herramientas digitales, que podrán ayudar a tener otras representaciones que permitan ver otros ángulos del problema, que podrán ayudar a los alumnos a mejorar su pensamiento matemático porque podrán mejorar su lógica para poner en acción los planes para resolverlo.

El avance en la informática crece día a día (Ferragina & Luccio, 2018), que podemos capitalizarlo en la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, como lo señalaron Salcines Talledo et al. (2022), no podemos confiar solo en ella y pensar que no son necesario los profesores. Las herramientas digitales podrán ser usadas con moderación por parte de alumnos y profesores con un uso reflexivo y crítico (Thohir et al., 2020; Thurm & Barzel, 2022).

El pensamiento computacional (Grover, 2022) tomado como una red de habilidades informáticas para resolver problemas de distintas disciplinas, no encasilla a que el profesor de computación deba ser el único en desarrollar en los alumnos dichas habilidades, tampoco a que los ingenieros deban ser quienes las tengan.

Consideramos pertinente que los profesores de matemáticas, así como de otras disciplinas, desde educación básica, se pueda desarrollar en los alumnos el pensamiento computacional, que transforme a los jóvenes de consumidores de tecnología en desarrolladores de aplicaciones para resolver problemas en distintos contextos, de otras disciplinas. En México se puede, igual que en otros países.

ISSN 2448 – 7945

5. Referencias

Anderson, T., & Shattuck, J. (2012). Design-based research: A decade of progress in education research? *Educational Researcher*, *41*(1), 16–25. https://doi.org/10.3102/0013189X11428813

Computer Science Teachers Association. (2017). *K-12 Computer Science Standards*. CSTA. https://www.csteachers.org/page/standards

Ferragina, P., & Luccio, F. (2018). *Computational Thinking: First Algorithms, Then Code*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97940-3

Grover, S. (2022). Computational Thinking Today. In A. Yadav & U. D. Berthelsen (Eds.), *Computational Thinking in Education: A Pedagogical Perspective* (pp. 18–40). Routledge, Taylor & Francis Group. https://doi.org/10.4324/9781003102991

Hu, C. F., Lin, Y. T., Wu, C. C., & Chen, H. C. (2022). A Programming Disposition Scale for High School Students. *Educational Technology and Society*, *25*(2), 1–14.

Li, Y., Schoenfeld, A. H., diSessa, A. A., Graesser, A. C., Benson, L. C., English, L. D., & Duschl, R. A. (2020). Computational Thinking Is More about Thinking than Computing. *Journal for STEM Education Research*, *3*(1), 1–18. https://doi.org/10.1007/s41979-020-00030-2

Merino-Armero, J. M., González-Calero, J. A., & Cózar-Gutiérrez, R. (2021). Computational thinking in K-12 education. An insight through meta-analysis. *Journal of Research on Technology in Education*, 1–26. https://doi.org/10.1080/15391523.2020.1870250

Papert, S. (1996). An Exploration in the Space of Mathematics Educations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1*, 95–123. https://doi.org/10.1007/BF00191473

Salcines Talledo, I., González Fernández, N., Díaz Herrera, L., & Area Moreira, M. (2022). Smartphones en Educación Superior. Estudio cualitativo longitudinal. *Comunicar*, *72*, 115–127. https://doi.org/10.3916/C72-2022-09

Taslibeyaz, E., Kursun, E., & Karaman, S. (2020). How to Develop Computational Thinking: A Systematic Review of Empirical Studies. *Informatics in Education*, *19*(4), 701–719. https://doi.org/10.15388/INFEDU.2020.30

Thohir, M. A., Jumadi, J., & Warsono, W. (2020). Technological pedagogical content knowledge (TPACK) of pre-service science teachers: A Delphi study. *Journal of Research on Technology in Education*, *54*(1), 127–142. https://doi.org/10.1080/15391523.2020.1814908

Thurm, D., & Barzel, B. (2022). Teaching mathematics with technology: a multidimensional analysis of teacher beliefs. *Educational Studies in Mathematics*, *109*(1), 41–63. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10072-x

Valera Ordaz, L., Requema i Mora, M., Calvo, D., & López-García, G. (2022). Desenredando la desinformación: Nociones y discursos de la población española. *Comunicar*, *72*, 21–32. https://doi.org/10.3916/C72-2022-02

Vinnervik, P. (2022). Programming in School Technology Education: The shaping of a new subject content. *International Journal of Technology and Design Education*, 1–22. https://doi.org/10.1007/s10798-022-09773-y

ISSN 2448 – 7945

DISEÑO DE UN RECURSO DIGITAL PARA ENSEÑAR CÁLCULO A PARTIR DE LAS PERCEPCIONES DEL ESTUDIANTADO

Lara Sáenz Noemí Gabriela [1*],Lujambio Chávez Mariana [2] y Rivera Sánchez Dulce Gabriela [3]
Universidad Autónoma de Querétaro. Escuela de Bachilleres, Plantel Sur. Cto. Moisés Solana, zona extendida, Balaustradas, 76070

IP-POSM014

Resumen

Se presenta un avance de investigación en donde a través de un diagnóstico de intervención se reconocen las emociones, percepciones y necesidades de estudiantes de nivel bachillerato y cómo estas inciden en el aprendizaje de las matemáticas. Se busca que, a partir de las dimensiones identificadas en la investigación, se logre construir un recurso digital, específicamente un Recurso Educativo Abierto (REA) que ayude al estudiantado a apreciar el aprendizaje de las matemáticas por medio de actividades que surjan de sus intereses, incluyendo en su elaboración y diseño recursos tecnológicos, modelación matemática y el modelo STEAM como elementos medulares para el aprendizaje de las matemáticas.

Palabras clave: *Estudiantes, percepciones, recurso digital, matemáticas*

1. Introducción

Las emociones son innatas en los humanos y, en ocasiones, pueden manipularse para bien o para mal. En educación matemática las emociones son sin duda un factor importante para que los estudiantes desarrollen una buena relación con las matemáticas y puedan aprenderlas de la forma más positiva.

Estudios como el de Gómez Chacón (2002) demuestran que el éxito o el fracaso en la escuela no siempre depende de las capacidades cognitivas de los estudiantes, sino que existen factores emocionales que pueden influir en las actitudes de los estudiantes cuando aprenden matemáticas.

Por otro lado, los resultados de evaluaciones nacionales e internacionales realizadas por organizaciones como la OCDE y PISA muestran que los estudiantes en México no tienen un buen desempeño en matemáticas, y estos resultados se reflejan en el nivel educativo en el que se realizó este estudio, es decir, el nivel medio superior.

Esto significa que la alta tasa de fracaso, el bajo interés, el pánico y el estrés causados por la asignatura son visibles y, por tanto, se reflejan en el rendimiento académico. Según García-González et al. (2020) las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas son producto de su vida escolar, es decir, de lo que han experimentado y continúan

[1] * *Autor para la correspondencia. E-mail: noemi.lara@uaq.mx*

ISSN 2448 – 7945

experimentando en los cursos de matemáticas de la escuela secundaria y niveles posteriores.
De estas reflexiones surgió el interés por incluir las voces de los estudiantes en la enseñanza y el aprendizaje, para tomar en cuenta sus experiencias, ideas, percepciones, posibilidades y áreas de fortaleza como recursos para ayudar a los docentes a diseñar y desarrollar materiales de aprendizaje acorde a esas experiencias.
Así, se planteó la pregunta de investigación ¿Qué emociones identifican los estudiantes al aprender matemáticas? ¿Cómo se pueden incorporar estas necesidades en el desarrollo de materiales didácticos para que puedan aprender mejor las matemáticas?
Para dar respuesta a estas preguntas de investigación, se partió de un diagnóstico que permitió identificar en la investigación el estado inicial de los participantes involucrados en este trabajo y con ello reconocer sus intereses y necesidades a la hora de aprender matemáticas.

2. Metodología o desarrollo

Para este estudio se eligió una metodología de corte mixto. Para ello, uno de los primeros pasos fue desarrollar un diagnóstico que ayudó a identificar causas, efectos y datos relevantes para abordar la pregunta de investigación, creando con ello una matriz que analizó las categorías temáticas y su relevancia desde una perspectiva teórica del constructivismo y los intereses propios de la investigación.
Los instrumentos empleados que surgieron de esta matriz analítica fueron un texto narrado por los estudiantes y un cuestionario.
El texto narrativo para recopilar información sigue las etapas señaladas por Moriña (2016). Luego para complementar el instrumento se creó un cuestionario compuesto por preguntas abiertas y cerradas y una escala Likert desarrollada en Google Forms. Cada pregunta incluida en el cuestionario estuvo relacionada con categorías analíticas, subcategorías, indicadores, preguntas y objetivos de investigación.
Las preguntas del cuestionario se dividieron en cuatro grupos, que corresponden a: circunstancias u oportunidades de los estudiantes para aprender matemáticas, experiencia docente en el aprendizaje de las matemáticas, TIC como herramienta para el aprendizaje de las matemáticas y autoevaluación del aprendizaje.
La información cualitativa para el análisis de los datos se obtuvo del texto narrativo, y parte de la información cuantitativa quedó reflejada en los resultados del cuestionario alojado en la plataforma Google Forms.
La lógica seguida para clasificar los materiales en categorías/subcategorías es muy general comparada con la explicación que se ofrece en el texto de Echeverría Gálvez (2005).
La sistematización de los datos se elaboró en hojas de Excel, partiendo de la transcripción de las ideas centrales de los textos narrativos aportados por los estudiantes, manteniendo las frases principales para el investigador. Cada oración se dividió en oraciones pequeñas, que fueron interpretadas y asignadas a temas/subcategorías consideradas relevantes para el estudio, teniendo en cuenta las categorías a priori y subcategorías predefinidas.

ISSN 2448 – 7945

2.1 Categorías emergentes de los datos

Del análisis de los datos se obtuvo la siguiente relación de indicadores (ver Figura 1) los cuales representan la pauta para el diseño y construcción de un recurso que contemple la voz del estudiantado.

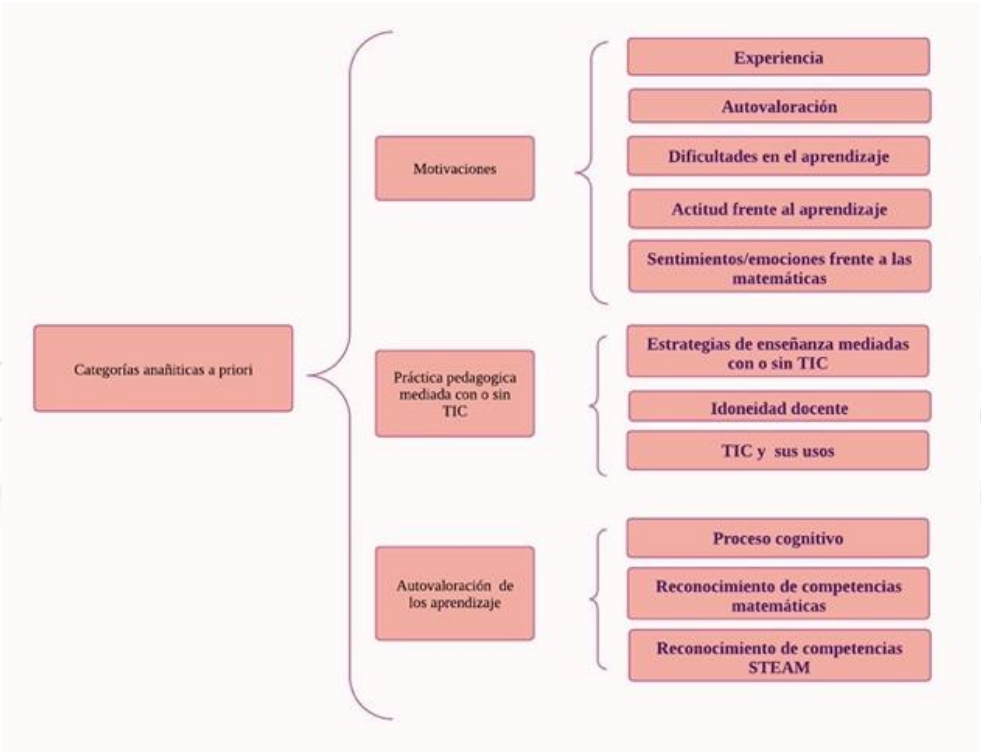


Figura 1. Categorías obtenidas del análisis de datos. Fuente propia

La motivación, práctica pedagógica mediada con o sin TIC, y la autoevaluación de los aprendizajes fue triangulada, de modo que se identificaron relaciones y con ello, se propuso un material que ayudo al estudiantado a aprender matemáticas. De manera inicial, se propuso generar un Recurso Digital donde a través de la tecnología se logró amalgamar la voz de los estudiantes y se generó una propuesta donde los estudiantes lograron trabajar de modo más interactivo, guiado, dinámico y que incluyó contenido de su interés, esto articulado bajo una metodología STEAM por su interdisciplinariedad (Yakman, 2012).

Por otro lado, se observó que la modelación matemática fue una buena estrategia didáctica que incorporó el diseño de actividades y que logró trabajarse a través de la tecnología.

3. Resultados y análisis

Para trabajar con la propuesta se consideró a la modelación matemática como estrategia didáctica ya que de acuerdo con Suárez Téllez (2014) permite desarrollar

ISSN 2448 – 7945

actividades en mayor proporción que actividades de tipo expositivo y que promueven motivaciones propias en los estudiantes. Por otro lado, para justificar el proceso de desarrollo de las actividades se siguió la propuesta de Ramírez Valdez y Soberanes Martín (2015) quienes presentan una propuesta compuesta por una serie de pasos que permiten considerar el diseño educativo, incluyendo las etapas necesarias en las que se desarrolla un proceso de adaptación e innovación para evitar errores y lograr objetivos de aprendizaje en la implementación de un recurso digital. Los pasos en el desarrollo son los siguientes:

1. Planificación y control. Se definen las etapas o tareas a incluir para determinar los objetivos de aprendizaje.
2. Tema del recurso digital. Se establece el tema que se resolverá en el área y su debido propósito.
3. Análisis. El contenido se especifica según el curso de estudio específico, es decir, módulos, materiales multimedia y evaluaciones.
4. Diseño. Se crea la interfaz.
5. Producción. Es necesario saber qué recursos multimedia se utilizarán teniendo en cuenta el proceso educativo.
6. Desarrollo. Definir cómo se creará y qué recursos estarán involucrados.
7. Implementación. Definir la estructura final del recurso digital y decidir en qué plataforma se alojará.
8. Autoría. Esto determina el tipo de licencia Creative Commons a utilizar.
9. Inspección. Análisis de la aplicación del recurso digital.
10. Comentarios. Después de la implementación y la evaluación de los recursos, identificar mejoras.
11. Evaluación de resultados. Presentación final.

Del análisis de los datos del diagnóstico, se crearon tres Módulos de trabajo para la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral. En este documento se describirá solo el primer módulo.

Para comenzar con el trabajo se diseñó un Guion Tecnopedagógico con ayuda de una diseñadora instruccional que permitió plasmar la secuencia de las actividades. En este guion se definió de manera muy general la introducción al módulo, su contenido, los objetivos de aprendizaje, los recursos propuestos y los aprendizajes esperados.

El contenido temático de este módulo se basó en tres actividades, el contexto de estas actividades fue trabajar bajo una problemática que tuviera datos reales y que fuera una problemática que tuviera significado para los estudiantes.

Por tal motivo se optó por trabajar con el tema de la pandemia generada por el COVID-19. Los datos se obtuvieron de una base de datos del gobierno mexicano y los objetivos de aprendizaje y parte de la descripción de cada actividad puede visualizarse en la Figura 2, Figura 3 y Figura 4, las cuales corresponden a cada actividad propuesta:

ISSN 2448 – 7945

Tipo de foro		Participación Señale con una X la opción que corresponda							
		Individual		Equipo					
		x							
Nombre	Actividad 1.1 "La importancia de los datos en la pandemia"								
Descripción de la actividad	Objetivo/propósito:	Analizar diferentes representaciones gráficas relacionadas con los datos obtenidos a partir de la pandemia por COVID-19 con el fin de establecer vínculos entre el cálculo y situaciones de la vida real.							
	Indicaciones	1. Revisa la siguiente página web que contiene datos oficiales acerca del impacto de la COVID-19 en México: https://datos.covid-19.conacyt.mx/#DOView 2. Explora los recursos propuestos e interactúa con los diferentes gráficos que se presentan. 3. A partir de los datos proporcionados por los diferentes gráficos, contesta la actividad seleccionando sólo una de las opciones. 4. Es importante que en las preguntas que lo soliciten compartas una fundamentación de tus respuestas de la manera más clara posible. 5. Una vez que concluyas la actividad recibirás el puntaje obtenido.							
Disponibilidad	Tiempo de participación (Fecha y hora)				Tiempo de visibilidad (Fecha y hora)				
	Inicio		Cierre		Inicio		Cierre		
	Fecha	Hora	Fecha	Hora	Fecha	Hora	Fecha	Hora	
	PERMANENTE		PERMANENTE		PERMANENTE		PERMANENTE		
Archivos permitidos	Número de archivos				Tamaño (máximo 10 MB)				
	0				10MB				

Figura 2 Actividad 1.1-Módulo 1: La importancia de los datos en la pandemia

La Figura 2 representa la actividad de introducción y el objetivo de aprendizaje fue analizar diferentes representaciones gráficas relacionadas con los datos obtenidos a partir de la pandemia por COVID-19 con el fin de establecer vínculos entre el cálculo y situaciones de la vida real.

ISSN 2448 – 7945

Tipo de foro		**Participación** Señale con una X la opción que corresponda						
		Individual		**Equipo**				
		x						
Nombre	Actividad 1.2 "Análisis de patrones de propagación de virus mediante modelos gráficos"							
Descripción de la actividad	**Objetivo/propósito:**	Analizar patrones del comportamiento de algunos virus a través de representaciones gráficas para comprender la relación entre las variables dependientes e independientes.						
	Indicaciones	1. Revisa el siguiente simulador interactivo para el análisis de datos. 2. Explora la simulación utilizando el deslizador en color azul y observa cuidadosamente qué pasa con las gráficas. Nota: Considera que cada gráfica con su respectivo color, corresponde a un virus diferente. 3. A partir de los datos contesta cada una de las preguntas. 4. Elabora un documento en donde escribas las respuestas a cada una de las preguntas, puedes incluir algunas imágenes para ejemplificar tu análisis. 5. Revisa el Instrumento de autoevaluación con el que podrás evaluarte.							
Disponibilidad	**Tiempo de participación (Fecha y hora)**				**Tiempo de visibilidad (Fecha y hora)**			
	Inicio		**Cierre**		**Inicio**		**Cierre**	
	Fecha	**Hora**	**Fecha**	**Hora**	**Fecha**	**Hora**	**Fecha**	**Hora**
	PERMANENTE		PERMANENTE		PERMANENTE		PERMANENTE	
Archivos permitidos	**Número de archivos**				**Tamaño (máximo 10 MB)**			
	1				10MB			
Instrumento de evaluación	**Incluye instrumento de evaluación (Sí /No)**				**Nombre /Detalles**			
	Sí							

Figura 3 Actividad 1.2-Módulo 1: Análisis de patrones de propagación de virus mediante modelos gráficos

La Figura 3 corresponde a la actividad 1.2, en ella el objetivo fue analizar patrones del comportamiento de algunos virus a través de representaciones gráficas para comprender la relación entre las variables dependientes e independientes.

ISSN 2448 – 7945

Tipo de foro		Participación Señale con una X la opción que corresponda							
		Individual		Equipo					
		x							
Nombre	Actividad 1.3 "Explorando el modelo SIR, un enfoque matemático para comprender la propagación de enfermedades"								
Descripción de la actividad	Objetivo/propósito:	Interpretar bajo diferentes condiciones el comportamiento de los virus para emitir recomendaciones basadas en variables.							
	Indicaciones	1. Observa la siguiente simulación didáctica que contempla el modelo SIR: https://www.geogebra.org/m/rwagnqtg 2. Para esta actividad es importante que prestes mucha atención a la curva naranja ya que ésta representa el número de infectados y por ende, son las personas que necesitan oxígeno, medicinas o acceso hospitalario. Es importante tener en cuenta que, si la curva supera la capacidad de sanidad entonces las consecuencias de esto serían muchas. 3. Para comprender mejor lo que se explica, revisa el siguiente video: https://youtu.be/T-2HX2IVJZE 4. Observa que en la simulación hay variables representadas por deslizadores y botones. Tu trabajo como investigadora será explicar los escenarios de la pandemia bajo las siguientes condiciones: 5. Luego de observar los comportamientos de las gráficas, elabora un video de 5 minutos en donde expliques tus respuestas a las preguntas que se formulan. 6. Integra en tu video una conclusión que contemple lo siguiente: a) Describe la relación de las variables para mantener la curva plana. b) Explica cómo es que la función exponencial está relacionada con las epidemias. c) Con base al trabajo realizado en la simulación emite algunas recomendaciones para evitar futuras epidemias o al menos reducir los riesgos de mortalidad. 7. Revisa el instrumento de autoevaluación con el que podrás evaluarte.							
Disponibilidad	Tiempo de participación (Fecha y hora)				Tiempo de visibilidad (Fecha y hora)				
	Inicio		Cierre		Inicio		Cierre		
	Fecha	Hora	Fecha	Hora	Fecha	Hora	Fecha	Hora	

Figura 4 Actividad 1.3-Módulo 1: Explorando el modelo SIR, un enfoque matemático para comprender la propagación de enfermedades

La Figura 4 corresponde a la actividad 1.3, el objetivo de esta actividad fue incluir los aprendizajes adquiridos en las actividades que le antecedieron para que los estudiantes fueran capaces de interpretar bajo diferentes condiciones el comportamiento de los virus para emitir recomendaciones basadas en variables.

Por otro lado, para hacer más dinámico el contenido de las actividades se incluyeron archivos multimedia que permitieron generar un espacio de acompañamiento y como guía para cada actividad propuesta. Esto permitió generar más dinamismo y hacer más atractivas las actividades.

Ejemplos de estos materiales pueden consultarse en los siguientes links:

Video de introducción: https://youtu.be/_WOoPaHgg_U

Video de cierre: https://youtu.be/NAFi90EKi7o

Cada una de estas actividades tuvo un instrumento de evaluación, donde los indicadores evaluaron algunas habilidades matemáticas.

La evaluación se llevó a cabo en dos momentos, una heteroevaluación que fue realizada por el docente responsable del grupo y otra fue la autoevaluación realizada por los mismos estudiantes.

Para emitir una calificación se consideraron ambos resultados y en todo momento, se llevó a cabo un proceso de retroalimentación que permitió al estudiantado identificar las áreas de oportunidad dentro del trabajo matemático que realizaron.

De manera general, se presenta la guía académica (ver Figura 5) que permitió orientar al estudiantado en las actividades a desarrollar.

ISSN 2448 – 7945

Traza tu ruta de aprendizaje		
Módulo 1: Los datos. Interpretación y clasificación de datos.		
Objetivo del módulo: Interpretar datos en un contexto particular a partir de diferentes representaciones gráficas.		
Tiempo estimado	¿Qué se realizará?	¿Cómo se evaluará?
3 horas	Después de revisar los datos oficiales sobre el impacto del COVID-19 en México, contesta el cuestionario dando respuestas fundamentadas.	Se evaluará con el cuestionario. Evaluación: (20/100)
6 horas	A partir de explorar el simulador interactivo, contesta las preguntas propuestas y elabora un documento en el que compartas tu análisis.	Se evaluará con rúbrica. Evaluación: (30/100)
10 horas	Observa la simulación del modelo SIR, analiza los diferentes escenarios y realiza un video con las conclusiones de tu análisis.	Se evaluará con lista de cotejo. Evaluación: (50/100)

Figura 5 Guía académica

Después de definir la propuesta de los contenidos de los módulos, se trabajó de manera coordinada con un equipo de programación que ayudó a montar el recurso digital para su aplicación. Se realizaron varias pruebas antes de su aplicación con los estudiantes y cuando se identificó que era funcional, se llevó a cabo la implementación. Cabe aclarar que el recurso digital se montó en Moodle y los estudiantes tuvieron acceso a él desde cualquier dispositivo (celular, tableta o computadora).

4. Conclusiones

Tras la aplicación del recurso digital se obtuvieron los instrumentos de evaluación y autoevaluación de los estudiantes con sus respectivas reflexiones de retroalimentación. Por ahora, la investigación procederá a sistematizar los datos obtenidos de estos instrumentos para verificar si el diseño de éstos basados en las características identificadas en el diagnóstico, cumplieron su objetivo de motivar y generar espacios que les permitieron a los estudiantes desarrollar habilidades propias de las matemáticas y de otras áreas del conocimiento.

Agradecimientos

El primer autor agradece el apoyo al Centro de Investigación en Tecnología Educativa (CITE) de la Universidad Autónoma de Querétaro, por las facilidades brindadas en la elaboración de este proyecto.

5. Índice de referencias

Libros

- Moriña, A. (2016). Investigar con historias de vida. Metodología biográfico-narrativa. Narcea (versión digital Kindle-Amazon).

ISSN 2448 – 7945

- Suárez Téllez, L. (2014). Modelación-graficación para la matemática escolar (Díaz de Santos).

Revistas

- García González, M. del S., Cortés Ortega, J., & Rodríguez Vásquez, F. M. (2020). “Aprender matemáticas es resolver problemas”: creencias de estudiantes de bachillerato acerca de las matemáticas. *IE Revista de Investigación Educativa de La REDIECH*, *11*, e726. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v11i0.726
- Gómez Chacón, I. (2002). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*.
- Ramírez Valdez, L. A., & Soberanes Martín, A. (2015). Modelo instruccional para la producción de un Recurso Educativo Abierto (REA). *Programación Matemática y Software*, *7*(1), 34–44.
- Yakman, G. (2012). Recognizing the in STEM Education. *Middle Ground*, *16*(1).

MEMORIAS DEL Congreso Internacional Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

APRENDIZAJE INVERTIDO PARA CÁLCULO DIFERENCIAL: UNA EXPERIENCIA DIDÁCTICA.

Alcántara Rosales Rodolfo G.[1, *] *y Moreno Reyes Hugo* [2]
[1]*Tecnológico de Estudios Superiores de Jilotepec. Carretera Jilotepec Chapa de Mota Km. 6.5, Ejido de Jilotepec, Mex. C.P. 54240.*
[2]*Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica. Av Universidad 282 Col. Centro Santiago de Querétaro C.P. 76000.*

ID-POSM016

Resumen

El proceso de enseñanza y aprendizaje tradicional centrado en el profesor, ha dado un giro en el que el alumno ahora debe ser un participante activo en su formación profesional, obligando a implementar nuevas metodologías didácticas, como es el caso del Aprendizaje Invertido que es un enfoque pedagógico en el que la instrucción directa se realiza fuera del aula y se utiliza el tiempo de clase para llevar a cabo actividades que impliquen el desarrollo de procesos cognitivos de mayor complejidad, en las que son necesarias la ayuda y la experiencia del docente. En este caso particular se aplicó a la asignatura de Cálculo Diferencial para alumnos de la carrera de Ingeniería Logística del Tecnológico de Estudios Superiores de Jilotepec, México. Antes de iniciar el curso, se aplicó un cuestionario de estilo de aprendizaje, lo que facilitó diseñar las actividades a lo largo del curso, las que fueron apoyadas con uso de Internet, herramientas digitales y software matemático. El trabajo individual y por equipo fueron importantes para la realimentación entre los alumnos de los conceptos vistos en cada unidad y en la resolución de ejercicios y problemas de aplicación de la derivada, lo cual permitió a los estudiantes ubicar a la asignatura en su formación profesional. Es importante considerar que los conceptos no se aprenden, se construyen siendo el alumno el que adquiere el rol protagónico mientras que el profesor es su guía a lo largo del curso. Finalmente, la flexibilidad del Aprendizaje Invertido permite utilizar diversas estrategias de evaluación enfocadas en el aprendizaje significativo.

Palabras clave: Enseñanza*, aprendizaje, metodologías, invertido, significativo.*

1. Introducción

Fue en el año 2007 cuando surge el aprendizaje invertido como una estrategia didáctica para motivar y aprovechar la curiosidad de los alumnos, de tal manera que la metodología consiste en cambiar los momentos del aprendizaje en la secuencia didáctica. De acuerdo a Zúñiga (2021) se tienen tres momentos en la educación tradicional centrada en el profesor: El primer momento es sincrónico, donde el profesor explica los conceptos, teorías e ideas del tema a través de diversas actividades, para luego, continuar con el segundo momento de aplicación y resolución de ejercicios acompañados por el profesor. Dejando para un tercer momento asincrónico las tareas de resolución de problemas con el análisis, síntesis y creación de respuestas.

1 * *Autor para la correspondencia. E-mail: roaltep@gmail.com Tel. 4271178373*

ISSN 2448 – 7945

El modelo tradicional de educación deja la comunicación de docentes y alumnos para conocer y comprender términos que podrían ser aprendidos por los estudiantes de manera autónoma, considerando sus competencias previas y de poder realizar investigación, de tal manera que, en los tiempos sincrónicos, dentro del aula y apoyados con herramientas digitales, es posible analizar, explicar y aplicar aquellos conceptos que sean de mayor grado de dificultad y aplicarlos en la solución de problemas. Las características principales del aprendizaje invertido son: a) Desarrollar el trabajo autónomo del estudiante. b) Auxiliarse de diversos recursos didácticos para el aprendizaje del estudiante. c) Desarrollar ambientes más flexibles para el aprendizaje autorregulado. d) Compartir y acompañar el proceso de aprendizaje de los estudiantes en la resolución de problemas complejos dentro del tiempo en el aula. e) Enfocarse en la reflexión metacognitiva y la autorregulación para el adecuado proceso de Aprendizaje Invertido. f) Valorar el aprendizaje social y situado para el logro del aprendizaje significativo.

Considerando la importancia de elevar el nivel de aprendizaje de las Ciencias Básicas en las carreras de Ingeniería del Tecnológico de Estudios Superiores de Jilotepec, se propone aplicar el Aprendizaje Invertido en el semestre 2023-1 para alumnos de la carrera de Ingeniería Logística en la asignatura de Cálculo Diferencial, en coordinación con el Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica, ambas instituciones pertenecientes al Tecnológico Nacional de México.

2. Metodología o desarrollo

En el caso del aprendizaje invertido, se basa en la Taxonomía de Marzano, que se muestra a continuación:

1 RECUPERACIÓN Dimensión 1. Actitudes y percepciones positivas acerca del aprendizaje. Se refiere al hecho de que, sin actitudes y percepciones positivas, los estudiantes difícilmente podrán aprender adecuadamente.
2 COMPRENSIÓN Dimensión 2. Adquisición e integración del conocimiento. Se refiere a ayudar a los estudiantes a integrar el conocimiento nuevo con el conocimiento que ya se tiene; de ahí que las estrategias instruccionales para esta dimensión están orientadas a ayudar a los estudiantes a relacionar el conocimiento nuevo con el previo.
3 ANÁLISIS Dimensión 3. Extender y refinar el conocimiento. Se refiere a que el educando añade nuevas distinciones y hace nuevas conexiones; analiza lo que ha aprendido con mayor profundidad y mayor rigor. Las actividades que comúnmente se relacionan con esta dimensión son, entre otras, comparar, clasificar y hacer inducciones y deducciones
4 APLICACIÓN Dimensión 4. Usar el conocimiento significativamente. Se relaciona, según los psicólogos cognoscitivistas, con el aprendizaje más efectivo, el cual ocurre cuando el educando es capaz de utilizar el conocimiento para realizar tareas significativas. En este modelo instruccional cinco tipos de tareas promueven el uso significativo del conocimiento.
5 METACOGNICIÓN Dimensión 5. Hábitos mentales productivos. Sin lugar a duda, una de las metas más importantes de la educación se refiere a los hábitos que usan los pensadores críticos, creativos y con autocontrol, que son los hábitos que permitirán el autoaprendizaje en el individuo en cualquier momento de su vida que lo requiera.
6. AUTORREGULACIÓN Sistema de Conciencia del Ser Está compuesta de actitudes, creencias y sentimientos que determina la motivación individual para completar determinada tarea. Los factores que contribuyen a la motivación son:
Evaluación de importancia.
Evaluación de eficacia. Evaluación de emociones.
Evaluación de la motivación.

Figura 1. Taxonomía de Marzano. Marzano, R. J. (2001).

En el semestre 2023-1 se atendió al grupo 8102 de la carrera de Ingeniería Logística para la asignatura de Cálculo Diferencial con 53 alumnos, aplicando los tres momentos del aprendizaje invertido.

ISSN 2448 – 7945

2.1 Trabajo Asíncrono

En este momento se elaboraron se crearon los materiales y recursos didácticos para que el estudiante los pueda trabajar en forma autónoma antes de la clase, apoyándose en Larson (2009) y Granville (2009) para los conceptos matemáticos. Se apoyó el curso con la plataforma classroom, colocando las unidades en secciones, donde se puso material previo, como videos, temas de consulta, contenido de la unidad, diapositivas.

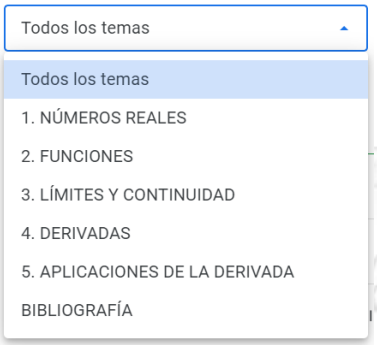


Figura 2. Unidades de la asignatura. Elaboración propia.

Aquí el alumno se ubica en el nivel uno de recuperación y el dos de comprensión

2.2 Trabajo sincrónico

Este momento se realizó en el aula, teniéndose las siguientes actividades:

1. Se resolvieron dudas y afianzó el aprendizaje de conceptos importantes.
2. Se analizaron problemáticas en la ingeniería logística y su solución con el apoyo del Cálculo Diferencial, siendo el tema de optimización el más relevante.
3. Se generaron propuestas creativas para la mejora en empaquetados de productos.

Aquí se consideró la activación de competencias previas como el álgebra y la trigonometría. También se resolvieron dudas surgidas en la realización de las prácticas respectivas, para la solución de los problemas, los alumnos expusieron sus soluciones con apoyo de diapositivas. Se destaca también el uso de software matemático como apoyo, sobre todo en la graficación.
Este momento considera los niveles tres de análisis y cuatro de utilización, de acuerdo a la Taxonomía de Marzano.

2.3 Trabajo personal o grupal.

En este momento, el estudiante reflexiona sobre la calidad de su proceso de aprendizaje, prestando atención a la dedicación puesta en el proceso y la utilidad de lo aprendido para su apoyo en las asignaturas de Ingeniería Aplicada y en lo futuro en

ISSN 2448 – 7945

el ámbito profesional. Reflexionen el valor de los conocimientos aprendidos para su carrera profesional e Identifiquen las emociones que surgen ante determinado conocimiento. Finalmente, que identifiquen su nivel de desempeño y la motivación para mejorar. Aquí nos ubicaríamos en la etapa cinco que es la metacognición y la seis que es el sistema interno, es decir se auto evalúa.

3. Análisis

Al inicio de curso, se notó que los alumnos estaban extrañados al presentar la forma en que se trabajaría el desarrollo del curso, ya que la costumbre de la enseñanza centrada en el profesor era la forma en que había transcurrido su vida académica.
Una vez explicada la metodología, para cada unidad, los alumnos atendieron la información que se envió al classroom, donde se contenía las prácticas que debería desarrollar en forma grupal y por equipo, explicando en la siguiente clase la solución propuesta explicando como se desarrolló y si se cumplía con lo que contenía la rúbrica de evaluación.
En estas actividades, se notó la falta de integración de los equipos de trabajo, ya que la dificultad de trabajar en horas extra-clase considerando que en la institución asisten estudiantes de regiones rurales o con lejanía en la región norte del Estado de México. Para superar esta circunstancia, se apoyaron con el uso de celular vía WhatsApp, medio por el cual se les dio realimentación (feedback) y para aquellos alumnos que no disponían de una computadora, se subía información del curso y no tuvieran desventaja en su aprendizaje.
Dentro de las herramientas de apoyo, se contó con el uso de software Maple para realizar las gráficas y comprobación de su desarrollo analítico. La empresa facilitó el uso de la licencia por seis meses en forma gratuita.
A continuación, se muestra un ejemplo del uso de Maple® para el cálculo del límite de la variable y(x), siendo el código el siguiente:

y: = $\sqrt{x^2 + x + 1}$ - $\sqrt{x^2 - 1}$;

lim(y); 1
x ->0

plot(y,x=-10..10);

La última instrucción, permite realizar la gráfica de la función, en este caso de un rango de x = -10 hasta 10, construyendo de forma inmediata el eje cartesiano con las divisiones respectivas para cada eje coordenado. Esto con la finalidad de que el alumno puede apreciar la función y lo que ocurre con el límite.

ISSN 2448 – 7945

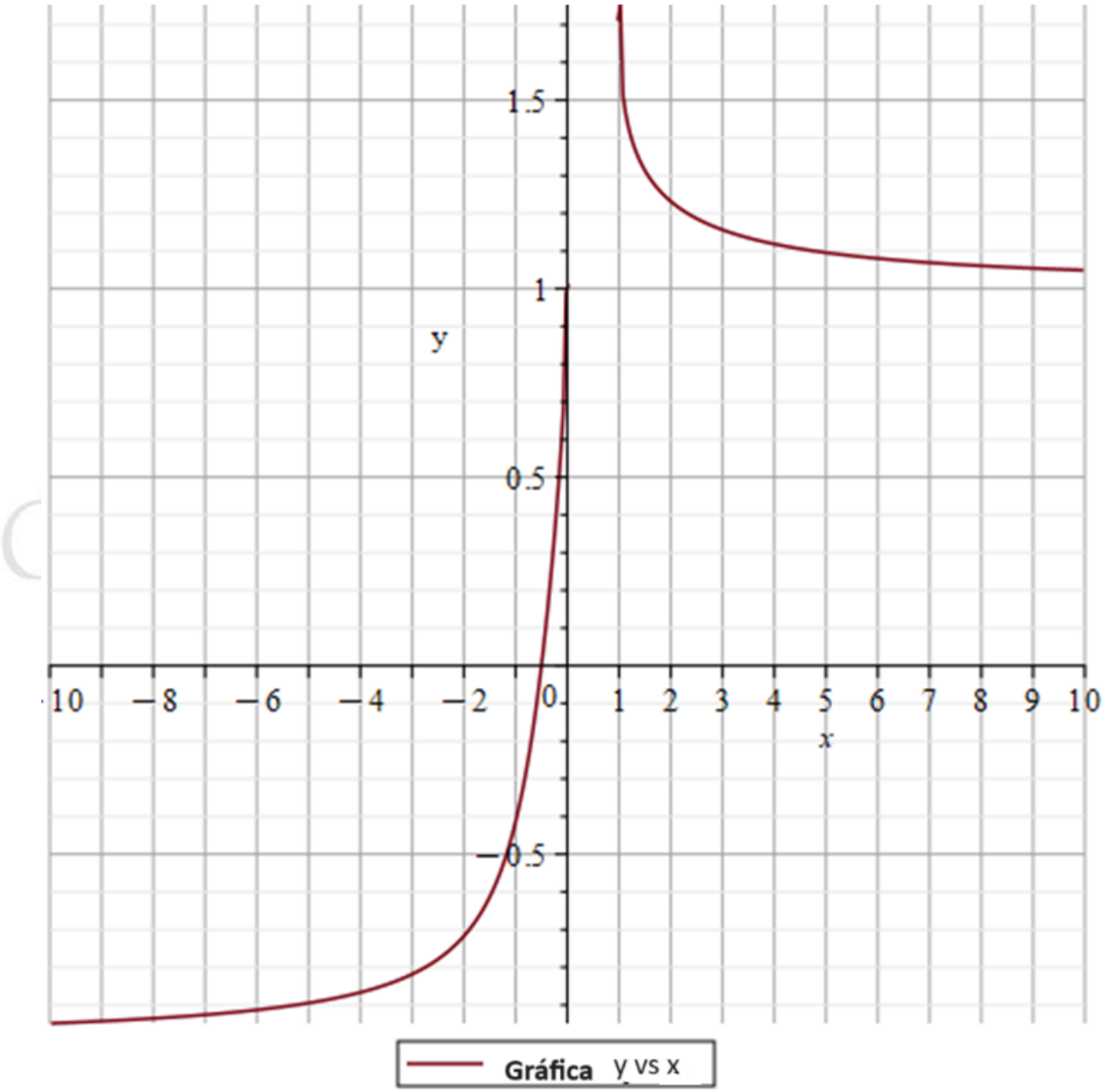


Fig. 4 Gráfica de la variable y apreciándose el límite cuando x->0.

Al final del curso, se obtuvo la acreditación de 47 alumnos y solo seis que no alcanzaron la calificación aprobatoria, teniéndose un promedio general de 85.35.

4. Conclusiones

Al evaluar la metodología aplicada a los estudiantes, destacó la importancia de que el docente explique previamente el propósito del modelo, ya que al ser un modelo estructurado que requiere de planificación docente, a partir de los objetivos cognitivos fundamentales planteados. Implica mayor trabajo para los estudiantes y los docentes,

ISSN 2448 – 7945

sobre todo al realizar la transición entre la modalidad tradicional a la invertida. El uso de herramientas digitales y teléfonos celulares permitió resolver dudas previo a la clase resultando relevante para el aprendizaje del estudiante. Bajo esta modalidad el estudiante adquiere una mayor responsabilidad, dado que debe asistir a clase preparado para involucrarse en la discusión y análisis de los temas respectivos. Para asegurar que los estudiantes hayan leído los contenidos previos a la clase, se realizaron preguntas previas como apertura de la sesión.

Es muy importante que el docente diseñe la metodología e instrumentación didáctica apropiada para lograr un mayor compromiso e interacción con los estudiantes, ya que requiere mayor tiempo de preparación previo a la clase, sin embargo, el beneficio es la simplificación de su estudio personal, además de disminuir el nivel de estrés ya que cada quien estudia a su propio ritmo disponiendo del tiempo necesario.

Agradecimientos

Agradecemos al Tecnológico de Estudios Superiores de Jilotepec y al Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica, por el apoyo recibido para realizar actividades de Investigación Educativa con el apoyo de herramientas digitales, proponiendo y generando alternativas metodológicas que mejoren el proceso de enseñanza y aprendizaje dentro del sistema del Tecnológico Nacional de México.

5. Índice de referencias

Libros

- Larson, Ron (2009) Matemáticas 1 (Cálculo Diferencial), México, McGraw-Hill.
- Granville, William A. (2009) Cálculo Diferencial e Integral, México, Editorial Limusa.

Información en línea

- Zúñiga, C. (2021). Aprendizaje Invertido. CEAT. https://ceat.url.edu.gt/pagina/aprendizaje-invertido/
- J. Moraros, A. Islam, S. Yu, R. Banow, B. Schindelka, (2015) Flipping for success: Evaluating the effectiveness of a novel teaching approach in a graduate level setting. BMC Med Educ., pp. 27 http://dx.doi.org/10.1186/s12909-015-0317-2
- Robert J. Marzano. SAGE Publications, (2001) Education 149 pages. https://books.google.com.mx/books/about/Designing_a_new_taxonomy_of_educational.html?id=9kGcAAAAMAAJ&redir_esc=y

ISSN 2448 – 7945

RALLY MATEMÁTICO, UNA ACTIVIDAD LÚDICA Y COMPLEMENTARIA AL CURRÍCULO EN EL CCH VALLEJO

Anakaren Vega Rodríguez, [*1,] Juana Castillo Padilla[2]
[1]*Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Vallejo*

AP-POSM017

Resumen

¡Las matemáticas son aburridas!, expresión que suele mencionar el alumnado de cualquier nivel académico, ya que su aprendizaje suele ser memorístico o con la simple repetición y aplicación de fórmulas sin significado, por ello se buscó implementar actividades de carácter lúdico o experimental que contribuyeran al aprendizaje y que favorecieran el razonamiento lógico, la imaginación y creatividad en búsqueda del aprendizaje significativo.

De lo anterior se propuso realizar un Rally Matemático como una opción al aire libre que permitiera a los alumnos del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Vallejo utilizar diversas habilidades y destrezas para resolver los retos y juegos ubicados en diferentes estaciones favoreciendo aspectos cognitivos y sociales de los alumnos.

El Rally Matemático busco la participación por equipos de los estudiantes inscritos en cualquier semestre donde debían ejecutar adecuadamente una serie de 8 juegos matemáticos que tenían la intención de estimular la concentración, la memoria y el razonamiento, contribuyendo en la adquisición de conocimientos, pero sobre todo incrementar el gusto por las matemáticas.

En el presente trabajo se muestran los resultados de la aplicación del Rally Matemático en el CCH Vallejo y parte de las actividades desarrolladas.

Palabras clave: *lúdica, aprendizaje, significativo.*

1. Introducción

El constante avance tecnológico impulsa a las instituciones a actualizar y modificar sus metodologías de enseñanza para formar estudiantes más competitivos, sin embargo, un alto porcentaje de alumnos presenta gran rechazo por el estudio de las matemáticas y un bajo dominio de los conocimientos básicos y por consiguiente ignoran su utilidad en diversas áreas del conocimiento, así mismo en las aulas de clase es común escuchar a los alumnos preguntar, ¿Cuál es la utilidad de las matemáticas en su vida diaria?, y al no visualizar tal conexión pierden el interés en su estudio. Por esa razón es importante generar actividades que despierten el interés

[1] * *Autor para la correspondencia. Anakaren Vega Rodríguez. E-mail: anakaren.vegach.unam.mx Tel. 5543946340*

ISSN 2448 – 7945

por las matemáticas y que les permita construir el aprendizaje por medio de retos y actividades lúdicas que lo motiven y hagan de su aprendizaje un aprendizaje significativo. El Rally de matemáticas pretende que el alumno demuestre sus habilidades aplicando los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas y así con ello prevenir la deserción en el área de matemáticas y la disminución de los índices de reprobación en las materias de matemáticas, cálculo y física.

El objetivo principal del proyecto es promover e impulsar el estudio de las matemáticas y desarrollar habilidades que permitan la solución de problemas mediante acciones que combinan lo lúdico y lo académico.

2. Metodología o desarrollo

El grupo de trabajo busca llevar a la práctica el modelo educativo del CCH, con estrategias innovadoras, que permitan realizar actividades que lleven a los alumnos a desarrollar aprendizajes significativos, iniciando con contenidos aritméticos y algebraicos en el nivel actual del alumno, es decir, con aquello que él sabe hacer sin ayuda de un experto, con la finalidad de despertar el interés y motivación por el estudio de las matemáticas.

Durante el ciclo escolar 2022-2023 se buscó implementar un Rally Matemático como una estrategia dinámica de aprendizaje con la finalidad de motivar y desarrollar habilidades y conocimientos en los alumnos del bachillerato. El Rally Matemático consistió en realizar una competencia donde los alumnos formados por equipos de cuatro integrantes resolverían una serie de juegos en los que se involucraron contenidos matemáticos propios del bachillerato.

Al respecto de lo anterior Morera y Serrano (2007) mencionan que actualmente es necesario que la población participe en actividades como los rallies, porque son un medio que ayuda a integrar la mente, el cuerpo y el espíritu.

Para llevar a cabo el Rally fue importante definir los siguientes elementos:

Coordinadores del Rally: Equipo de trabajo integrado por profesores del plantel Vallejo y profesores de la FES Cuautitlán que tuvieron la función de implementar y evaluar el Rally.

Participantes: Se busco que los alumnos del Colegio de todos los semestres se inscriban y participaran formando equipos de cuatro integrantes.

Estación: Es el lugar indicado en el plantel donde cada equipo llevo a cabo el juego, en cada estación se encontraron los docentes que dirigieron la actividad.

ISSN 2448 – 7945

2.1 Juegos Matemáticos

El rally de matemáticas es una competencia de juegos matemáticos que se lleva a cabo fuera de las aulas habituales que se utilizan para las clases cotidianas; se realiza en un circuito, en que los juegos están distribuidos en ocho puntos distantes uno de otro indicados en un mapa.



Figura 1. Convocatoria y Mapa de actividades del Rally

Es importante mencionar que está es la séptima emisión del Rally de Matemáticas donde a través de los años se tiene el compromiso de actualizar los juegos y mejorar la dinámica del Rally con nuevas propuestas de trabajo y evaluación del juego.

Para la realización del Rally los profesores coordinadores diseñaron y elaboraron un mínimo de 8 juegos que contenían los conocimientos básicos de aritmética y algebra, con la intención de que los alumnos de cualquier semestre pudieran participar. Los juegos tendrán la intención de ser manipulables generando experiencias positivas en los alumnos, favoreciendo el razonamiento lógico y la creatividad. Cada uno de los juegos debe estar constituido por las reglas de juego y su evaluación.

Los juegos que se implementarán en el séptimo Rally de Matemáticas son:

- Tangram
- Domino
- Cuadrado de Arquímedes
- Lotería Matemática
- Juego del Puerco
- Laberinto Numérico
- Comesolo
- Oca Matemática

ISSN 2448 – 7945



JUEGO DEL PUERCO.

NOMBRE DEL EQUIPO.	PUNTOS OBTENIDOS POR NÚMERO DE TIRADA DEL DADO.						TOTAL DE PUNTOS AL FINAL DEL JUEGO.	LUGAR OBTENIDO.	FIRMA LIDER DE EQUIPO.
	1	2	3	4	5	6			



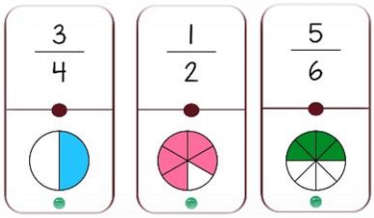


Figura 2. Algunos juegos del Rally Matemático

En el diseño de los juegos se buscó trabajar diferentes aprendizajes, por ejemplo;
Tangram: Áreas, perímetros, eje de simetría, triángulos semejantes y número de vértices.
Domino: Números racionales, potencias, radicales y fracciones equivalentes.
Cuadrado de Arquímedes: Área de un triángulo, ángulos, eje de simetría, triángulos semejantes y número de vértices.
Lotería Matemática: Personajes matemáticos, gráfica de funciones, ecuaciones de primer grado y definiciones matemáticas.
Juego del Puerco: Cálculo mental, probabilidad y combinatoria.
Comesolo: Solución de problemas, estrategias y pensamiento lógico, deducción.
Oca Matemática: Ecuaciones de primer grado, ley de signos, propiedades de los números y personajes matemáticos.
Laberinto Numérico: Números enteros, números decimales, números fraccionarios, propiedades de los números y operaciones básicas.

3. Resultados y análisis

El Rally Matemático se llevo a cabo el jueves 30 de marzo de 2023 en el Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Vallejo con el apoyo de profesores del plantel y profesores de la FES Cuautitlán.

ISSN 2448 – 7945



Figura 3. Implementación con alumnos

El Rally de matemáticas conto con el registro de 751 alumnos participantes distribuidos en 167 equipos.

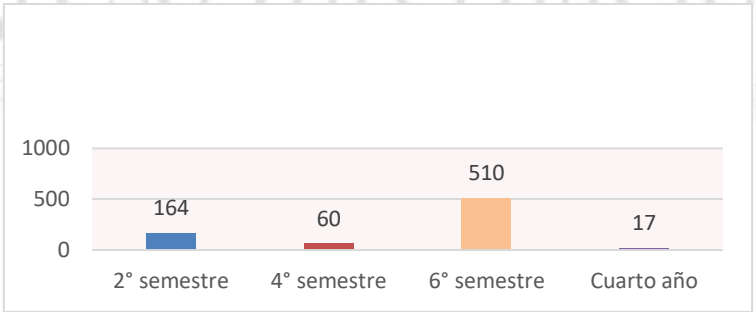


Figura 4. Registro de alumnos participantes

Los equipos participaron en los 8 módulos acumulando puntos en la competencia para finalmente tener a los tres equipos ganadores de la competencia.



Figura 5. Premiación de participación

ISSN 2448 – 7945

Al concluir el Rally se puede observar algunas dificultades de los alumnos al realizar operaciones aritméticas y operaciones algebraicas, en general los conceptos los trabajan de forma adecuada o bien los recuerdan al ser mencionados.

4. Conclusiones

Diversos estudios han demostrado que buscar estrategias que despierten el interés y la motivación por el estudio de las matemáticas permite a los alumnos hacer de su aprendizaje un aprendizaje significativo y más aún cuando estas actividades estimulan la concentración, la memoria, el razonamiento lógico matemático, la toma de decisiones y la resolución de problemas.

El grupo de trabajo considera que el rally de matemáticas es una actividad que consigue cambiar la idea de que las matemáticas son aburridas y que permite reforzar los aprendizajes y en muchos de los casos consigue reflexionar sobre las dificultades que el alumno presenta a lo largo del bachillerato.

5. Índice de referencias

Libros

Morera, M y Serrano, A. (2007). Rally… naturaleza, recreación y salud. Revista MHSalud, 1(4), 1-7.

ISSN 2448 – 7945

LA IMPORTANCIA DE LA SIMULACIÓN Y MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA EXPERIMENTAL

Juan Jesús Vivas Castro[11], Wilbert De Jesús López [2]
[1,2]*Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Vallejo. Av. 100 Metros Esq. Fortuna, Magdalena de las Salinas, Gustavo A. Madero, C.P. 07760, Cuidad de México.*

AP-POSM019

Resumen

En este trabajo se presenta la aplicación de la simulación y modelación matemática para el diseño de actividades experimentales con estudiantes de bachillerato que cursan la asignatura de Física III en la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades (ENCCH). El problema se limita a estudiar la variación del momento de inercia con respecto a la distribución de masa de un sistema rotativo que desciende sobre un plano inclinado. La simulación y modelación se llevó a cabo con Excel, mientras que para el trabajo experimental se implementaron las TIC, en particular, el uso de video en cámara lenta, así como el software video tracker para la toma, análisis e interpretación de datos experimentales. Esta propuesta de enseñanza permitirá a los alumnos desarrollar su autonomía intelectual en ambientes presenciales, virtuales e híbridos, ya que se utilizan materiales accesibles y de bajo costo, así como softwares de uso libre como los mencionados anteriormente. Además, dicho trabajo puede contribuir a la actualización de los Programas de Estudio de la asignatura de Física III que se está llevando a cabo en el presente año en la ENCCH, así como proporcionar a los docentes recursos didácticos tecnológicos innovadores para mejorar los procesos de enseñanza y dar frente a la transformación digital educativa acelerada debida por eventualidades como la ocurrida por la contingencia sanitaria causada por el COVID-19.

Palabras clave: *simulación y modelación matemática, experimentos de Física, video análisis, video tracker, TIC.*

1. Introducción

La simulación y modelación matemática proporcionan una plataforma para la exploración teórica y la verificación anticipada de hipótesis, así como el diseño y construcción de prototipos experimentales que involucra utilizar modelos matemáticos para simular condiciones específicas, lo que permitirá verificar la validez de teorías antes de llevar a cabo experimentos. Esta herramienta se ha vuelto crucial en la investigación experimental, proporcionando una perspectiva adicional y una comprensión más profunda de los resultados obtenidos en el laboratorio. Sin embargo, la integración de la simulación y modelación matemática en la Física Experimental no significa restar importancia a los experimentos prácticos. Más bien, ambas disciplinas se complementan y fortalecen mutuamente (*Benítez & Moreno,2022; Fernández & Martín, 2023*).

[1] *Autor para la correspondencia. E-mail: JUANQUICO-MAN@HOTMAIL.COM

ISSN 2448 – 7945

Por tanto, en este trabajo se propone una actividad en donde alumnos del quinto semestre que cursan la asignatura de Física III de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades (ENCCH), tendrán la oportunidad de resolver problematicas que involucren la simulación y modelación matemática en una investigación de corte experimental.

El problema se límita al estudio de la variación del momento de inercia con respecto a la distribución de masa. Para ello se realiza un estudio dinámico del descenso de un disco sobre un plano inclinado, ver Fig. 1. El objetivo es encontrar un modelo fisicomatemático para determinar la aceleración de descenso del disco.

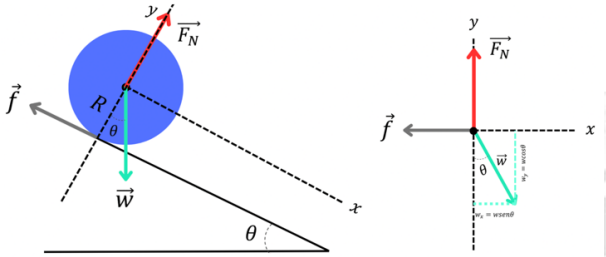


Fig. 1. Esquema de la situación problematica. Identificación de las fuerzas que actuan sobre un disco rodante sobre un plano inclinado, así como su representacción en un diagrama de cuerpo libre.

En primer instancia se identifican las fuerzas que actúan sobre el disco: 1) su peso, $\vec{w}$, que se dirige hacia en centro de la Tierra; 2) la fuerza normal, $\overrightarrow{F_N}$, la cual es perpendicular a la superficie del plano inclinado y 3) la fuerza de fricción, $\vec{f}$, que se dirige en el sentido contrario del movimiento y es paralela al plano inclinado.

Aplicando la segunda ley de Newton (*Resnick, Holliday & Krane, 2007; Giancoli, 2006*) en su forma traslacional en ambas componentes, tomando en cuenta el sistema de referencia (plano cartesiano *xy,* ver lado derecho de la Fig.1), se obtiene:

En la componente *x* :

$$w_x - f = M_T a \qquad (1)$$

Mientras que la sumatoria de las fuerza en la componente *y* :

$$F_N - w_y = 0 \qquad (2)$$

Por otra parte, existe una relación entre la fuerza de fricción y la fuerza normal, la cual viene dada por:

$$f = \mu F_N \qquad (3)$$

donde, μ, es el coeficiente de fricción.

ISSN 2448 – 7945

De las Ec. (1), (2) y (3) y sustituyendo las componentes del vector peso, ver Fig. 1, se puede demostrar que la aceleración lineal del disco viene dada por:

$$a = g(sen\theta - \mu cos\theta) \qquad (4)$$

Con la finalidad de que la expresión para la aceleración no dependa de μ se aplica la segunda ley de Newton en su forma rotacional (*Wilson, Buffa, & Lou, 2007*), en donde se tomará en cuenta el centro de masa del disco como eje de rotación, entonces en este caso la unica fuerza que realiza una torca para que el disco pueda rodar es la fuerza de fricción, ya que las lineas de acción de fuerza del peso y de la fuerza normal pasan por eje seleccionado, por tal motivo:

$$\sum \tau = fR = I_T \alpha \qquad (5)$$

Donde, R es el radio del disco, que en este caso realiza la función del brazo de palanca, I_T, es el momento de inercia total del sistema y α la aceleración angular. Tomando en cuenta que la aceleración angular se relaciona con la aceleración lineal por medio del radio ($a = R\alpha$) y que la fuerza normal es la componente vertical del peso, ver Ec. (2), entonces la Ec. (5) se puede escribir como:

$$(\mu M_T g cos\theta)R = I_T \frac{a}{R} \qquad (6)$$

Por tanto, de la Ec. (6) y (4) se puede demostrar que la aceleración del sistema esta dado por:

$$a = \frac{gsen\theta}{1 + \frac{I_T}{M_T R^2}} \qquad (7)$$

En esta última expresión se puede observar que la aceleración depende del momento de inercia del sistema, el cual esta en función de como se distribuye la masa alrededor de un eje de rotación (*Tippens, 2011*). Entonces surge la pregunta ¿Como diseñar y construir un prototipo experimental para verificar el modelo descrito en la Ec. (7)?.

2. Metodología o desarrollo

2.1. Diseño del prototipo experimental

Para poder variar la distribución de masa en el sitema discutido anteriormente, se propone la unión de dos discos por medio de cuatro cilindros de PVC que se puedan fijar a diferentes distancias del eje de rotación, ver Fig. 2.

ISSN 2448 – 7945



Fig. 2. Propuesta del prototipo experimental para estudiar la variación del momento de inercia con respecto a la distribución de masa.

Teniendo en cuenta lo anterior, el momento de inercia total del sistema vendra dado por:

$$I_T = I_D + I_C \qquad (8)$$

que representa la suma del momento de inercia de los discos, I_D, y los cilindros, I_C.

En el caso de los discos se obtiene:

$$I_D = 2\left(\frac{1}{2}M_D R^2\right) \qquad (9)$$

En donde M_D es la masa de los discos y R su radio.

Mientras que para los cilindros:

$$I_C = 4\left(\frac{1}{2}M_C r^2\right) + 4M_C h^2 \qquad (10)$$

Con M_C la masa de los discos y r su radio. Además se ha utilizado el teorema de los ejes paralelos, en el cual la variable h, representa la distancia de los cilindros al aje de rotación, que se considero como el centro de masa de los discos.

Con el objetivo de simplificar los calculos, sea:

$$A = 2\left(\frac{1}{2}M_D R^2\right) + 4\left(\frac{1}{2}M_C r^2\right) \qquad (11)$$

$$B = 4M_C \qquad (12)$$

$$C = M_T R^2 = (2M_D + 4M_C)R^2 \qquad (13)$$

Por tanto, la Ec. (7) se puede reescribir como:

ISSN 2448 – 7945

$$a = \frac{gsen\theta}{1 + \frac{A}{C} + \frac{B}{C}h^2} \qquad (14)$$

En este caso, se observa que al mantener constante la masa y radio de los discos y cilindros, así como el ángulo de inclinación, la variable independiente será efectivamente el valor de h. Esto permite la oportunidad de estudiar la variación de la aceleración en función de cómo se distribuye la masa alrededor de un eje de rotación. No obstante, antes de llevar a cabo la experimentación, es necesario realizar una simulación y modelación de la situación problemática con la intención de determinar si es viable contrastar el modelo teórico mediante la experimentación.

2.2. Simulación y modelación de la situación problematica

La simulación y modelación del problema se realizo en una hoja de Excel, ver Fig. 3.

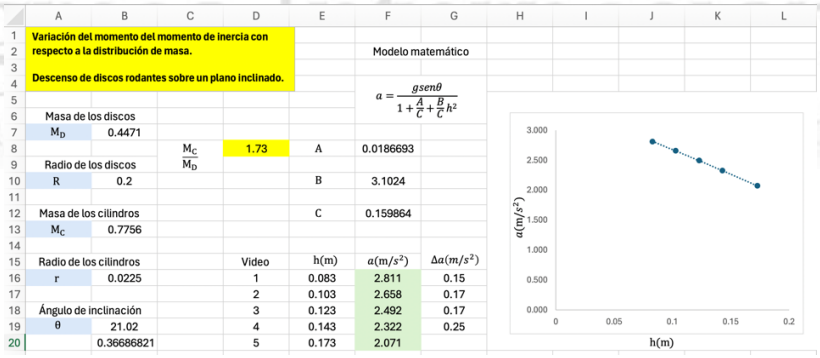


Fig.3. Modelación matemática para el cálculo de la aceleración de la rodadura de un par de discos en función de la distribución de masa con respecto al eje de rotación, h.

Después de realizar diferentes pruebas en la simulación y modelación, se observó que la relación entre la masa de los discos con respecto a la de los cilindros es el factor determinante para notar una diferencia apreciable entre los valores de las aceleraciones y que se pueda medir experimentalmente. Por supuesto, la distancia en la posición de los cilindros también es un factor relevante; sin embargo, al llevar a cabo la experimentación, resulta complicado conseguir discos con un radio relativamente grande en donde se pueda variar las distancias h. Teniendo en cuenta los resultados de la simulación y modelación se recurrio al diseño y construcción del prototipo experimental.

2.3. Diseño y construcción del prototipo experimental

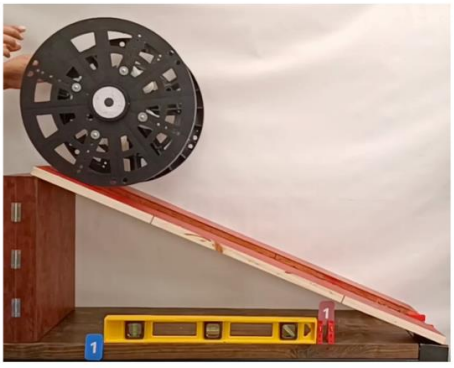
Para la construcción de los cilindros, se introdujeron 5 balines metálicos con una masa de 129.2 g cada uno dentro de los cilindros. La decisión de usar los balines fue para que la masa de los cilindros fuera mayor a la de los discos. La masa promedio fue de los cilindros fue de $M_C = 775.6\ g$.

ISSN 2448 – 7945

Por otra parte, se decidió utilizar discos de plástico, aquellos que se utilizan comúnmente para enrollar cable. La masa promedio fue de $M_D = 447.1\ g$; con un radio de $R = 20\ cm$, para ambos discos. El prototipo experimental ya terminado se muestra en la Fig.2.

2.4. Experimentación

Se utilizó una banca como base del plano inclinado, que se niveló a la superficie del suelo con la ayuda de un nivel de burbuja. El ángulo de inclinación fue de 21.02°.Cabe resaltar que se colocaron dos marcas con un plumón separadas 50 cm entre ellas, las cuales sirvieron como referencia para el análisis de los videos. En este sentido, se tomaron videos en cámara lenta del movimiento de rodadura de los discos a 240 fps (fotogramas por segundo) con una resolución de 720p. Los videos se procesaron con el programa *video tracker* para obtener valores de posición con respecto al tiempo y posteriormente obtener de manera experimental de la aceleración de descenso. En la Fig. 4 se muestra el montaje experimental. En el lado derecho se comparten códigos QR que presenta un ejemplo de los videos experimentales, así como su análisis en *video tracker.*



Ejemplo del descenso de los videos experimentales

Ejemplo del análisis de los videos con el programa video tracker

Fig.4. Montaje experimental del sistema. En el lado derecho se pueden escanear los códigos QR para la visualización de un ejemplo de los videos experimentales, así como su procesamiento en el programa video tracker para la obtención de datos de posición con respecto al tiempo del centro de masa del prototipo experimental.

3. Resultados y análisis

Con la finalidad de tener una confiabilidad estadistica se realizaron 10 repeticiones para cada variación de h. Se determinó el valor experimental de la aceleración realizando un ajuste por el método de mínimos cuadrados de los datos a una función cuadratica e interpretando los coeficientes con la ecuación que describe un Movimiento Rectilineo Uniformemente Acelerado (MRUA). Posteriormente, se cálculo un promedio para las aceleraciones, así como su respectiva desviación estandar. En la Tabla 1 se muestran los resultados.

ISSN 2448 – 7945

Tabla 1. Resultados de la aceleración promedio correspondiente a cada valor de h, ver columna verde. En las columnas naranja se muestra el cálculo de la desviación estandar. En la última columna se presenta el valor promedio de los errores porcentuales.

$\mathbf{h \pm 0.001(m)}$	$a_{teo}(m/s^2)$	$\overline{a}_{exp}(m/s^2)$	$\delta_{\overline{a}_{exp}}(m/s^2)$	$\overline{a_{exp}} \pm \delta_{\overline{a}_{exp}}(m/s^2)$	$\bar{\varepsilon}(\%)$
0.083	2.81	2.67	0.04	[2.63,2.71]	7.13
0.103	2.66	2.48	0.05	[2.43,2.53]	4.14
0.123	2.49	2.32	0.04	[2.28,2.36]	7.69
0.143	2.32	2.16	0.05	[2.11,2.21]	7.42
0.173	2.07	1.97	0.08	[1.89,2.05]	3.53

De los resultados, se puede observar que la aceleración de los discos disminuye a medida que los cilindros se alejan del eje de rotación. Este patrón es congruente con el modelo descrito en la Ec. (7), ya que la aceleración depende de manera inversa a la distancia h. Esto se relaciona con el momento de inercia, por ejemplo, al sustituir los valores numéricos h en la Ec. (8), se puede apreciar el momento de inercia incrementa.

Por tanto, cuando los discos se alejan del eje de rotación, experimentan una mayor resistencia al girar, lo que resulta en un momento de inercia mayor y, en consecuencia, en una aceleración menor. Este resultado también puede ilustrarse con el ejemplo de la rutina de una patinadora sobre hielo: su velocidad angular aumenta cuando contrae sus brazos y disminuye cuando los extiende.

Por otra parte, la variación de la aceleración experimental en relación con la distancia de los cilindros al eje de rotación se ilustra en la Fig. 5 (ver puntos en color negro con sus respectivas incertidumbres). La curva en color azul representa la gráfica del modelo teórico obtenido a partir de la Ec. (14), donde se aprecia un comportamiento potencial entre la aceleración y la distancia h. Se decidió gráficar valores extremos de h, ya que aparentemente se observaba un comportamiento lineal de los datos experimentales, debido a las condiciones experimentales en este trabajo. Sin embargo, se puede notar que los resultados se ajustan al modelo teórico.

Durante las pruebas experimentales y análisis realizado se detectaron las siguientes posibles causas de error (ver última columna de la Tabla 1): 1) Al momento de tomar los videos existe un error de paralaje, que existe a pesar de haber alineado lo mejor que se pudo la cámara al plano del movimiento de los discos rodantes; 2) Se observó que la trayectoria no era completamente rectilínea. A pesar de que la superficie de las tablas se hizo lo más lisa posible, se notaron pequeñas desviaciones que podrían ser causa de errores. Es importante mencionar que se consideró la posibilidad de añadir algunos rieles o guías para abordar este problema. No obstante, se tiene que evaluar cómo afectaría la fuerza de fricción entre la superficie de los discos y los rieles.

ISSN 2448 – 7945

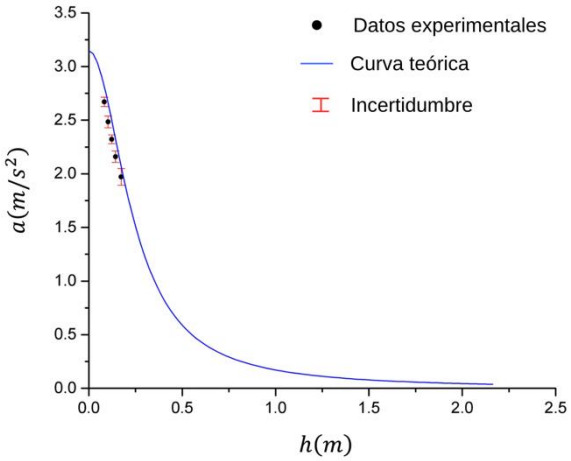


Fig. 5. Contrastación de las aceleraciones experimentales con respecto al modelo teórico.

4. Conclusiones

En este trabajo, se logró llevar a cabo un estudio sobre la variación del momento de inercia en relación con la distribución de masa. Con este propósito, se propuso un prototipo experimental que brinda a los alumnos la oportunidad de abordar la problemática a través de la simulación, modelación y experimentación. Esto, a su vez, facilitará el desarrollo de diversas habilidades conceptuales, procedimentales y actitudinales en los estudiantes.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo para realizar este trabajo a la Universidad Autonoma de México por medio del proyecto Iniciativa para Fortalecer la Carrera Académica en el Bachillerato INFOCAB-PB101023.

5. Índice de referencias

- Benítez, J. C., & Moreno, J. A. (2022). *Modelización y simulación en la enseñanza de la física: Una revisión de la literatura*. Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 19(3), 3001-3020.
- Fernández, J. L., & Martín, J. A. (2023). *La modelización y simulación como herramientas para la investigación en física*. Revista de Física, 17(1), 1-10.
- Giancoli,D.C. (2006). Física, principios con aplicaciones (6 ed.), México: Pearson.
- Resnick R, Holliday D, Krane, K.S. (2007). Física cuarta edición en español volumen 2. México: Patria.
- Tippens, Paul E. (2011). Física, conceptos y aplicaciones. séptima edición. México: McGraw Hill.
- Wilson, J., Buffa, A. y Lou, B. (2007). Física. sexta edición. México: Pearson Educación.

ISSN 2448 – 7945

IMPACTO DE LA EVALUACIÓN FORMATIVA EN ESTUDIANTES

Rigaud Téllez Nelly[1], Blanco Bautista Roberto[2], López Salazar Leonel Gualberto [3]
[1,2] *Facultad de Estudios Superiores Aragón- UNAM. Av. Hacienda de Rancho Seco S/N, Impulsora Popular Avícola, 57130 Nezahualcóyotl, Méx.*
[3]*Teoloyucan Km 2.5, San Sebastián Xhala, 54714 Cuautitlán Izcalli, Méx.*

ID-POSM021

Resumen

Considerando que la evaluación formativa enfatiza el proceso de retroalimentación del aprendizaje, como un medio que proporciona información para modificar interacciones entre docentes, tecnología y estudiantes, mediante actividades de enseñanza y aprendizaje, un tema que aún no ha sido explorado con suficiente profundidad, se encuentra en saber cómo estudiantes de licenciatura utilizan pruebas (tests) formativas en línea y sus impactos en el aprendizaje. El objetivo se orienta al impacto, esto es, generar una estructura que permita clasificar y analizar cómo se aprovecha este tipo de recursos en clase y fuera de ella, y cómo esto se relaciona con estrategias de aprendizaje. Esta intención se encuentra en el entorno de un proyecto de innovación y mejora a la educación para la asignatura de Álgebra Lineal. Se emplea como marco teórico, la autorregulación del aprendizaje. Los autores generaron el diseño de la estructura que, posteriormente, fue validado por tres especialistas. En una etapa piloto, participaron 17 estudiantes que realizaron pruebas de temas de Álgebra Lineal según su programa de estudio. Los resultados muestran que los alumnos emplean las pruebas formativas para una variedad de propósitos, incluyendo la planificación de su aprendizaje y la profundización de su comprensión del contenido del curso. A partir de los resultados, se sugieren recomendaciones en cómo diseñar pruebas, y en proporcionar una adecuada retroalimentación.

Palabras clave: *Evaluación formativa, Álgebra Lineal, autorregulación, aprendizaje.*

1. Introducción

Las pruebas o *tests* son un medio generalizado para la evaluación formativa en matemáticas de licenciatura. La evaluación formativa se emplea por docentes y estudiantes para proporcionar retroalimentación y ajustar el proceso de enseñanza aprendizaje, con el fin de mejorar el logro de resultados de aprendizaje previstos.

Por “pruebas” se refiere a un conjunto de preguntas que deben responder los estudiantes, y luego recibir comentarios que, independiente de la modalidad manual o automática, en el marco de evaluación formativa, se orienta al desarrollo para mejorar el aprendizaje a lo largo del proceso educativo (Lui & Andrade, 2021).

Las preguntas pueden solicitar a estudiantes que seleccionen una respuesta entre las opciones proporcionadas o que den una respuesta corta como un número, palabra, frase u oración. Los instructores implementan tales cuestionarios por varias razones, por ejemplo, ayudar a estudiantes a tomar conciencia de sus

[1] *Autor para la correspondencia. E-mail:* nerigaud@unam.mx

ISSN 2448 – 7945

habilidades y la comprensión adquirida durante el semestre, o pueden fomentar un compromiso activo con el contenido. Las pruebas electrónicas, del tipo de formas de Google pueden tener ventajas adicionales, tal es el caso de proporcionar a estudiantes comentarios individuales al instante, además de mejorar la eficiencia con respecto a una calificación manual, o, incluso permitir intentos repetidos.

Para determinar el impacto de las pruebas, estas dependen en gran medida de cómo los usan realmente los estudiantes, lo cual es un tema poco explorado. Con el fin de comprender mejor a la evaluación formativa, en esta experiencia educativa se buscó en saber cómo los estudiantes emplean pruebas formativas obligatorias y optativas de un curso de matemáticas para su aprendizaje.

Esta orientación es de utilidad para docentes y diseñadores instruccionales al tener mayor claridad en diseñar y utilizar pruebas obligatorias y optativas de manera efectiva para mejorar el aprendizaje de estudiantes en, este caso, para matemáticas en ingeniería.

El objetivo del estudio es examinar cómo los estudiantes emplean pruebas en sus actividades de estudio y fuera de esta y cómo se pueden integrar con estrategias de aprendizaje. Se trabaja con la asignatura de Álgebra Lineal, por ser una asignatura integradora de Álgebra y Geometría Analítica, además de ser considerada de alta complejidad por la abstracción que existe en sus contenidos (axiomatización), al mismo tiempo, por contener procesos de solución de problemas reales. En el experimento participaron 17 estudiantes de las carreras de Ingeniería Industrial, Ingeniería Eléctrica- Electrónica e Ingeniería Mecánica de una universidad pública y validaron tres especialistas.

Se identificó el marco teórico de Pintrich, Smith, Garcia y Mckeachie (1993), para evaluar de manera particular el uso de estrategias de aprendizaje por parte de estudiantes universitarios. Con ello, se genera una estructura constituida de indicadores para distinguir aspectos cognitivos, metacognitivos y de gestión de recursos.

2. Metodología o desarrollo

2.1 Marco teórico

A continuación, la figura 1 representa un modelo que muestra la relación entre la evaluación formativa y la sumativa en el proceso educativo (Panadero & Lipnevich, 2022). En este esquema, se destaca la importancia de utilizar la evidencia recopilada durante la evaluación formativa para coadyuvar en decisiones de evaluación sumativa (Black & Wiliam, 2009).

ISSN 2448 – 7945

Asimismo, se observa un ciclo de evaluación formativa que incluye la recopilación de datos sobre el progreso de estudiantes, la interpretación de esta evidencia para identificar fortalezas y áreas de mejora, y la retroalimentación proporcionada a estudiantes y docentes para ajustar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Esta evaluación formativa continua se representa como un ciclo que se repite a lo largo del proceso educativo (Figura 1).



Figura 1. Proceso de evaluación para propósitos sumativos y formativos

En este sentido, se identificó el marco generado por Pintrich, Smith, García y McKeachie (1993) el cual funciona como un soporte para la generación de evidencias, esto es, estrategias para lograr el éxito académico, a través del uso y motivaciones que tienen los estudiantes hacia las pruebas, en un curso académico. Con ello, se resalta la idea de que la evaluación formativa y sumativa están interconectadas, y que la información obtenida durante la evaluación formativa puede influir en las decisiones de evaluación sumativa.

La tabla 1 proporciona una estructura detallada de las categorías de estrategias cognitivas, metacognitivas y de gestión de recursos para analizar respuestas de los estudiantes en relación con el uso de pruebas durante un curso de Álgebra Lineal.

2.2 Metodología

Uno de los desafíos principales que enfrentan los estudiantes al pasar de un semestre a otro en la licenciatura en ingeniería es su nivel de competencia en matemáticas, el cual suele ser básico y a menudo insuficiente para satisfacer las demandas de las carreras de ingeniería en cualquiera de sus áreas.

En este contexto, el enfoque se centra particularmente en el curso de Álgebra Lineal y en la obtención de evidencia formativa sobre el dominio del conocimiento y el

ISSN 2448 – 7945

desarrollo de habilidades en esta área específica. Con este propósito, basado en un plan de curso de Álgebra Lineal para una carrera de ingeniería, se identifica los temas más relevantes para su aplicación (sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes, espacios vectoriales, espacios con producto interno, transformaciones lineales y operadores en espacios con producto interno), tanto en asignaturas matemáticas subsiguientes, como en contextos de ingeniería aplicada.

Tabla 1. Adaptación de estrategias de aprendizaje considerando pruebas conforme el marco de Pintrich, Smith, Garcia y Mckeachie (1993)

Escala de estrategias cognitivas	Repaso (Re): Uso de pruebas o sus soluciones para revisar, consolidar, memorizar o practicar.
	Elaboración (El1): Comprensión de soluciones presentadas o sus propios errores, o conectan las soluciones con sus propias respuestas. (El2): Reflexión en justificaciones sobre por qué ciertas opciones de respuesta son correctas o incorrectas. (El3): Búsqueda de una comprensión más profunda de conceptos cubiertos en pruebas.
	Organización (Org): Subrayado, marcas o anotaciones a ciertas preguntas, soluciones o afirmaciones identificadas en las pruebas.
	Pensamiento crítico (PC): cuestionamiento y argumento sobre la veracidad de un concepto.
Escala de estrategias de regulación metacognitiva	Monitoreo (Mon): Verificación de comprensión o conocimiento cuando se usan las pruebas.
	Regulación (Reg): Ajuste al enfoque de estudio o estrategias en función de los resultados en las pruebas.
Escala de estrategias para la gestión de recursos	Tiempo para el estudio (Tm1): Organización del tiempo de estudio utilizado en pruebas. (Tm2): Adaptación del entorno para realizar las pruebas.
	Búsqueda de ayuda (Ba1): Mención de dificultad con el contenido de las pruebas, pero no se solicita ayuda. (Ba2): Mención de búsqueda de ayuda externa para abordar las pruebas.

Se invitó a un grupo de 17 de alumnos de las carreras de Ingeniería Industrial, Ingeniería Eléctrica- Electrónica e Ingeniería Mecánica a participar en estos cursos especiales de Álgebra Lineal. Cada tema del curso se abordó mediante una serie de lecciones que incluyeron una introducción al tema, su desarrollo y conclusiones

ISSN 2448 – 7945

pertinentes. Durante las clases, el profesor guio a los alumnos en la resolución de problemas, comenzando con ejercicios de nivel básico y progresando hacia niveles de complejidad más elevados a medida que los estudiantes demostraron comprensión y habilidad (Hattie & Timperley, 2007).

Además de la práctica en clase, se diseñaron pruebas en modalidades en línea y en "papel", con opciones a respuestas múltiples, completar frases y verdadero o falso para evaluar el nivel de comprensión de los estudiantes de manera continua.

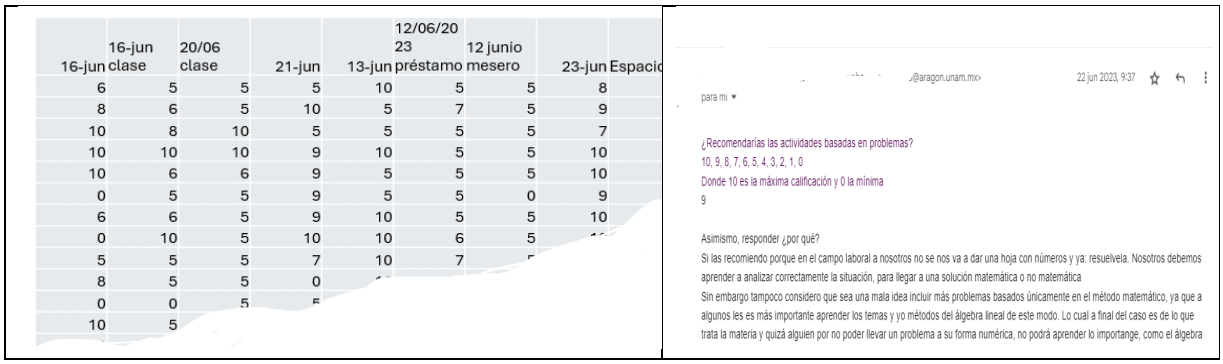
Por ejemplo, la ejemplificación de problemas de sistemas lineales, como del siguiente tipo: "*La compañía Makuoshita realiza el ensamblado de componentes electrónicos: para la planta de Osaka hay disponibilidad de 8 horas de producción, el proceso de ensamblado de microprocesadores en la placa lleva 2 horas y el de convertidores digitales 3 horas. En la planta de Ōizumi existen 6 horas de producción disponibles, el proceso de ensamblado de microprocesadores en la placa toma 4 horas y el de convertidores digitales tiene déficit de una hora. ¿Cuál es la asignación simultánea de horas de trabajo para los procesos de ensamblado de microprocesadores y de convertidores digitales en ambas plantas que satisfagan la disponibilidad de recursos fabriles?"*

Para problemas de este tipo, en un formulario de tipo Google se puede autocalificar y presentar adicionalmente comentarios que se enfocan al cálculo y análisis: "*Para resolver este problema de sistemas lineales, necesitas establecer las ecuaciones que representen la disponibilidad de horas de producción y el tiempo de ensamblado de cada componente en ambas plantas. Después de establecer las ecuaciones, puedes resolver el sistema de ecuaciones lineales para encontrar la asignación óptima de horas de trabajo para los procesos de ensamblado en ambas plantas. Realiza los cálculos paso a paso y asegúrate de analizar adecuadamente las soluciones para verificar si satisfacen las restricciones de recursos fabriles en cada planta. Una vez que hayas encontrado la asignación simultánea de horas de trabajo para ambos procesos en ambas plantas, presenta tus resultados de manera clara y organizada. Verifica que las asignaciones cumplan con las restricciones de recursos fabriles y que sean lógicas y factibles en el contexto del problema".*

La retroalimentación formativa se brinda de manera constante, independientemente de si las respuestas son correctas o incorrectas, tanto en forma automática, como con apoyo del docente.

El proceso de evaluación siguió un enfoque estructurado. Los estudiantes que obtuvieron una evaluación positiva avanzaron al siguiente nivel, mientras que aquellos que no lo lograron, recibieron un refuerzo adicional antes de tener otra oportunidad para avanzar. Esta estructura permitió detectar y abordar las dificultades individuales de manera efectiva (Figura 2).

ISSN 2448 – 7945



16-jun	16-jun clase	20/06 clase	21-jun	13-jun	12/06/2023 préstamo	12 junio mesero	23-jun	Espacio
6	5	5	5	10	5	5	8	
8	6	5	10	5	7	5	9	
10	8	10	5	5	5	5	7	
10	10	10	9	10	5	5	10	
10	6	6	9	5	5	5	10	
0	5	5	9	5	5	0	9	
6	6	5	9	10	5	5	10	
0	10	5	10	10	6	5		
5	5	5	7	10	7			
8	5	5	0					
0	0	5						
10	5							

Figura 2. Recaudación de evidencias cuantitativas y cualitativas

Asimismo, se solicitó a los estudiantes que proporcionasen sus percepciones para cada unidad (Fig. 2). Se realizó un análisis exhaustivo del impacto de la evaluación formativa y la retroalimentación en el aprendizaje de los estudiantes. Los resultados muestran que la mayoría de los participantes se sienten apoyados, clarifican sus conceptos y se sienten motivados para continuar explorando el campo del Álgebra Lineal.

Esto fue evaluado por separado por los autores, quienes después, en una reunión de trabajo, confrontaron sus resultados conforme las estrategias de aprendizaje considerando pruebas conforme el marco de Pintrich, Smith, Garcia y Mckeachie (1993).

3. Resultados y análisis

En la tabla 2 se muestra una breve descripción del contenido del indicador, en cuestión. Se puede ver, hay 12 indicadores, los cuales se encuentran clasificados en tres tipos de estrategias: Cognitiva, metacognitiva y asignación de recursos.

En la misma tabla 2, cada indicador mostrado se identifica por una clave alfanumérica, para su pronto reconocimiento. Asimismo, se muestran cinco indicadores con estrategia cognitiva, 3 con estrategia metacognitiva y 4 con administración de recursos.

Tabla 2. Descripción de indicadores

estrategia	clave	indicador
cognitiva	RH	Porcentaje de estudiantes que usaron las evaluaciones para revisar su aprendizaje
cognitiva	EI1	Porcentaje de estudiantes que contrastan la solución del problema y sus errores del mismo
cognitiva	EI2	Porcentaje de estudiantes que indagan por que causa salieron mal en su evaluación
cognitiva	EI3	El estudiante afirma que gracias a la evaluación él pudo comprender mejor los temas desarrollados
cognitiva	Org2	Porcentaje de estudiantes que anotaron o marcaron ciertas preguntas del exámen
meta cognitiva	Mon	Porcentaje de alumnos que gracias a la evaluación lograron entender mejor el tema desarrollado
meta cognitiva	Reg	Porcentaje de alumnos que sí lograron adaptarse al curso gracias al cuestionario de evaluación
meta cognitiva	PC	Porcentaje de alumnos que argumentan la veracidad de una proposición
administración de recu	TM1	Porcentaje de alumnos que afirman no tener tiempo para llevar a cabo una evaluación
administración de recu	TM2	Porcentaje de alumnos que afirman que la evaluación se debe hacer solo en casos especiales
administración de recu	HS1	Porcentaje de alumnos que afirman que el cuestionario no está bien diseñado
administración de recu	HS2	Porcentaje de alumnos que se auxiliaron con medios varios para resolver el cuestionario

ISSN 2448 – 7945

La tabla 3 muestra el número de alumnos por indicador, es decir, cuántos alumnos del grupo de 17 utilizaron el indicador mostrado. Por ejemplo, en el primer renglón de la tabla se muestra que nueve alumnos usaron las evaluaciones para revisar su aprendizaje, y así se interpreta el resto de la tabla 3.

Tabla 3. Indicador- alumno

estrategia	indicador	No. de alumnos
cognitivo	RH	9
cognitivo	El1	4
cognitivo	El2	6
cognitivo	El3	8
cognitivo	Org2	3
meta cognitivo	MON	13
meta cognitivo	Reg	12
meta cognitivo	PC	14
Admon. de recursos	TM1	5
Admon. de recursos	TM2	6
Admon. de recursos	HS1	3
Admon. de recursos	HS2	7

MEMORIAS DEL Congreso Internacional Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

La tabla 4 muestra cómo se distribuyen los indicadores entre los alumnos del grupo. También, indica cuántos indicadores utiliza cada uno de los alumnos del grupo.

Tabla 4. Alumno- indicador

alumno	RH	El1	El2	El3	Org2	MON	Reg	PC	TM1	TM2	HS1	HS2	total
alumno1	x		x	x		x		x			x	x	7
alumno2			x	x			x			x			4
alumno3	x	x				x		x	x			x	6
alumno4	x				x	x	x	x		x			6
alumno5		x	x	x		x	x	x		x	x		8
alumno6	x						x	x	x				4
alumno7			x	x			x		x			x	5
alumno8	x			x		x		x					4
alumno9	x	x			x	x	x	x		x			7
alumno10						x		x	x	x		x	5
alumno11		x	x				x	x					4
alumno12	x		x	x		x	x	x			x		7
alumno13	x				x	x	x		x			x	6
alumno14				x		x	x	x		x			5
alumno15	x					x	x	x				x	5
alumno16				x		x		x					3
alumno17						x	x	x				x	4

4. Conclusiones

Se destaca el gran potencial de las pruebas en modalidad *Google Forms*, tanto las de tipo obligatorio como opcional, debido a su accesibilidad en cualquier momento y lugar. Este aspecto sugiere un aumento en su utilidad y eficacia como herramientas de aprendizaje, lo que podría beneficiar significativamente a los estudiantes.

Los indicadores metacognitivos, esto es, el porcentaje de alumnos que mejoraron su comprensión del tema gracias a la evaluación, el porcentaje de alumnos que lograron

ISSN 2448 – 7945

adaptarse al curso mediante el cuestionario de evaluación, y el porcentaje de alumnos que argumentaron la veracidad de una proposición, resaltan la importancia que los estudiantes otorgan a este tipo de evaluaciones.

Al considerar la frecuencia a los indicadores metacognitivos en la evaluación formativa, se sugiere que los docentes y diseñadores instruccionales cuando diseñen actividades de evaluación formativa incorporen de forma deliberada elementos que fomenten la autorreflexión, la autoevaluación y el monitoreo del propio aprendizaje por parte de los estudiantes. Esto puede incluir preguntas que inviten a los estudiantes a reflexionar sobre su proceso de aprendizaje, identificar estrategias efectivas o áreas de mejora, y establecer metas para su progreso académico.

Otro aspecto para considerar es que, durante las sesiones, los docentes puedan proporcionar retroalimentación que no solo se centre en los resultados de la evaluación, sino también en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Esto implica comentar sobre cómo los estudiantes abordan las tareas, su nivel de comprensión de los conceptos y cómo pueden mejorar su enfoque de estudio. La retroalimentación metacognitiva podría ser de ayuda a estudiantes a desarrollar una mayor conciencia de sus propias estrategias de aprendizaje y a mejorar su autorregulación.

A partir de lo anterior, un tema pendiente se encuentra en determinar cómo realizar evaluaciones específicas para la capacidad de los estudiantes, esto es, generar mediciones sobre reflexiones del propio aprendizaje y utilizar estrategias metacognitivas para mejorar rendimiento académico. Estas evaluaciones pueden ser tanto cuantitativas como cualitativas, y pueden proporcionar información valiosa sobre el desarrollo metacognitivo de los estudiantes a lo largo del tiempo.

Durante el experimento, se observó una colaboración y búsqueda de ayuda entre pares o docentes por parte de algunos estudiantes cuando enfrentaron dificultades con las pruebas. Este hallazgo subraya la importancia de fomentar la colaboración y el apoyo mutuo entre los estudiantes, lo que podría enriquecer su experiencia de aprendizaje y promover un ambiente de aprendizaje colaborativo.

Asimismo, considerar la diversidad en el uso de las pruebas, esto es, presentar formatos conforme las estrategias de estudio individuales, ya que algunos estudiantes resaltaron que las pruebas contribuyeron significativamente a una comprensión más profunda de los conceptos del curso, enfatizando así el valor de estos como herramientas para promover un aprendizaje significativo y duradero.

Se recomienda considerar la diversidad en el uso de las pruebas, ofreciendo diferentes formatos según las estrategias de estudio individuales de los estudiantes. Algunos estudiantes destacaron que las pruebas contribuyeron significativamente a una comprensión más profunda de los conceptos del curso, lo que enfatiza su valor como herramientas para promover un aprendizaje significativo y duradero.

ISSN 2448 – 7945

Agradecimientos

El artículo ha sido posible gracias al apoyo recibido de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico DGAPA de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), a través del proyecto PAPIME PE112723.

Referencias bibliográficas

Black, P. y Wiliam, D. (2009). “Developing the Theory of Formative Assessment”. *Educ. Asse Eval. Acc*. 21 (1), 5–31. doi:10.1007/s11092-008-9068-5

Hattie, J. yTimperley, H. (2007). “The Power of Feedback”. *Rev. Educ. Res.* 77 (1), 81–112. doi:10.3102/003465430298487

Lui, A. M. y Andrade, H. L. (2021). “Inside the Next Black Box: Examining Students’ Responses to Teacher Feedback in a Formative Assessment Context”. Department of Educational and Counseling Psychology, University at Albany – SUNY.

Panadero, E. y Lipnevich, A. A. (2022). “A Review of Feedback Models and Typologies: Towards an Integrative Model of Feedback Elements”. *Educ. Res.* Rev. 35, 100416. doi: 10.1016/j.edurev.2021.100416.

Pintrich, P. R., Smith, D. A. F., Garcia, T. y Mckeachie, W. J. (1993). Reliability and Predictive Validity of the Motivated Strategies for Learning Questionnaire (Mslq). *Educational and Psychological Measurement*, *53*(3), 801-813. https://doi.org/10.1177/0013164493053003024

ISSN 2448 – 7945

REFLEXIÓN Y CONTINGENCIA: DINAMIZANDO EL CONOCIMIENTO EN LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Huerta Vázquez Miguel Ángel[1*], Martínez Pérez Sandra Areli [2]
CCH-UNAM, Azcapotzalco. Av. Aquiles Serdán 2060
Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco CDMX

IP-POSM025

Resumen

Este estudio examina la interacción entre la contingencia y la reflexión en la práctica docente y cómo estas dinámicas contribuyen al conocimiento del profesor de matemáticas. A través del análisis detallado de videograbaciones de las clases de dos profesores del CCH Azcapotzalco enseñando la función cuadrática, se destaca que las situaciones de contingencia —eventos imprevistos en el aula— son fundamentales para la enseñanza efectiva de las matemáticas, ofreciendo oportunidades singulares para el aprendizaje y la adaptación docente.
El artículo subraya la importancia de la reflexión en dos momentos esenciales: durante la acción y después de ella definidos en Schön (1983). Se demuestra que la reflexión durante la acción permite a los docentes adaptarse en tiempo real a las contingencias del aula, mientras que la reflexión después de la acción fomenta un análisis profundo de la práctica docente, llevando a una mejora continua y una planificación más efectiva.
Los hallazgos resaltan que enfrentar y reflexionar sobre las contingencias enriquece el conocimiento del profesor, especialmente en las dimensiones de Fundamentación y Conexión componentes del Cuarteto del Conocimiento (KQ) de Rowland et. al. (2005). Este proceso no solo mejora la comprensión y la adaptabilidad a las necesidades del estudiante, sino que también fortalece la práctica docente en general

Palabras clave: *Reflexión docente, Situaciones de contingencia, Conocimiento del profesor, Desarrollo profesional, Cuarteto del Conocimiento (KQ).*

1. Introducción

La enseñanza de las matemáticas es un proceso complejo que demanda del profesor no solo un conocimiento profundo de la disciplina, sino también una capacidad de adaptación y reflexión continua sobre su práctica. En este contexto, las situaciones de contingencia —eventos imprevistos que surgen en el aula— y la reflexión docente se presentan como elementos clave para el desarrollo profesional del profesor y la mejora de la enseñanza.

Este estudio se centra en explorar la interacción entre la contingencia y la reflexión en la práctica docente de matemáticas, y cómo estas dinámicas contribuyen al conocimiento del profesor. Para ello, se analiza en detalle la experiencia de dos profesores del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) Azcapotzalco en la enseñanza de la función cuadrática.

[1*] *Autor para la correspondencia. E-mail: mhuertav@gmail.com*

ISSN 2448 – 7945

La investigación se fundamenta en los conceptos de reflexión durante la acción y reflexión después de la acción propuestos por (Schön, 1983) que permiten comprender cómo los docentes enfrentan y aprenden de las situaciones imprevistas en el aula. Asimismo, se emplea el marco teórico del Cuarteto del Conocimiento (KQ) desarrollado por Rowland et al. (2005) para analizar el conocimiento del profesor, con énfasis en las dimensiones de Fundamentación y Conexión.

El objetivo central es examinar cómo las contingencias y la reflexión sobre ellas enriquecen el conocimiento del profesor de matemáticas, fortaleciendo su capacidad para responder a las necesidades de los estudiantes y mejorar su práctica docente. Se espera que los hallazgos contribuyan a la discusión sobre el desarrollo profesional docente y brinden insights para la formación de profesores de matemáticas.

2. Marco teórico

Este estudio se fundamenta en el marco teórico del Cuarteto del Conocimiento (KQ) desarrollado por Rowland, Huckstep y Thwaites (2005) para analizar el conocimiento que emerge en la práctica docente de los profesores de matemáticas. El KQ se construyó a partir de la observación de la enseñanza de futuros profesores de primaria, identificando 17 códigos que se agruparon en cuatro dimensiones: Fundamentación, Transformación, Conexión y Contingencia.

La Fundamentación se refiere a los conocimientos y creencias teóricas del profesor, incluyendo su comprensión de conceptos matemáticos y pedagógicos. La Transformación implica el conocimiento en acción demostrado en la planeación y enseñanza, como la selección de ejemplos y representaciones. La Conexión abarca las decisiones sobre la secuenciación y conexiones entre temas matemáticos, así como la conciencia de las demandas cognitivas. La Contingencia se relaciona con la capacidad del profesor para responder a eventos imprevistos en el aula y desviarse de su plan original cuando es necesario.

Además, el estudio se apoya en las ideas de Schön (1983) y Dewey (1989) sobre la reflexión como herramienta clave para el análisis y mejora de la práctica docente. Según estos autores, la reflexión permite a los profesores examinar críticamente sus actitudes, creencias y prácticas pedagógicas, identificando áreas de mejora y reformulando sus enfoques de enseñanza.

Schön distingue entre la "reflexión en la acción", que ocurre durante la práctica y permite tomar decisiones inmediatas, y la "reflexión sobre la acción", que implica un análisis retrospectivo de la propia actuación para aprender de lo sucedido. Ambos tipos de reflexión son fundamentales para el desarrollo profesional docente.

ISSN 2448 – 7945

Por su parte, Dewey enfatiza que la reflexión posibilita el escrutinio de las propias creencias e ideas preconcebidas, siendo un proceso tanto individual como colectivo. La reflexión colectiva en una comunidad de aprendizaje es especialmente valiosa, ya que permite a los docentes compartir experiencias, desafíos y soluciones, enriqueciendo su conocimiento conjunto.

En el contexto de este estudio, el marco del KQ se emplea para analizar el conocimiento que los profesores de la Comunidad-Azcapotzalco ponen en juego al planear, implementar y reflexionar sobre una secuencia didáctica para enseñar la función cuadrática. A su vez, las ideas de Schön y Dewey sobre la reflexión docente se utilizan para interpretar cómo los procesos reflexivos individuales y colectivos de los profesores contribuyen al desarrollo de su conocimiento matemático y pedagógico.

La combinación del KQ y las teorías sobre la reflexión docente proporciona una lente analítica potente para comprender la interrelación entre el conocimiento y la práctica reflexiva de los profesores de matemáticas en el seno de una comunidad profesional de aprendizaje. Este marco teórico guía el análisis de los datos y la discusión de los resultados a lo largo de los capítulos subsiguientes.

3. Metodología

Este estudio adoptó un enfoque cualitativo basado en el estudio de caso de la Comunidad-Azcapotzalco, una comunidad profesional de aprendizaje de profesores de matemáticas. La investigación se centró en analizar las cinco etapas de un Ciclo de Enseñanza/Reflexión llevado a cabo por los miembros de la comunidad en torno a la enseñanza de la función cuadrática, utilizando el problema del área mínima de un cuadrilátero, se puede ver más al respecto en (Huerta-Vázquez et al., 2022).

El problema al que se refieren es el siguiente: Dado el rectángulo $ABCD$ con base de 6 cm y altura de 4 cm. Sea P un punto en el lado $\overline{AB}$, M un punto en el lado $\overline{BC}$, N un punto en $\overline{CD}$ y S un punto en $\overline{DA}$, tal que las distancias de $\overline{BM}, \overline{CN}, \overline{DS}$ y $\overline{AP}$ son iguales. Obtener el área mínima del cuadrilátero que se forma con los puntos P, M, N y S.
Que para su aplicación en el aula se dividieron en cuatro actividades: 1) actividad de traducción verbal a geométrico, que permita a los estudiantes calcular el área del cuadrilátero; 2) actividad de tabulación, de las áreas obtenidas al variar la longitud de $\overline{AP}$, 3) actividad de graficación, de los resultados tabulados y 4) actividad de algebrización, en el que los estudiantes deben encontrar una expresión algebraica que describa el área en función de la longitud de $\overline{AP} = x$

El Ciclo de Enseñanza/Reflexión constó de las siguientes etapas:

- Introducción y primera etapa: Formación de la comunidad y planeación de la secuencia didáctica.
- Segunda etapa: Puesta a prueba de la secuencia por el profesor Mario.

ISSN 2448 – 7945

- Tercera etapa: Análisis-Síntesis, reflexión colectiva sobre la clase de Mario.
- Cuarta etapa: Puesta a prueba de la secuencia por el profesor Tadeo.
- Quinta etapa: Análisis-Síntesis, reflexión final sobre todo el ciclo.
- Sexta etapa: Conclusiones obtenidas al estudiar cada etapa.

El estudio se enfocó en dos docentes clave: Mario y Tadeo, quienes la pusieron a prueba en el aula. Los tres participaron en las etapas de reflexión colectiva. Además, se consideraron las intervenciones de otros profesores presentes en las reuniones de la primera, tercera y quinta etapa.

Para el análisis se emplearon dos marcos teóricos complementarios: el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) de Ball et al. (2008) y el Cuarteto del Conocimiento (KQ) de Rowland et al. (2005). El MKT se centra en el contenido del conocimiento necesario para enseñar matemáticas efectivamente, mientras que el KQ examina el conocimiento que emerge durante la práctica docente en el aula. La combinación de ambos marcos permitió un análisis más integral.
Las transcripciones de los videos de las sesiones se realizaron con el software MaxQDA y se analizaron buscando indicios de los conocimientos descritos en los marcos teóricos. Además, el análisis consideró:

- Las representaciones de la función cuadrática que surgen en la enseñanza del problema, desde la perspectiva de los Registros de Representación Semiótica de Duval (2004).
- La resolución de problemas como metodología didáctica, según el enfoque del programa de estudios de Matemáticas del CCH (2016).
- Las reflexiones individuales y colectivas, interpretadas a la luz de las teorías de Dewey (1989) y Schön (1983), revelando cómo contribuyen al desarrollo del conocimiento sobre la función cuadrática.

Los resultados se presentan en seis capítulos, cada uno correspondiente a una etapa del Ciclo de Enseñanza/Reflexión, culminando con las conclusiones derivadas del análisis global. Este desarrollo metodológico buscó arrojar luz sobre los conocimientos y procesos reflexivos de los profesores al enseñar la función cuadrática en el marco de una comunidad de aprendizaje profesional.

4. Resultados

El análisis de los datos recolectados durante el Ciclo de Enseñanza/Reflexión, centrado en el marco teórico del Cuarteto del Conocimiento (KQ) y las ideas de Schön sobre la reflexión docente, permitió identificar cómo los profesores Mario y Tadeo movilizaron y desarrollaron su conocimiento matemático para la enseñanza de la función cuadrática.

ISSN 2448 – 7945

Durante las puestas a prueba en el aula, tanto Mario como Tadeo enfrentaron situaciones de contingencia que los llevaron a reflexionar en la acción para adaptar su enseñanza.

En el caso de Mario, surgen dos contingencias principales:

1. Durante la actividad de traducción del enunciado verbal a una representación geométrica, los estudiantes ubican los puntos P, M, N y S en los puntos medios de los lados del rectángulo, sin considerar la condición de igualdad de los segmentos AP, BM, CN y DS. Esto dificulta la comprensión del problema.
2. Al realizar las actividades de graficación y algebrización, un estudiante pregunta sobre la diferencia entre ecuación y función cuadrática, lo que lleva a Mario a abordar estos conceptos en la clase.

Por su parte, Tadeo enfrenta las siguientes contingencias:

1. En la actividad de tabulación, los estudiantes tienen dificultades para calcular el área del cuadrilátero, ya que se empeñan en usar una fórmula en lugar de descomponer las áreas.
2. Durante la algebrización, un estudiante plantea una duda sobre la reorganización de términos y la validez de tener términos negativos al resolver una ecuación cuadrática. Tadeo aclara que ambas formas son válidas y reescribe la ecuación en su forma estándar.

Estas situaciones imprevistas activaron la dimensión de Contingencia del KQ, revelando cómo los docentes movilizan su conocimiento para responder a las necesidades emergentes de los alumnos.

Luego, en las reuniones de análisis-síntesis, la reflexión sobre la acción permitió a Mario y Tadeo profundizar en la comprensión de las dificultades de los estudiantes y refinar su conocimiento pedagógico del contenido. A partir de la reflexión colectiva sobre la clase de Mario, Tadeo incorporó en su planeación estrategias para anticipar y abordar posibles errores de los alumnos en la representación geométrica del problema. Esto evidencia cómo la reflexión conjunta enriquece la dimensión de Fundamentación del KQ, al llevar a los docentes a cuestionar y ampliar su conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de la función cuadrática.

Además, la reflexión colectiva propició la activación de la dimensión de Conexión del KQ, al llevar a Mario y Tadeo a discutir la pertinencia de enseñar la diferencia entre ecuación y función cuadrática, y a establecer vínculos entre distintas representaciones del concepto. Asimismo, la explicación de otro profesor sobre las diferencias finitas durante una reunión de reflexión permitió a Mario y Tadeo reinterpretar el razonamiento de un estudiante en una clase previa, mostrando cómo la reflexión compartida puede enriquecer la comprensión del pensamiento matemático de los alumnos y ampliar el repertorio de estrategias de enseñanza.

En síntesis, el Ciclo de Enseñanza/Reflexión posibilitó que Mario y Tadeo movilizaran y desarrollaran conocimientos asociados a las cuatro dimensiones del KQ: Fundamentación, Transformación, Conexión y Contingencia. La reflexión en la acción

ISSN 2448 – 7945

les permitió enfrentar situaciones imprevistas y adaptar su enseñanza, mientras que la reflexión sobre la acción, tanto individual como colectiva, los llevó a profundizar en su comprensión de la enseñanza y el aprendizaje de la función cuadrática, en un proceso continuo de desarrollo profesional situado en la práctica.

5. Conclusiones

Esta investigación, centrada en el estudio de caso de los profesores Mario y Tadeo en el marco de la Comunidad-Azcapotzalco, pone de manifiesto el potencial de los procesos de reflexión individual y colectiva para movilizar y desarrollar el conocimiento matemático para la enseñanza, analizado desde la perspectiva del Cuarteto del Conocimiento (KQ).

El Ciclo de Enseñanza/Reflexión, que incluyó instancias de planeación conjunta, puesta a prueba en el aula y reflexión compartida, permitió a Mario y Tadeo hacer frente a situaciones de contingencia y activar las cuatro dimensiones del KQ: Fundamentación, Transformación, Conexión y Contingencia. La reflexión en la acción los llevó a adaptar su enseñanza en tiempo real para responder a las necesidades emergentes de los estudiantes, mientras que la reflexión sobre la acción, tanto individual como colectiva, propició la profundización y transformación de su conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de la función cuadrática.

Un hallazgo relevante fue cómo la reflexión colectiva, al exponer a los docentes a las perspectivas y experiencias de sus pares, amplió su comprensión del pensamiento matemático de los estudiantes y enriqueció su repertorio de estrategias de enseñanza. Esto subraya la importancia de los espacios de colaboración y diálogo profesional para el desarrollo del conocimiento docente.

Entre las limitaciones del estudio, cabe señalar que los hallazgos se basan en el análisis de las trayectorias de dos profesores en un ciclo acotado de enseñanza-reflexión. Futuras investigaciones podrían indagar en el desarrollo del conocimiento docente de un número mayor de profesores, a lo largo de ciclos más prolongados o iterativos.

En conclusión, este estudio de caso resalta el valor de la reflexión, entendida desde las ideas de Schön y analizada a través del marco del KQ, como un motor para el desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza. Se espera que estos hallazgos alienten a formadores de profesores y docentes en ejercicio a cultivar prácticas reflexivas sistemáticas, tanto individuales como colectivas, como parte integral de su desarrollo profesional continuo. Asimismo, se sugiere que las instituciones educativas y los programas de formación docente promuevan y faciliten la conformación de comunidades de aprendizaje que brinden espacios para la reflexión compartida y el intercambio de conocimientos entre pares, con el fin de avanzar hacia una enseñanza de las matemáticas cada vez más adaptativa y centrada en las necesidades de los estudiantes.

ISSN 2448 – 7945

6. Referencias

CCH-UNAM. (2016). *Programas de Estudio Área de Matemáticas I-IV*. https://www.cch.unam.mx/programasestudio

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos: Nueva exposición de la relación entre pensamiento y proceso educativo*. Paidós.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.

Huerta-Vázquez, M. Á., Figueras, O., & Martínez Pérez Sandra Areli. (2022). Impacto de la Reflexión en los Conocimientos de Profesores Miembros de una Comunidad de Aprendizaje. En A. Lischka E., Dyer Elizabeth B., Jones Ryan Seth, J. N. Lovett, J. Strayer, & S. Drown (Eds.), *Proceedings of the 44th Annual Meeting of The North American Chapter of The International Group for The Psychology Of Mathematics Education* (pp. 643-652). Middle Tennessee State University.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary Teachers' Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255-281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How profesionals think in action*. Basic Books.

ISSN 2448 – 7945

DISEÑO INSTRUCCIONAL: TRASCENDENCIA EN LA ELABORACIÓN DE CONTENIDOS EDUCATIVOS DIGITALES EN LAS MATEMÁTICAS.

Roldán Vázquez Valentín[1 *], Yáñez Hernández Adriana[2], Márquez Ortega Domingo[3]
[1,2,3]*UNAM. km 2.5 carretera Cuautitlán - Teoloyucan, San Sebastián Xhala, C. P. 54754, Cuautitlán Izcalli, Estado de México.*

EN-POSM026

Resumen

En el contexto de la Tercera Misión de las Universidades, la Sociedad 5.0 y la Educación 5.0 el conocimiento es la base de la evolución de la humanidad; en este sentido, la ponencia tiene como propósito: Describir la importancia del estudio de la ciencia de las matemáticas en los estudiantes de ingeniería, bajo un enfoque pedagógico; para posibilitar el desarrollo del pensamiento crítico, incrementando su capacidad de razonamiento en la construcción de estrategias de cambio en la búsqueda de soluciones a problemáticas específicas; para el proceso de enseñanza - aprendizaje en modalidad: sincrónica y asincrónico; como una táctica que las Instituciones de Educación Superior en la era de la disrupción, adoptan metodologías en el diseño de materiales y estrategias didácticas a través de herramientas que aportan los modelos de diseño instruccional, con el objetivo de llevar el arte de enseñar.

***Palabras clave**: Diseño instruccional, estrategias didácticas, enseñanza, matemáticas – didáctica.*

1. Introducción

La educación es uno de los pilares más importantes en la sociedad, a través de su desarrollo son alcanzados los niveles de bienestar social y el crecimiento económico; los países que destinan mayor gasto público a la enseñanza obtienen mejores resultados en la población elevando las condiciones vida además de impulsar la investigación y la tecnología.

Los avances tecnológicos han generado cambios inimaginables en todos los aspectos; en la educación ha revolucionado y transformado la manera de llevar a cabo el proceso de enseñanza – aprendizaje dejando atrás los medios tradicionales en el aula, ha permitido desarrollar nuevos modelos en la instrucción, mejorado las habilidades en los estudiantes a través de las aplicaciones de las herramientas de las TICS, mejorado los niveles de aprendizaje a través de la formación y el acceso a la información e incrementando los niveles de productividad en los estudiantes.

La educación del siglo XXI está enfocada a una nueva visión impulsando enfoques de enseñanza en el uso de nuevas tecnologías, para adquirir conocimientos especializados además de desarrollar habilidades durante el

[1] *Autor para la correspondencia. E-mail: valrolvaz@gmail.com Tel. 55-41-44-45-25*

ISSN 2448 – 7945

proceso de su instrucción y formación educativa. Por ello los educadores necesitan apoyo y motivación para adoptar nuevos métodos de enseñanza que capaciten a la futura fuerza laboral y les permitan desarrollar sus habilidades (Organización Mundial de la Salud, 2022).

Para lograrlo se necesitan crear experiencias educativas innovadoras que incentiven a los estudiantes a obtener nuevos conocimientos y desarrollar nuevas competencias en entornos educativos diferentes; enalteciendo que las instalaciones, los planes de estudio, contenidos, materiales y las prácticas académicas tradicionales deben transformarse de acuerdo con las necesidades y tendencias de una sociedad en evolución que requiere el uso de tecnologías inteligentes y avanzadas que potencien las tareas de llevar a cabo la enseñanza y aprendizaje. Las tendencias educativas están encaminadas a hacer frente a la demanda para ofrecer la enseñanza a través de plataformas aprovechando tecnologías para recrear entornos exitosos de aprendizaje impulsados por la tecnología en especial de las matemáticas.

La tecnología se considera efectiva en la medida en que se utiliza de una manera que mejora la comprensión conceptual de las matemáticas por parte de los estudiantes y fomenta el razonamiento y la comunicación matemáticos.
Adquirir los conocimientos en las matemáticas es fundamental en el desarrollo académico de todo estudiante; la aplicación de las matemáticas ha apoyado a la aplicación de la ciencia y contribuido a alcanzar los niveles de perfeccionamiento y progreso necesarios en los que se encuentra situada la humanidad por su relación que tiene con otras disciplinas, instruirse con las competencias matemáticas, no es una tarea fácil en las aulas educativas tradicionales y en entornos digitales se convierte en un reto por su complejidad y un desafío para los docentes encargados de formar estudiantes con altos conocimientos en las matemáticas y de gran importancia en los ámbitos de formación educativa en las universidades.

2. Metodología o desarrollo

Las instituciones educativas encargadas de llevar a cabo los procesos de enseñanza aprendizaje identifican las necesidades de los estudiantes para adquirir los conocimientos a través de plataformas digitales que permitan tener tiempo para realizar actividades que la enseñanza presencial no les concede al estar limitada por el espacio, las herramientas tecnológicas conceden aplicaciones para poder aprender a través de la enseñanza en línea que es relativamente flexible; la enseñanza en línea y a distancia brinda oportunidades para que todos los estudiantes expresen sus puntos de vista en el foro de discusión, y su función de reproducción les permite revisar los cursos repetidamente fuera de clase para comprender mejor los puntos clave (Yu et al., 2021).

Los métodos de enseñanza en línea pueden ser más innovadores y atractivos para los estudiantes jóvenes debido al uso de tecnología avanzada, mientras que los métodos de enseñanza fuera de línea permiten a los alumnos obtener respuestas rápidas y

ISSN 2448 – 7945

efectivas de los educadores (Agyeiwaah et al., 2022). Sin embargo, los docentes no están preparados para ejercer su quehacer diario para la transmisión de conocimientos a través de las plataformas digitales, en realizar los cambios pertinentes requieren de docentes capacitados además de desafiar a los docentes en el uso de métodos de instrucción (Quezada et al., 2020).

2.1. Pregunta de investigación

¿En qué medida la aplicación de estrategias pedagógicas y tecnológicas permiten a los docentes aplicar el diseño instruccional para llevar a cabo el proceso de enseñanza – aprendizaje para la adquisición de los conocimientos en la asignatura de métodos numéricos?

2.2. Justificación

La digitalización y la flexibilidad en la educación han requerido desarrollar competencias (European Commission, 2020) que ayuden a perfeccionar la inteligencia humana, fortaleciendo la comprensión, la capacidad de análisis a través la transmisión de conocimientos utilizando las tecnologías de la información como un recurso pedagógico; el Marco Europeo de Competencias Digitales para Educadores ha identificado 22 competencias digitales, divididas en seis dominios (Redecker, 2017): compromiso profesional, recursos digitales, enseñanza y aprendizaje, evaluación, empoderamiento de los estudiantes y promoción de la competencia digital de los estudiantes.

Las instituciones educativas requieren que los docentes puedan trabajar en entornos de aprendizaje digitales y tengan las competencias para desarrollar continuamente la enseñanza digital, con el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), las universidades de educación superior han adoptado técnicas de e-learning como solución a la educación presencial, convirtiéndose en una tecnología fundamental en la educación, la eficacia de los sistemas de aprendizaje electrónico depende en gran medida de la adopción de dichos sistemas por parte de los estudiantes y del diseño instruccional.

Para lograr los resultados de aprendizaje deseados, los diseñadores instruccionales desarrollarán y probarán sus entornos a través de una serie de etapas, que incluyen la evaluación de necesidades, el diseño del entorno, el desarrollo de sistemas y la evaluación (Chew, Wu, Idris, Loh Chua, 2020). Además, los participantes informaron que la forma en que se identificaron como educadores cambió sus métodos de enseñanza y, a través del acto de implementar esos métodos de enseñanza revisados, sus creencias sobre su papel como educadores también cambiaron (Nichols Hess, 2018). Un buen diseño instruccional en la plataforma digital permitirá a los estudiantes a ser participantes activos en el aprendizaje a través del aprendizaje activo y de oportunidades para tomar el control de su aprendizaje (Cull, 2005), (Mattson et al., 2017).

ISSN 2448 – 7945

2.3. Estado del arte

La enseñanza en línea es un nuevo enfoque en las instituciones de educación superior y también se está volviendo en una actividad común para ofrecer los servicios educativos; la efectividad de la enseñanza en línea y los logros académicos dependen de la motivación y las actitudes de los estudiantes, para la adquisición de conocimientos y de un buen diseño instruccional para el desarrollo de la enseñanza en línea en la educación superior. La utilización de la tecnología como recurso didáctico permite la creación de ambientes de aprendizaje idóneos para llevar los procesos de enseñanza a través de los medios electrónicos con un diseño instruccional que conlleve a la enseñanza y a cubrir altas tasas de participación de los estudiantes en la educación a distancia.

La enseñanza en línea es un nuevo enfoque en las instituciones de educación superior; se está haciendo muy frecuente en las universidades para tener la efectividad deseada se requiere aplicar el diseño instruccional para la educación. El diseño instruccional es el “proceso sistemático y reflexivo de traducir” teorías y principios de “aprendizaje e instrucción en planes de productos instruccionales consumibles para el alumno y oportunidades de evaluación para el instructor” (Smith & Ragan, 1999).
El diseño instruccional es un proceso sistémico para desarrollar las especificaciones de aprendizaje, que inicia la identificación de características de los estudiantes y de sus requerimientos de aprendizaje, incluye la especificación de objetivos, contenidos, selección de la propuesta metodológica para el aprendizaje, definición de materiales educativos y especificación de la propuesta evaluativa (Brown & Green, 2015), (Piskurich, 2015), (Umaña, 2017). Los académicos que buscan lograr los mejores resultados en la enseñanza participan activamente en las actividades de diseño instruccional con especial atención en los modelos para la creación de contenidos, que faciliten el aprendizaje de manera visual; los modelos de diseño instruccional permiten identificar los contenidos con los recursos digitales adecuados que comunicaran el propósito de la enseñanza dependiendo el tema o asignaturas a impartir, los modelos básicos son:

Modelo ADDIE refleja los procesos de diseño instruccional de 5 fases: análisis, en esta fase surge la pregunta ¿Cuál es el objetivo de la formación?, diseño, desarrollo, implementación y evaluación, el modelo ADDIE es de alto nivel, genérico y orientado a procesos, en un inicio no estaba pensado para contextos de aprendizaje electrónico, aunque se ha adoptado con éxito para ese propósito (Nichols Hess & Greer, 2016).

ASSURE integrada por las fases de análisis de los alumnos, declaración de estándares y objetivos, utilización de medios y tecnología, participación de los alumnos y luego evaluación y revisión. El modelo ASSURE promueve la construcción de conocimiento a través del aprendizaje activo y otras prácticas de alto impacto modelos se han utilizado en una variedad de contextos de aprendizaje y proporcionan un valioso marco de referencia en la evaluación y diseño de muchos tipos de experiencias de aprendizaje.

ISSN 2448 – 7945

2.4. Hipótesis

La aplicación del diseño instruccional permitirá el perfeccionamiento de los aprendizajes de los estudiantes como una herramienta pedagógica a través de la tecnología.

2.5. Objetivo

Describir el desarrollo de contenidos digitales para el aprendizaje de las matemáticas cimentados en el diseño instruccional como estrategia pedagógica a través de la utilización de la tecnología.

2.6. Diseño de investigación

La aplicación del diseño instruccional implica una investigación de tipo mixta (Estudio deductivo-analítico), alcance descriptivo, diseño no experimental, enfoque cuantitativo.

2.7. Población FES Cuautitlán.

3. Resultados y análisis

El proceso de enseñanza – aprendizaje en las matemáticas en las instituciones de educación superior, generalmente son impartidas de forma tradicional en el aula, por lo que se tuvo como reto diseñar e instrumentar una con modalidad mixta: en línea y presencial, en la que estuvieron involucradas dos personas ambas con competencias científicas y tecnológicas específicas y una tercera con amplios conocimientos en las matemáticas.

Para desarrollar las herramientas para el diseño instruccional, en primera instancia se hizo la elaboración y revisión de contenidos, la selección de materiales didácticos de apoyo académico, para proceder con el diseño instruccional de la asignatura de métodos numéricos; cabe señalar que las herramientas didácticas aportaron en los estudiantes nuevas formas de adquirir y reforzar el aprendizaje particularmente al ser de manera síncrona y asíncrona que fue reflejado con un mayor entendimiento en la asignatura de métodos numéricos, y en un mayor número de calificaciones aprobatorias, en comparación con grupos de ciclos pasados donde hubo un alto índice de reprobación.

En la figura 1, métodos numéricos se observa la pantalla principal de la asignatura donde se realizó el diseño instruccional adecuado para llevar a cabo el proceso de enseñanza – aprendizaje.

ISSN 2448 – 7945

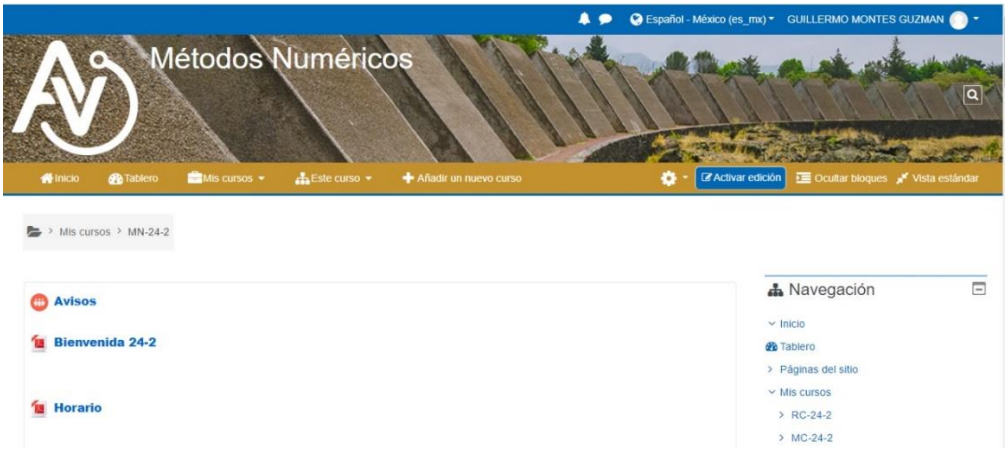


Figura 1. Métodos numéricos

La figura 2, contenidos se encuentra el encuadre de la asignatura, el material didáctico desarrollado para que los estudiantes tuvieran acceso en cualquier momento y sirviera para reforzar el aprendizaje.

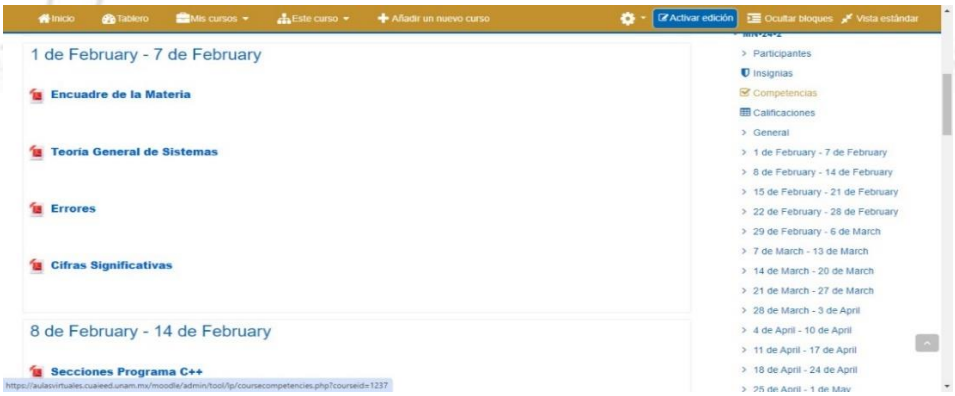


Figura 2. Contenidos

En la figura 3, desarrollo del tema y en la figura 4, realizando iteraciones; se muestran los aspectos relevantes de los temas contenidos en el temario de la asignatura Métodos numéricos.

ISSN 2448 – 7945

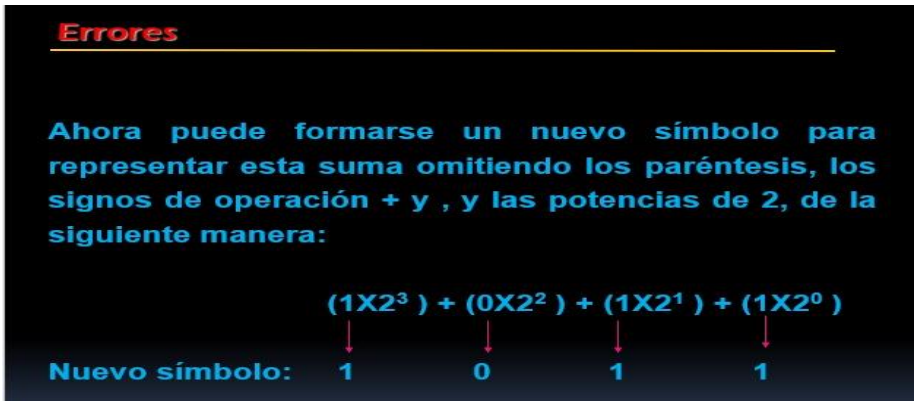


Figura 3. Desarrollo del tema



Iteraciones	i	i+1	Tol
X_0	-7.0000000000	-6.5349919199	0.4650080801
X_1	-6.5349919199	-6.3315600658	0.2034318542
X_2	-6.3315600658	-6.2870821650	0.0444779008
X_3	-6.2870821650	-6.2850533872	0.0020287777
X_4	-6.2850533872	-6.2850492734	0.0000041138
X_5	-6.2850492734	-6.2850492734	0.0000000000

Figura 4 Realizando iteraciones

4. Conclusiones

Las universidades de éxito reconocen que son organizaciones encargadas de preparar profesionales competentes para ello deben de aplicar estrategias y métodos para que los estudiantes adquieran las competencias y esto los lleve a desarrollar educandos altamente capacitados y ser un recurso óptimo para asumir responsabilidad como ciudadanos eficientes, reconociendo el papel vital de la educación superior en el proceso de perfeccionamiento del talento.

El uso integral de la tecnología en la educación matemática tiene efectos sobre el rendimiento y la orientación de los estudiantes; el aprendizaje matemático es una exigencia continua en las esferas donde se desenvuelve cualquier estudiante, en el campo de la educación matemática ha reconocido desde hace tiempo que la incorporación de la tecnología a la enseñanza en el aula no tendrá ningún efecto en el aprendizaje por sí sola (Cohen & Hollebrands, 2011); (Roschelle et al., 2010); (Sickel, 2019), para ello deben existir las estrategias que conlleven a una adecuada formación educativa.

Desde la perspectiva académica y profesional, los estudiantes que aprenden las matemáticas tienen mayores posibilidades para desarrollar la agilidad mental, un

ISSN 2448 – 7945

pensamiento metódico para resolver problemas con apoyo de actividades abstractas con hechos que fomenten la habilidad de investigación, para validar teorías, guiados por sus maestros, para ser ciudadanos productivos y exitosos.

5. Índice de referencias

Agyeiwaah E., Badu Baiden F., Gamor E., & Hsu F.C. (2022). Determining the attributes that influence students' online learning satisfaction during COVID-19 pandemic, *Journal of Hospitality, Leisure, Sports and Tourism Education*, 30, 10.1016/j.jhlste.2021.100364

Brown, A. H., & Green, T. D. (2015). The essentials of instructional design: Connecting fundamental principles with process and practice [Lo esencial del diseño instruccional: conectando los principios fundamentales con el proceso y la práctica], *United States of America: Routledge.*

Chew C.S., Wu W.C.V, Idris N., Loh E.F. & Chua Y.P. (2020). Enhancing summary writing of ESL learners via a theory-based online tool: System development

Cohen J. & Hollebrands K.F. (2011). Technology tools to support mathematics teaching, T.P. Dick, K.F. Hollebrands (Eds.), Focus in high school mathematics: Technology to support reasoning and sense making, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, pp. 105-122

Cull B.W. (2005). Voices in the wilderness: A report on academic information literacy instruction in Atlantic Canada, *The Canadian Journal of Information and Library Science*, 29 (1), pp. 1-26

European Commission (2020). Descriptors defining levels in the European Qualifications Framework (EQF) https://europa.eu/europass/en/description-eight-eqf-levels

Mattson J., Kirker M.J., Oberlies J. & Byrd J. (2017). Carving out a space: Ambiguity and librarian teacher identity in the academy. *A. Deitering, R. Schroeder, R. Stoddart* (Eds.), The self as subject: Autoethnographic research into identity, culture, and academic librarianship, ACRL pp. 143-169

Nichols Hess A. & Greer K. (2016). Designing for engagement: Using the ADDIE modelTo integrate high-impact practices into an online information literacy course. *Communications in InformationLiteracy*, 10 (2) 10.15760/comminfolit.2016.10.2.27

Nichols Hess A. (2018). Teaching transformation in practice: Resulting teaching Identities Transforming academic library instruction: Shifting teaching practices

ISSN 2448 – 7945

To reflect changed perspectives, Rowman & Littlefield, New York, pp. 129-144

Organización Mundial de la Salud, (2022). Marco mundial de competencias y resultados para la cobertura sanitaria universal National Council of Teachers of Mathematics (1989), Curriculum and evaluation standards for school mathematics, Author, Reston, VA (1989)

Piskurich, G. M. (2015). Rapid instructional design: Learning ID fast and right [Diseño instruccional rápido: ID de aprendizaje rápido y correcto], United States of America: John Wiley & Sons.

Quezada R.L., Talbot C & Quezada-Parker K.B. (2020). From bricks and mortar to remote teaching: A teacher education Program's response to COVID-19, *Journal of Education for Teaching*, 46 (4), pp. 472-483, 10.1080/02607476.2020.1801330

Redecker C. (2017). European Framework for the Digital Competence of Educators: DigCompEdu. Publications Office of the European Union, Luxembourg Available at: https://publications.jrc.ec.europa.eu/repository/handle/JRC107466

Roschelle J., Shechtman N., Tatar D., Hegedus S., Hopkins B. & Empson S. (2010). Integration of technology, curriculum, and professional development for advancing middle school mathematics: Three large-scale studies *American Educational Research Journal*, 47, pp. 833-878

Sickel J.L. (2019). The great media debate and tpack: A multidisciplinary examination of the role of technology in teaching and learning, J*ournal of Research on Technology in Education,* 51, pp. 152-165, 10.1080/15391523.2018.1564895

Smith P.L. & Ragan T.J. (1999). *Instructional design*, (2nd ed.), Merrill.

Umaña, A.C. (2017). La planificación curricular y el diseño curricular de asignaturas en línea. En A.C. Umaña, I. Salas, V. Berrocal. (ed.), Consideraciones para el diseño y oferta de asignaturas en línea (pp. 67-72). San José, Costa Rica: EUNED

Yu Q., Liu L., Tang Q. & Wu W. (2021). Online teaching- present situation and its future: A survey of online study for medical students during the COVID-19 epidemic Irish Educational Studies, 40 (2), 10.1080/03323315.2021.1916557

ISSN 2448 – 7945

ECUACIONES DIFERENCIALES DE MAXWELL EN EL DESARROLLO DE PROTOTIPOS DE INGENIERÍA

Guzmán Tinajero Pedro [*1], Castro Fuentes Aide[2], Urrutia Vargas Celina Elena[3], Hernández Gómez Víctor Hugo[4]
[1,2,3,4] *Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. Carretera Cuautitlán-Teoloyucan Km 2.5. Cuautitlán Izcalli Estado de México. C.P. 54714.*

EN-POSM027

Resumen

Este artículo aborda la aplicación y relevancia de las ecuaciones diferenciales de Maxwell en el proceso de desarrollo de prototipos de ingeniería. Las ecuaciones de Maxwell son fundamentales en la descripción matemática de los fenómenos electromagnéticos, proporcionando un marco teórico esencial para el diseño y funcionamiento de dispositivos eléctricos y electrónicos.
En el cuerpo del trabajo se proporciona una visión integral de cómo las ecuaciones diferenciales de Maxwell son esenciales en la ingeniería contemporánea, ofreciendo valiosas perspectivas para estudiantes de licenciatura involucrados en proyectos de desarrollo de prototipos electromagnéticos.

Palabras clave: *Ecuaciones diferenciales, electromagnetismo, Maxwell, Ingeniería, Prototipos*

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales, una disciplina central en el campo de las matemáticas, han sido una herramienta indispensable para modelar una variedad de fenómenos naturales y aplicaciones en campos tan diversos como la ingeniería, la física, la biología, la economía y más. Desde tiempos antiguos hasta la actualidad, su relevancia y utilidad han sido evidentes a lo largo de la historia.

Para los fines de este artículo nos centraremos específicamente en el impacto que tienen las ecuaciones diferenciales en el campo de la Física, específicamente en el electromagnetismo, tomando como ejemplo las cuatro ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial y cómo se transforman en prototipos de ingeniería.

1.1 Objetivo

Analizar las cuatro ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial y correlacionar su impacto en la creación de prototipos de ingeniería.

[1] *Autor para la correspondencia. E-mail: pgconacyt@gmail.com Tel. 56231887*

ISSN 2448 – 7945

1.2 Problema

Se requiere analizar las cuatro ecuaciones de Maxwell en forma diferencial, para vincular su uso en la creación de prototipos en ingeniería

1.3 Hipótesis

Si se analizan las cuatro ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial, será posible correlacionar la creación de prototipos en ingeniería para que los alumnos y alumnas comprendan mejor la utilidad de las ecuaciones matemáticas en el diseño de prototipos.

1.4 Estado del Arte

1.4.1 Ecuaciones Generales de Maxwell

Maxwell agrupa las ecuaciones de Gauss, de Faraday-Lenz, de Ampère y de su propio ingenio matemático (al introducir la corriente de desplazamiento), estableciendo las relaciones entre los campos eléctricos y magnéticos, que son la piedra angular de la teoría electromagnética clásica. Con una elegante formulación matemática revela la íntima conexión entre la electricidad y el magnetismo, lo que se volvió fundamental para el desarrollo de tecnologías, sobre todo en la ingeniería, que han transformado nuestra sociedad, desde la generación de energía hasta las comunicaciones modernas.

Si deseáramos resumir las ecuaciones de Maxwell, el resultado sería el mostrado en la tabla 1.

Tabla 1. Ecuaciones de Maxwell

Ecuación	Forma Integral	Forma Diferencial
I	$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint \left[\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\vec{E}\right] dS$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\vec{E}$
II	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint \vec{B} \cdot d\vec{s}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \mu\vec{H}}{\partial t}$
III	$\varphi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \varepsilon\vec{E} = \rho_v$
IV	$\varphi_B = \oiint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \mu\vec{H} = 0$

Fuente: Propia

En nuestra experiencia académica, para los alumnos en general, resulta más fácil comprender la explicación de las formas diferenciales que de las integrales, a pesar de que en esencia ambas estructuras indican lo mismo. Por ello decidimos utilizar este formato al desarrollo de prototipos en los estudiantes de ingeniería en telecomunicaciones sistemas y electrónica.

ISSN 2448 – 7945

2. Desarrollo

2.1 Detección del problema

Las ecuaciones de Maxwell resumen en mucho el concepto de electromagnetismo actualmente utilizado a nivel industrial, si bien es cierto que ya existen computadoras cuánticas, de manera general en México al igual que en muchas otras partes del mundo estas tecnologías no son de uso cotidiano para los “simples mortales”, por ello, desarrollar un prototipo que permita valorar la importancia de las ecuaciones de Maxwell, brinda un gran apoyo para el desarrollo de los futuros ingenieros e ingenieras.

2.2 Experimento

Para fortalecer la comprensión de las ecuaciones de Maxwell. Se decidió desarrollar un prototipo que permitiera la mejor comprensión de su forma diferencial, resaltando la importancia que brinda esta herramienta matemática para los alumnos.

Un prototipo simple pero efectivo, fue considerar un vaso de unicel, con agua y con hielos para dar la explicación de la ecuación diferencial de Gauss para campos eléctricos, este experimento se plasmó en un video y se subió al canal de YouTube: Alumnos del Doctor Pedro. Ver Figura 1

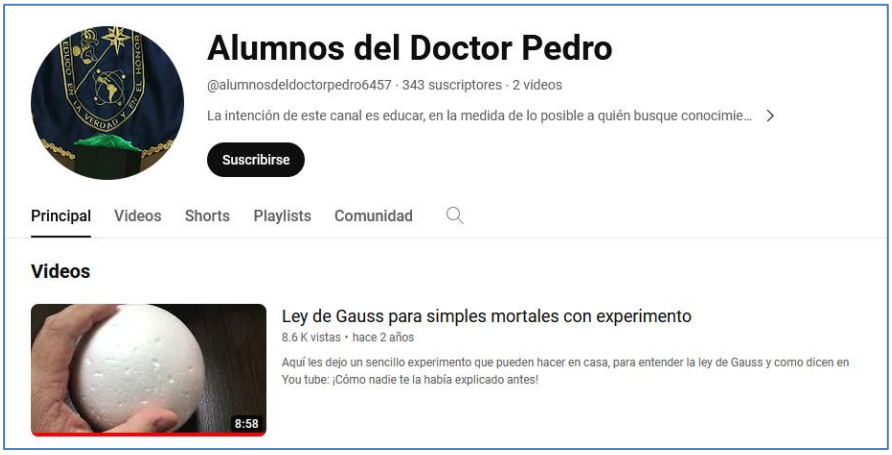


Figura 1. Experimento de la Ley de Gauss
Fuente: Propia

Por otro lado, se solicitó a los alumnos desarrollar un Generador Eléctrico para fortalecer las ecuaciones que relacionan campos eléctricos y magnéticos. Debido a que, el principio de operación de un generador se forma con el movimiento mecánico dentro de un campo magnético (que puede ser fijo) produciendo a su vez un campo eléctrico y con ello un voltaje. Ver Figura 2.

ISSN 2448 – 7945

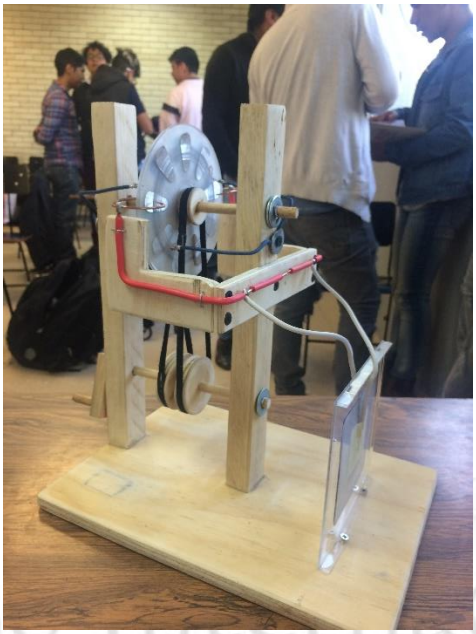


Figura 2. Presentación de prototipos
Fuente: Propia

3. Resultados y análisis

El objetivo de estos experimentos fue fortalecer la comprensión de las ecuaciones de Maxwell entre los alumnos, destacando la importancia de su forma diferencial mediante la realización de dos actividades prácticas.

Experimento del Vaso de Unicel con Agua y Hielo:
En este experimento, se utilizó un vaso de unicel lleno de agua y con hielos para ilustrar la ecuación diferencial de Gauss para campos eléctricos. Al sumergir los hielos en el agua, estos generan un gradiente de temperatura que crea una diferencia de densidad, generando así corrientes de convección en el agua. Estas corrientes pueden ser comparadas con los campos eléctricos, donde la ecuación de Gauss establece que el flujo a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada en esa superficie.

Análisis:
El experimento del vaso de unicel con agua y hielo proporciona una analogía visual y práctica para comprender la ecuación diferencial de Gauss. Los movimientos de las corrientes de convección en el agua simulan el comportamiento de los campos eléctricos en presencia de cargas eléctricas.
Al observar el flujo de agua y su relación con la distribución de los hielos, los alumnos pueden visualizar cómo el flujo a través de una superficie cerrada cambia con la cantidad de carga "encerrada" dentro de esa superficie, como dicta la ecuación diferencial de Gauss.

ISSN 2448 – 7945

Desarrollo del Generador Eléctrico:
En esta actividad, se solicitó a los alumnos desarrollar un generador eléctrico para fortalecer la comprensión de las ecuaciones que relacionan campos eléctricos y magnéticos. El principio de funcionamiento de un generador se basa en el movimiento mecánico dentro de un campo magnético, lo que genera un campo eléctrico y, por ende, un voltaje.

Análisis:
El desarrollo del generador eléctrico permite a los alumnos aplicar las ecuaciones de Maxwell en un contexto práctico. Al observar cómo el movimiento mecánico dentro de un campo magnético genera electricidad, los estudiantes pueden relacionar este fenómeno con las ecuaciones de Faraday y Ampère-Maxwell.
Este experimento proporciona una experiencia práctica invaluable que refuerza la comprensión teórica de las ecuaciones de Maxwell, mostrando cómo estas ecuaciones se aplican en dispositivos reales y cotidianos.

En resumen, tanto el experimento del vaso de unicel con agua y hielo como el desarrollo del generador eléctrico son herramientas efectivas para fortalecer la comprensión de las ecuaciones de Maxwell entre los alumnos, permitiéndoles visualizar y aplicar los conceptos teóricos en situaciones prácticas y tangibles.

4. Conclusiones

El desarrollo y ejecución de los experimentos propuestos para fortalecer la comprensión de las ecuaciones de Maxwell partiendo de su enfoque diferencial, han arrojado importantes conclusiones:

Ambos experimentos proporcionaron una valiosa oportunidad para visualizar de manera práctica los conceptos teóricos de las ecuaciones de Maxwell. La analogía del vaso de unicel con agua y hielo permitió a los alumnos comprender de manera intuitiva la relación entre el flujo de un campo eléctrico y la carga encerrada, mientras que el desarrollo del generador eléctrico les brindó una experiencia concreta de cómo el movimiento en un campo magnético genera electricidad.

Los experimentos demostraron la aplicación directa de las ecuaciones de Maxwell en situaciones cotidianas y tecnológicas. Desde la convección en un líquido hasta la generación de electricidad mediante un generador, los alumnos pudieron relacionar los conceptos teóricos con fenómenos reales, lo que refuerza su comprensión y apreciación de la importancia de estas ecuaciones en diversos campos de la ciencia y la ingeniería.

La realización de los experimentos incentivó a los alumnos a ser creativos y explorar nuevas ideas. Desde la manipulación de los hielos en el vaso de unicel hasta el diseño y construcción del generador eléctrico, los estudiantes tuvieron la oportunidad de

ISSN 2448 – 7945

experimentar y poner a prueba sus conocimientos, desarrollando habilidades prácticas y fomentando un enfoque activo hacia el aprendizaje.

Se observó un incremento significativo en la retención y comprensión de los conceptos relacionados con las ecuaciones de Maxwell entre los alumnos que participaron en los experimentos. La combinación de la enseñanza teórica con actividades prácticas resultó ser una estrategia efectiva para consolidar el aprendizaje y promover una comprensión profunda y duradera de los principios fundamentales del electromagnetismo.

En conjunto, estos experimentos demostraron ser herramientas efectivas para fortalecer la comprensión de las ecuaciones de Maxwell, proporcionando a los alumnos una base sólida y una apreciación más profunda de los principios que rigen el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos en la naturaleza y en la tecnología moderna.

Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

Agradecimientos

El primer autor agradece el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE103424.

5. Índice de referencias

- OpenAI. (2022). " Historia y evolución de las ecuaciones diferenciales". OpenAI GPT-3.5 [En línea]. Obtenido en Enero de 2024 de la dirección: https://www.openai.com/

ISSN 2448 – 7945

IMPORTANCIA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS EN ELECTROMAGNETISMO

Guzmán Tinajero Pedro[*1], Yáñez Hernández Adriana[2], Castro Fuentes Aide[3], Osorio Galicia Ramón[4]
[1,2,3,4] *Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. Carretera Cuautitlán-Teoloyucan Km 2.5. Cuautitlán Izcalli Estado de México. C.P. 54714.*

AP-POSM028

Resumen

En este artículo se considera la importancia de los números complejos en electromagnetismo y en la propia aplicación de desarrollos eléctricos y electrónicos, así como su potencial impacto en el desarrollo de la ingeniería actual.
Se considera algo de la historia de los números complejos, su impacto actual en circuitos eléctricos y electrónicos como el triángulo de potencias o la impedancia en electrónica. Se respalda con algunas aplicaciones actuales en la ingeniería específicamente en el área eléctrica y de las telecomunicaciones. Y se concluye con algunos datos de actualidad.

1. Introducción

Los números complejos han sido un tema de gran interés y estudio en el campo de las matemáticas a lo largo de la historia. Su desarrollo representa un hito significativo en el avance del pensamiento matemático, especialmente en la resolución de ecuaciones algebraicas que no tienen soluciones en el conjunto de los números reales.

Aunque, los matemáticos griegos, incluido Euclides, consideraban que las raíces cuadradas de números negativos no tenían sentido en el contexto de los números reales. A través de los años, surgieron en la solución de ecuaciones algebraicas, lo que planteaba un dilema, sobre todo en su interpretación.

Según OpenAI (2024), la noción de números complejos comenzó a tomar forma en el Renacimiento, con figuras destacadas como Gerolamo Cardano y Rafael Bombelli. Cardano, en particular, trabajó en la solución de ecuaciones cúbicas y cuárticas, lo que lo llevó a considerar raíces cuadradas de números negativos. Él mismo, introdujo el término "número imaginario" para describir las soluciones de ecuaciones cúbicas que no tenían soluciones reales. Estos números "imaginarios" eran raíces cuadradas de números negativos.

[1] *Autor para la correspondencia. E-mail:* PGCON-ACYT@GMAIL.COM

ISSN 2448 – 7945

Leonhard Euler desempeñó un papel crucial en el desarrollo de la teoría de números complejos. En el siglo XVIII, introdujo la notación estándar para representar los números complejos, utilizando la letra "i" para denotar la unidad imaginaria, además, utilizó números complejos para describir la dinámica de los cuerpos celestes en movimiento, proporcionando soluciones a ecuaciones diferenciales que modelaban órbitas planetarias y sistemas de cuerpos en interacción gravitatoria.

A lo largo de los siglos XVIII y XIX, matemáticos como Caspar Wessel, Jean-Robert Argand y William Rowan Hamilton desarrollaron el álgebra compleja y la geometría analítica de los números complejos, permitiendo una comprensión más profunda de sus propiedades y aplicaciones.

Considerando en la historia otras áreas del conocimiento como la física, a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, los números complejos se convirtieron en un elemento fundamental en el análisis de circuitos eléctricos. La notación fasorial, basada en números complejos, revolucionó la forma en que los ingenieros eléctricos modelaban y analizaban circuitos, sobre todo de corriente alterna, impulsando avances significativos en la tecnología eléctrica.

Ya en el siglo XX, con la llegada de la mecánica cuántica, los números complejos se integraron de manera integral en la formulación matemática de esta teoría. La función de onda cuántica, que describe el estado cuántico de un sistema físico, se expresa comúnmente en términos de números complejos, permitiendo una descripción precisa de fenómenos como la superposición cuántica y el entrelazamiento.

Actualmente en la física de partículas y la teoría cuántica de campos, los números complejos desempeñan un papel crucial en la formulación de la electrodinámica cuántica o como se le conoce en inglés: Quantum Electrodynamics (QED), una de las teorías fundamentales en la física moderna. La QED describe la interacción entre partículas cargadas y el campo electromagnético, utilizando números complejos en la representación de amplitudes de probabilidad y cálculos de corrección de interacción.

Para los fines de este artículo nos centraremos específicamente en el impacto que tienen los números complejos en el electromagnetismo, comenzando con la expresión de la impedancia en los circuitos alimentados con corriente alterna, éstos se analizan cotidianamente en los laboratorios de Física, por ejemplo, en circuitos formados por capacitores, inductores y resistencias.

1.1. Objetivo

Desarrollar un experimento de laboratorio, permitiendo valorar la importancia de los números complejos en el electromagnetismo.

ISSN 2448 – 7945

1.2. Problema

Se requiere un experimento de laboratorio, que demuestre de manera asertiva la importancia de los números complejos en el electromagnetismo.

1.3. Hipótesis

Si se cuenta con un experimento que los alumnos y alumnas desarrollen, en el laboratorio, se valorará la importancia de los números complejos en el electromagnetismo.

1.4. Estado del Arte

1.4.1. Reactancia e Impedancia

Según Guzmán (2022), “la reactancia eléctrica es el valor en unidades de Ohm, de la oposición que presenta un capacitor o un inductor al paso del flujo de cargas cuando se le alimenta con un voltaje de corriente alterna”. La reactancia es un valor representado por números imaginarios, denotados por la letra 'j' en lugar de 'i', (para evitar confusiones con la intensidad de corriente eléctrica).

En el estudio de circuitos eléctricos, alimentados por corriente alterna, un número complejo de mucha utilidad es la impedancia. Este se compone de una parte real, representada por la resistencia, y una parte imaginaria, presente tanto las reactancias capacitivas (X_C) como en las inductivas (X_L), las cuales están afectadas por la frecuencia angular ω.

Como dato curioso, es destacable señalar que la reactancia capacitiva y la reactancia inductiva se manifiestan matemáticamente con signos opuestos. Ver ecuación 1. Esta característica brinda la posibilidad de su anulación en la impedancia que no es otra cosa que una suma algebraica, dando lugar al fenómeno conocido como resonancia, dónde, a pesar de su existencia física, ambos valores se invalidan y solo existe la parte real (resistiva).

Ecuación 1 Impedancia. $\mathrm{Z} = R + \mathrm{j}\,\omega\,\mathrm{L} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}$

1.4.2. Triángulo de potencias

El triángulo de potencias es una representación gráfica que se compone de tres lados: la potencia real (P), la potencia reactiva (Q) y la potencia aparente (S) en un sistema eléctrico. La potencia real se mide en Watts (W) e indica la energía real transferida al sistema. La potencia reactiva se mide en volts-amperes reactivos (VAR) y representa la energía almacenada y devuelta al sistema en forma de campos eléctricos y/o

ISSN 2448 – 7945

magnéticos y finalmente la potencia aparente se mide en volts-amperes (VA) y muestra la magnitud total de la energía que fluye en el sistema. Ver Figura 1.

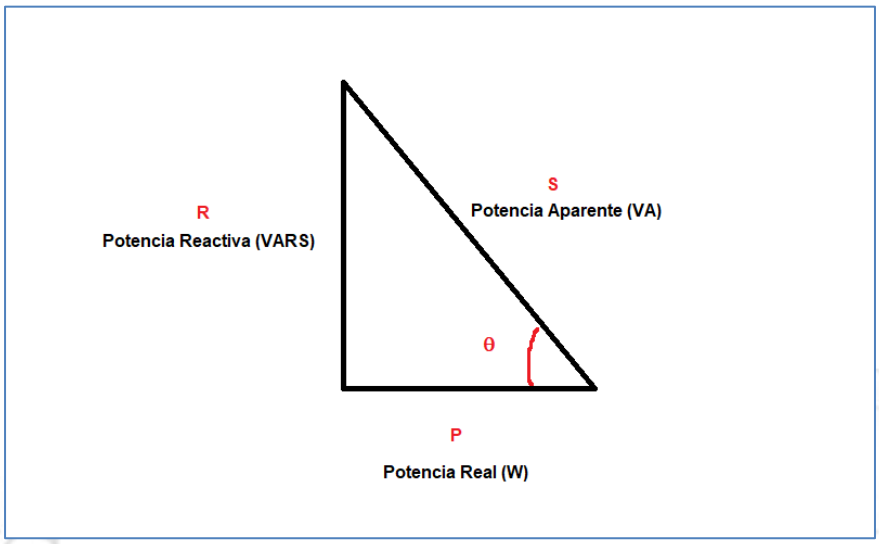


Figura 1. Triángulo de potencias. Fuente: Propia

El triángulo de potencias es muy útil para calcular y comprender las relaciones entre las tres formas de potencia. Partiendo del hecho de que la potencia aparente es un número complejo (por estar compuesta de elementos resistivos y reactivos) resulta visualmente amigable y sencillo medir la eficiencia con la que se utiliza la potencia en un sistema eléctrico, solamente obteniendo la función coseno del ángulo θ. Esta operación recibe el nombre de factor de potencia (fp).

En otras palabras, el triángulo de potencias se utiliza en el diseño y la optimización de sistemas de distribución de energía eléctrica. Permite a los ingenieros eléctricos identificar y corregir problemas de factor de potencia, mejorar la eficiencia energética y reducir los costos operativos en los sistemas eléctricos.

2. Metodología o desarrollo

2.1. Detección del problema

En la teoría de materias como electricidad y magnetismo, óptica o teoría electromagnética, es común el uso de números complejos, sin embargo, como suele suceder en gran parte de la población estudiantil, los principales errores en los exámenes no se deben a electromagnetismo persé, sino al propio desarrollo matemático que acompaña a los circuitos. Por ello, desarrollar un experimento en laboratorio que permita valorar la importancia de los números complejos en el electromagnetismo. Es de gran utilidad.

ISSN 2448 – 7945

2.2. Experimento

Para fortalecer la comprensión de los números complejos en el electromagnetismo. Se decidió desarrollar un experimento que permitiera la mejor comprensión de los números complejos y con ello, otorgar la importancia que brinda esta herramienta matemática para los alumnos.

Inicialmente se pidió a 3 grupos (de 5 alumnos cada uno), escribir en una cuartilla y en sus propias palabras, ¿Qué son los números complejos? Y ¿Cuál es su importancia en electromagnetismo?

Posteriormente, se colocó un generador de funciones conectado a un circuito RCL de ciertas características y se midió experimentalmente la corriente y el voltaje en cada elemento. Ver figura 2.



Figura 2. Conexión de un circuito RCL Fuente. Propia

Acto seguido, se pidió a los alumnos desarrollar los cálculos teóricos del circuito, para lo cual se les explicó brevemente el concepto de reactancia y frecuencia. Una vez estructurada la ecuación se les pidió la resolvieran a través de una ecuación con números complejos (impedancia) y se confrontaron los resultados con los experimentales.

Una vez que se observaron los resultados, se pidió a los alumnos explicar nuevamente con sus palabras, ¿Qué son los números complejos? Y ¿Cuál es su importancia en electromagnetismo? Además de ¿cuál fue la importancia de utilizar los números complejos en este circuito electromagnético?

ISSN 2448 – 7945

3. Resultados y análisis

Una vez que se desarrollaron estrategias como la planteada en este trabajo, se observó la mejor comprensión, por parte de los alumnos, de los temas que involucraban números complejos en el electromagnetismo, en este caso aplicado a la impedancia de un circuito RCL.

Además, se observó, en las respuestas de los alumnos, una mayor claridad al valorar la importancia de los números complejos en el electromagnetismo a través del ejercicio que confrontó su conocimiento teórico con los resultados obtenidos. Permitiéndoles observar de manera frontal la representación del número complejo en algo físico.

4. Conclusiones

La realización de un experimento diseñado para explorar la importancia de los números complejos en el contexto del electromagnetismo ha arrojado resultados significativos y reveladores.

Primero, se identificó que los errores más comunes en los exámenes relacionados con electromagnetismo no radican tanto en la comprensión de los conceptos electromagnéticos en sí, sino más bien en el desarrollo matemático utilizado en la resolución de problemas de circuitos eléctricos. Esto resalta la necesidad de una comprensión sólida de los números complejos en este campo.

El experimento propuesto consistió en involucrar a los estudiantes en la aplicación práctica de los números complejos en un circuito RCL, permitiendo así una mejor comprensión de su importancia en el electromagnetismo. Los resultados revelaron que esta estrategia mejoró significativamente la comprensión de los alumnos sobre el papel de los números complejos en el electromagnetismo.

Además, se observó una mayor claridad en las respuestas de los alumnos al evaluar la importancia de los números complejos en el electromagnetismo después de haber confrontado su conocimiento teórico con los resultados experimentales. Este ejercicio les permitió ver de manera directa la representación física de los números complejos en un contexto real.

En resumen, este experimento demostró ser una herramienta efectiva para fortalecer la comprensión de los números complejos en el contexto del electromagnetismo, brindando a los estudiantes una experiencia práctica y visual que complementa su aprendizaje teórico y les permite apreciar la relevancia de este concepto en la resolución de problemas reales en ingeniería eléctrica.

Agradecimientos

El primer autor agradece el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE103424.

ISSN 2448 – 7945

5. Índice de referencias

- OpenAI. (2022). " Historia y Evolución de los Números Complejos". OpenAI GPT-3.5 [En línea]. Obtenido en Enero de 2024 de la dirección: https://www.openai.com/

- Guzmán (2022), et all. Estudio práctico del Circuito RL en corriente directa y alterna. Memorias del Congreso Científico Tecnológico de las carreras de Ingeniería Mecánica Eléctrica, Industrial y Telecomunicaciones, sistemas y electronica. AÑO 7. No. 7. ISSN-2448-7236. SEPTIEMBRE 2022 – AGOSTO 2023.

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

OMISIONES Y ERRORES DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO CUANDO CONSTRUYEN HISTOGRAMAS

Martínez Pérez Sandra Areli[1*], Huerta Vázquez Miguel Ángel[2] y Lorenzo León Salvador[3]
[123]Colegio de Ciencias y Humanidades, plantel Azcapotzalco. Av. Aquiles Serdán 2060, Francisco Villa, Azcapotzalco. C.P. 02420. CDMX

IP-POSM029

Resumen

Se presenta una exploración sobre omisiones y errores que los estudiantes, de quinto semestre de bachillerato (17-18 años), presentan cuando construyen histogramas. Este tipo de gráficos, en general todos, son importantes porque a través de ellos se presenta la información resumida y se pueden observar tendencias descritas por los datos. Se solicitó a los estudiantes que construyeran el histograma (con sus respectivos procedimientos en tablas de frecuencias) a partir de un conjunto de datos dados, se observó que omiten uno o varios elementos que componen a un gráfico tales como el título, las etiquetas de los ejes y comenten errores como escribir mal las escalas en los ejes. Esto indica que se debe poner más énfasis en la enseñanza de la construcción de gráficos, en particular de histogramas, para que se pueda hacer una correcta interpretación de ellos, lo que permitiría una mirada crítica sobre los datos que se nos presentan en los diversos medios de comunicación, informes laborales o escolares.

Palabras clave: *Omisiones, errores, histogramas, etiquetas, escalas*

1. Introducción

Un término que ha surgido en los últimos años es el de cultura estadística, algunos autores como Garfield (1999) consideran que una componente importante de la cultura estadística es la comprensión del lenguaje estadístico y la capacidad de interpretar tablas y gráficos, así como poder dar sentido a los datos que aparecen en medios, encuestas, etc. Sin embargo, consideramos que, para poder realizar una correcta interpretación de los gráficos, es necesaria una correcta elaboración de ellos, lo que implica el desarrollo del razonamiento estadístico.

Garfield, et al., (2008) definen el razonamiento estadístico como la manera en que las personas argumentan las ideas estadísticas y le dan sentido a la información estadística. Por otra parte, Garfield (2002) lo define como la forma de razonar de las personas acerca de las ideas estadísticas y puede implicar conectar un concepto con otro, así como explicar procesos e interpretar resultados estadísticos.

[*] *Autor para la correspondencia. E-mail:* sandraareli.martinez@cch.unam.mx

ISSN 2448 – 7945

Por tanto, para una realizar una correcta interpretación de las gráficas es necesario primero una elaboración correcta de ellas, esto implica un conocimiento de los elementos necesarios de un gráfico (Arteaga, 2011):

- Título y etiquetas
- Marco, el cual consiste en los ejes, escala, marcas de referencia
- Los especificadores que dependiendo del gráfico son, cuadros, rectángulos, puntos, líneas, barras, etc.

En el programa de estudios 2016 del Colegio de Ciencias y Humanidades, el tema se encuentra ubicado en la Unidad 1. Obtención, descripción e interpretación de información estadística, donde los aprendizajes relacionados con el tema son (Colegio de Ciencias y Humanidades [CCH], 2016):

- Construye tablas de distribución de frecuencias, incorporando también el uso de la computadora, para describir el comportamiento de una variable.
- Construye gráficas, incorporando también el uso de la computadora para describir el comportamiento de una variable.

En la temática se contempla, gráfica de barras, gráfica circular, gráfica de caja, histograma de frecuencias, polígono de frecuencias, ojivas. Nuestro trabajo, en una primera etapa contempla observar los errores en la construcción de gráficas en particular en los histogramas.

Errores en la construcción de gráficas

Entenderemos por error a la manifestación externa (escrita, simbólica, algorítmica, gráfica, verbal, actitudinal, etc.) de los obstáculos que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Socas, 1997).

Los errores en la construcción de gráficas de acuerdo con Álvarez, et al. (2020) son:

- Elección incorrecta del tipo de gráfico en relación con la variable estadística que se está estudiando y la información que se quiere presentar de la misma y del conjunto de datos.
- La elección de las escalas de representación es poco adecuada en comparación con la cantidad de datos que se presentan.
- Omisión de las escalas de representación en ambos o algunos de los ejes.
- No especificar el origen de coordenadas ya sea para las frecuencias o para los valores que toma la variable estadística.
- Ausencia de suficientes divisiones en las escalas de los ejes que permitan dar claridad a la información que se presenta.
- Mezclar en un mismo gráfico datos que no son comparables.

2. Desarrollo

ISSN 2448 – 7945

Para el desarrollo del presente trabajo se aplicó un cuestionario a 10 estudiantes de quinto semestre (17-18 años) del CCH Azcapotzalco que cursan la asignatura de Estadística y Probabilidad I, y ya habían estudiado la unidad uno en la cual uno de sus temas es representaciones gráficas.

El cuestionario consistía en un problema en contexto, en el cual se proporcionaban datos, los cuales los estudiantes debían ordenarlos en una tabla de frecuencia para posteriormente hacer los respectivos cálculos y finalmente elaborar el histograma.

3. Resultados y análisis

Se presentan los resultados sobre la construcción de un histograma a partir de los datos dados en el siguiente problema en contexto.

1. Los siguientes datos corresponden a las edades en años de los mejores actores en una academia internacional que otorga ciertos premios durante su última premiación.

44	41	62	52	41	34	35	52	41	37
38	34	32	40	43	56	41	39	57	67
30	35	45	45	65	63	33	64	55	49
46	40	29	37	39	52	65	48	38	27
36	47	36	54	53	64	59	46	62	29

- Título y etiquetas

Para el histograma consideramos que el título adecuado sería “*Edades de los mejores actores en una academia internacional*”, en el eje horizontal la etiqueta “*Edades en años o Años*”, en el eje vertical la etiqueta “*Número de actores*”.

ISSN 2448 – 7945

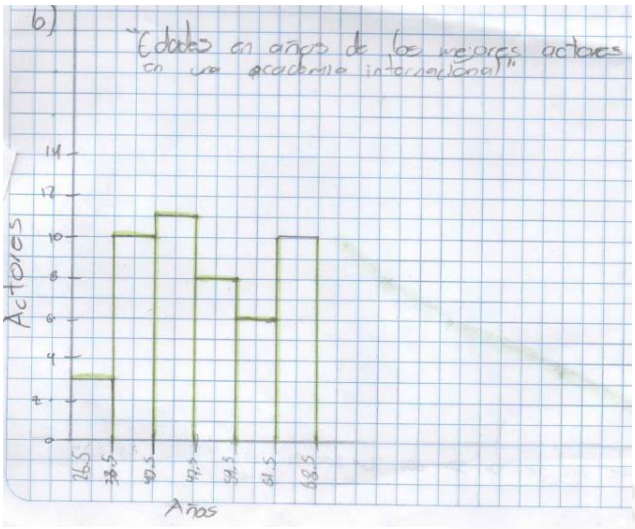


Figura 1. Ejemplo de un histograma con título y ejes etiquetados.

De los 10 estudiantes siete colocaron un título adecuado, de los cuales cuatro colocaron las etiquetas en ambos ejes (Figura 1). De estos últimos dos escribieron una etiqueta adecuada en los ejes, mientras que dos escribieron en el eje vertical la palabra *frecuencia o premios*. Dos estudiantes solo colocaron etiqueta en un eje, uno escribió una etiqueta adecuada en el eje horizontal, mientras que el otro etiquetó al eje vertical como porcentaje, lo cual es incorrecto. Finalmente, un estudiante no colocó etiquetas.

Tres estudiantes no colocaron un título del histograma, pero dos si colocaron etiquetas en ambos ejes, las cuales se consideran adecuadas. Un estudiante no colocó ni título ni etiquetas por lo que se considera que su gráfico no está completo y sería difícil de interpretar.

- Marco

Para las escalas en eje horizontal cinco estudiantes utilizaron los límites reales de clase, mientras que tres utilizaron los límites inferior y superior, esto se puede considerar como correcto. Dos estudiantes marcaron los intervalos (Figura 2). Las escalas utilizadas en el eje vertical se consideran correctas para los 10 estudiantes.

ISSN 2448 – 7945

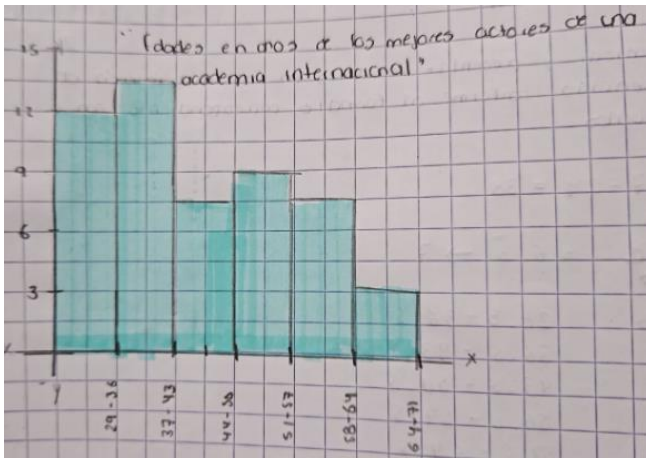


Figura 2. Ejemplo de un histograma con marcas y escalas en los ejes

- Especificadores

Tanto las Figuras 1 y 2 muestran que el especificador utilizado por los estudiantes fue un rectángulo.

En resumen, solo dos estudiantes realizaron de manera correcta el histograma, es decir, colocaron el título y etiquetas adecuadas y las graduaciones de los ejes adecuados.

4. Conclusiones

Como observamos en los resultados el 20% de los estudiantes realizaron un histograma de manera correcta, esto implica que son pocos los que tienen, aparentemente, el conocimiento necesario y son poco conscientes del proceso que implica su construcción, pues de acuerdo con Watson (2006) la importancia de las gráficas es que facilitan la transición entre el muestreo u obtención de datos y el cálculo de estadísticos.

En la enseñanza de gráficos se debe poner más énfasis en cuanto a las componentes que debe tener un histograma, y de los gráficos en general, mostrar a los estudiantes su importancia, ya que nos permiten una correcta lectura y realizar interpretaciones y generalizaciones de los datos (algo que implica tener una cultura estadística).

Una implicación de este trabajo es realizar la observación con un número mayor de estudiantes para conocer si las omisiones y errores en la construcción de los histogramas es generalizado o solo se trató de un caso aislado.

También buscaremos observar los gráficos que realizan los estudiantes con otro tipo de datos, por ejemplo, aquellos cuyos valores no son enteros, pues en la literatura

ISSN 2448 – 7945

(Arteaga, 2011) se menciona que un error común es la realización de gráficos con barras separadas.

5. Índice de referencias

Álvarez, I., Guerrero, Y. & Torres, Y. (2020). Taxonomía de errores y dificultades en la construcción e interpretación de tablas de frecuencias. *Zetetiké, 28*. 1-22. DOI: 10.20396/zet.v28i0.8656553

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números, 76*, 55-67.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking (pp. 397-409). Springer, Dordrecht.

Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades [ENCCH] (s.f.). *Modelo Educativo del Colegio de Ciencias y Humanidades*. ENCCH-UNAM https://www.cch.unam.mx/modelo

Colegio de Ciencias y Humanidades (2016). *Programa de estudios Estadística y Probabilidad I*. ENCCH-UNAM https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/programas2016/ESTADISTICA_PROBABILIDAD_I_II.pdf

Garfield, J. (1999). Thinking about statistical reasoning, thinking, and literacy. Trabajo presentado en el First Statistical Thinking, Reasoning, and Literacy (STRL-1). Tel-Aviv: Weizmann Institute of Science,

Garfield (2002) The Challenge of Developing Statistical Reasoning. *Journal of Statitics Education, 10*(3).

Garfield, J. B., Ben-Zvi, D., Chance, B., Medina, E., Roseth, C., & Zieffler, A. (2008). Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice. New York: Springer.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L, Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, España: Horsori.

ISSN 2448 – 7945

CHATBOT CONVERSACIONAL PARA EVALUACIÓN FORMATIVA EN LA ASIGNATURA DE ANÁLISIS NUMÉRICO.

Ramírez Carmona Ulises[1], [1]Flores Pérez Anahí[2*], González Olvera Marcos Ángel[3], Rodríguez Chávez Rosalba[4], Maya Ortiz Paul[5]
[1]*Universidad Técnica de Berlín*
Straße des 17. Juni 135 10623 Berlin, Alemania.
[2,3,4 y 5]*Facultad de Ingeniería, UNAM. Avenida Universidad 3000, Ciudad Universitaria, Coyoacán, CDMX. CP 04510 .*

ID-POSM030

Resumen

En este trabajo se propone la creación de un chatbot informático para favorecer la evaluación formativa recurrente e inmediata centrada en la asignatura análisis numérico. La herramienta descrita en este trabajo propone el uso de las tecnologías de la información y comunicación en combinación con algoritmos de generación masiva de reactivos y paradigmas informáticos que permiten la interacción persona-máquina para generar un chatbot que interactúa con los estudiantes para proveer y evaluar problemas de análisis numérico personalizados las 24 horas los 7 días de la semana. Este recurso es innovador en el área de chatbots para fines académicos pues está diseñado para fortalecer la ejercitación y práctica de destrezas y competencias. Con la implementación del chatbot en el trabajo dentro del aula se espera incrementar la evaluación formativa y los refuerzos positivos centrados en la asignatura así como fomentar la gestión autorregulada por parte del estudiante.

Palabras clave: *Chatbot, autogestivo, formativo, informático, reactivo, evaluación.*

1. Introducción

Dentro del complejo proceso de enseñanza-aprendizaje el aspecto de la evaluación ha sido dividido en tres categorías: evaluación diagnóstica, sumativa y formativa. La finalidad de esta última no es juzgar, sino favorecer la mejora del proceso didáctico (Mendiola, 2018). Aunque sus ventajas están claramente identificadas, un inconveniente en la aplicación recurrente de la evaluación formativa es la importante inversión de tiempo en diseñar, aplicar y realimentar los trabajos de un gran número de estudiantes por parte los y las docentes. Por ejemplo, en la asignatura Análisis Numérico adscrita a la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería, UNAM, se atiende semestralmente a aproximadamente 1700 alumnos en numerosos grupos (Facultad de Ingeniería UNAM, 2024).

Para abordar la problemática descrita, en este proyecto se propone el uso de las tecnologías de la información y comunicación para diseñar un chatbot con

[1] *Autor de correspondencia. Email: afloresperez@comunidad.unam.mx*

ISSN 2448 – 7945

potencialidades de evaluación que permita lograr: Objetivo 1. Aportar al estudiante una evaluación formativa frecuente. Objetivo 2. Incrementar los refuerzos positivos centrados en la asignatura. Objetivo 3. Fomentar el trabajo autorregulado por parte del estudiante.

La palabra chatbot surge de la suma de las raíces *chat*, que significa hablar o conversar, y *bot* que es la contracción de robot y engloba una serie de algoritmos capaces de ejecutar acciones y tareas. En otras palabras, un chatbot es una aplicación de software que simula mantener una conversación con una persona al proveer respuestas automáticas a las entradas específicas de un usuario. Aunque el uso de los chatbots se ha extendido y popularizado de tal forma que son comunes en la asistencia de compra, soporte técnico y solución de dudas frecuentes en bancos y compañías, las potenciales incursiones en el ámbito educativo aún están siendo extensivamente estudiadas (Wang et al., 2021).

Según su función (en ámbitos académicos), los chatbots se clasifican en dos: con y sin intencionalidad educativa. Los chatbots sin intencionalidad educativa se usan principalmente para orientar a los estudiantes en procesos administrativos y responder preguntas frecuentes. Dentro de la rama de chatbots con fines educacionales se encuentran a su vez dos subcategorías: aquellos con funciones de tutoría y los que implican ejercitación y práctica en adquisición de destrezas y competencias. La finalidad de los chats en la primer subcategoría es facilitar la orientación en el desarrollo de un perfil profesional y motivar el involucramiento del alumno en la vida estudiantil. Los chatbots para práctica y adquisición de destrezas presentan estímulos en forma de preguntas, ejercicios, retos o problemas que permiten al usuario lograr objetivos de aprendizaje (Shail, 2019), (García et al., 2018), (Nguyen et al., 2019). El chatbot desarrollado en el presente trabajo pertenece a esta subcategoría. Como ejemplos a nivel global es posible mencionar a *Duolingo* y *The guardian of History* cuyas finalidades son enseñar un nuevo idioma y enseñar historia a niños de entre 10 y 12 años, respectivamente, usando técnicas de ludificación (Shail, 2019).

La propuesta del presente trabajo se enmarca en el tipo de chatbots para adquisición y práctica de destrezas. La investigación bibliográfica que sustenta esta redacción indica que en la UNAM es difícil establecer el número de chatbots para práctica y afianzamiento de contenidos y que las herramientas más evidentes de este tipo son chats para dudas administrativas (por ejemplo, chatbot de dudas frecuentes para trámite de servicio social, División de Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ingeniería, UNAM en (Universidad Nacional Autónoma de México [UNAM], 2024)). El recurso descrito en este trabajo propone el uso de las tecnologías de la información y comunicación en combinación con algoritmos de generación masiva de reactivos y paradigmas informáticos que permiten la interacción persona-máquina para generar un chatbot que interactúa con los estudiantes para proveer y evaluar problemas de Análisis Numérico personalizados las 24 horas los 7 días de la semana. La metodología para implementar el chatbot se encuentra descrita en la sección 2. Los resultados preliminares y el análisis cualitativo del trabajo con el chatbot dentro del

ISSN 2448 – 7945

aula se encuentran esquematizados en la sección 3. Finalmente, en la sección 4 se presentan las conclusiones del trabajo.

2. Metodología o desarrollo

Para implementar el chatbot, la metodología se divide en tres procesos: diseño de reactivos para cada subtema del programa, generación de reactivos fuera de línea y operación del chatbot.

2.1 Diseño de reactivos para cada subtema del programa.

El diseño de reactivos se realiza tomando como base el temario de la asignatura Análisis Numérico. Es importante destacar que la metodología aquí descrita puede ser adaptada para generar chatbots de otros cursos mediante un diseño adecuado de reactivos. Para cada subtema del programa de la asignatura, se selecciona un aspecto específico de evaluación y se realiza una propuesta de reactivo tipo objetivo de opción múltiple. Este reactivo debe formularse en términos de coeficientes que puedan ser modificados dentro de un conjunto de combinaciones posibles. El cambio en dichos coeficientes permitirá, en la siguiente etapa de la metodología, generar múltiples preguntas a partir de un único modelo base de reactivo.

La redacción de reactivos en esta etapa debe incluir también instrucciones específicas para la selección de coeficientes, la solución paso a paso del reactivo y las indicaciones necesarias para la generación de las opciones de solución. Al realizar este proceso para cada uno de los subtemas del programa se logrará la creación de un número suficiente de preguntas para cubrir la totalidad del temario de la asignatura.

2.2 Generación de reactivos fuera de línea.

Una vez que se cuenta con los reactivos escritos en términos de coeficientes ajustables se tiene que realizar, para cada uno de ellos, un programa de cómputo que se encargue de: 1. Reemplazar los coeficientes ajustables por valores aleatorios, 2. Generar un problema único con solución y opciones de respuesta, 3. Crear dos archivos: una imagen .png del reactivo y un documento .pdf de su solución detallada, y 4. Repetir los pasos 1 a 3 un número de veces deseado. El proceso 1-4 tiene el objetivo de construir un número determinado de preguntas a partir del reactivo base. Las preguntas conformarán un banco de reactivos asociado a cada subtema del programa.

Es importante resaltar que el algoritmo que realiza las acciones 1-4 es exclusivo de cada reactivo pues la replicación de preguntas depende sensiblemente de su estructura y particularidades. En otras palabras, se deben generar tantos algoritmos como reactivos representativos de cada subtema. Al finalizar esta

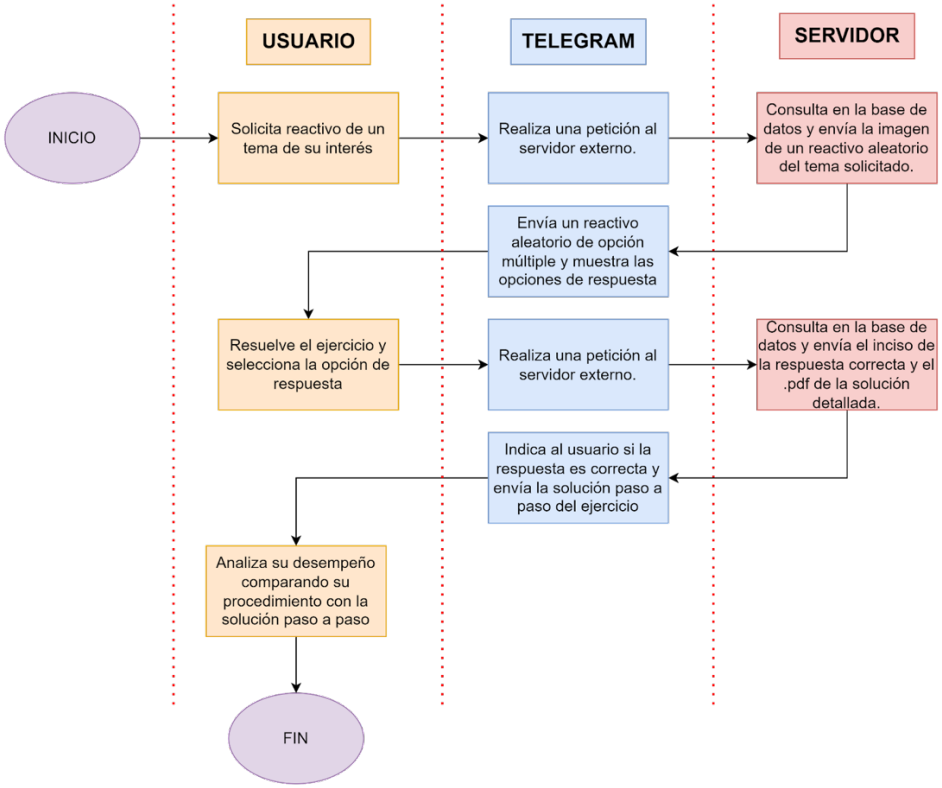
ISSN 2448 – 7945

etapa de la metodología, se contará con bancos de reactivos con solución detallada y opciones de respuesta para cada subtema del temario de la asignatura. En este punto ya se cuenta con todo lo necesario para la puesta en marcha del chatbot.

2.3 Operación del chatbot en línea.

Para construir el chatbot de Análisis Numérico, las imágenes .png de los reactivos y los archivos .pdf de las soluciones, ambos generados en el paso 3 del algoritmo descrito en la sección anterior, se encapsulan en una base de datos. Esta base es la encargada de gestionar información de almacenamiento de cada reactivo por ejemplo: tema y subtema, tipo de reactivo, respuesta correcta, ruta del reactivo y ruta de la solución detallada. A continuación es necesario programar un código informático que permita atender las peticiones de los usuarios realizando consultas en las bases de datos y enviando los archivos que sean requeridos. El intermediario en esta interacción es la aplicación de mensajería instantánea Telegram pues su uso es intuitivo, es fácilmente accesible y está disponible de forma gratuita para cualquier dispositivo móvil.

Los componentes previamente descritos así como los algoritmos que permiten el intercambio de reactivos con los usuarios constituyen los elementos básicos de funcionamiento del chatbot el cual se describe a detalle a manera de diagrama de flujo en la Figura 1.



ISSN 2448 – 7945

Figura 1. Diagrama de flujo que describe la operación en línea del chatbot de Análisis Numérico.

3. Resultados y análisis

3.1 Resultados

El chatbot de Análisis Numérico puede ser consultado de forma abierta, sin costo ni registro en el enlace https://t.me/PreguntasAnalisisNumericoBot. Cuando se ingresa al chatbot, se muestra un menú que ofrece en primer lugar un enlace con información de ayuda que facilita el manejo del chatbot. Debajo de este enlace aparecen los diferentes temas del programa. En la Figura 2 se muestra el menú general de inicio con el enlace de ayuda al inicio de la lista y los diferentes temas del programa.

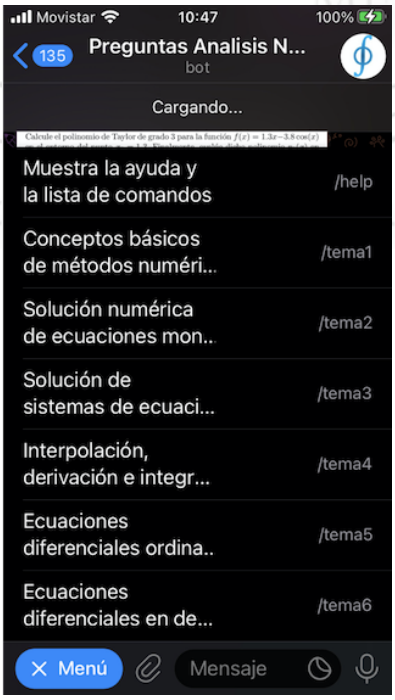


Figura 2. Menú general del inicio del chatbot de Análisis Numérico.

Al seleccionar algún tema del programa para empezar a trabajar se despliega la pregunta “¿Qué ejercicio quieres resolver?” y un nuevo menú que solicita el subtema específico. En este paso el menú incluye la opción “Aleatorio Tema *n*” cuya finalidad es ofrecer un reactivo de trabajo de cualquier subtema lo cual es conveniente una vez que se ha abordado el tema completo en el aula. Al elegir el subtema, el chatbot envía la imagen de una pregunta aleatoria extraída del banco de reactivos asociado a ese subtema así como una lista con 4 opciones de respuesta que queda a la espera de una selección por parte del usuario. En este paso, el estudiante resuelve el problema y marca una elección con lo cual el chatbot evalúa de forma automática. En la Figura

ISSN 2448 – 7945

3 se muestra el menú de subtemas, la pregunta del subtema elegido que el chatbot envía al usuario y la selección que el estudiante hace para responder la pregunta. Se muestra además la manera como el chatbot evalúa de forma inmediata, en este caso marca la respuesta como errónea.

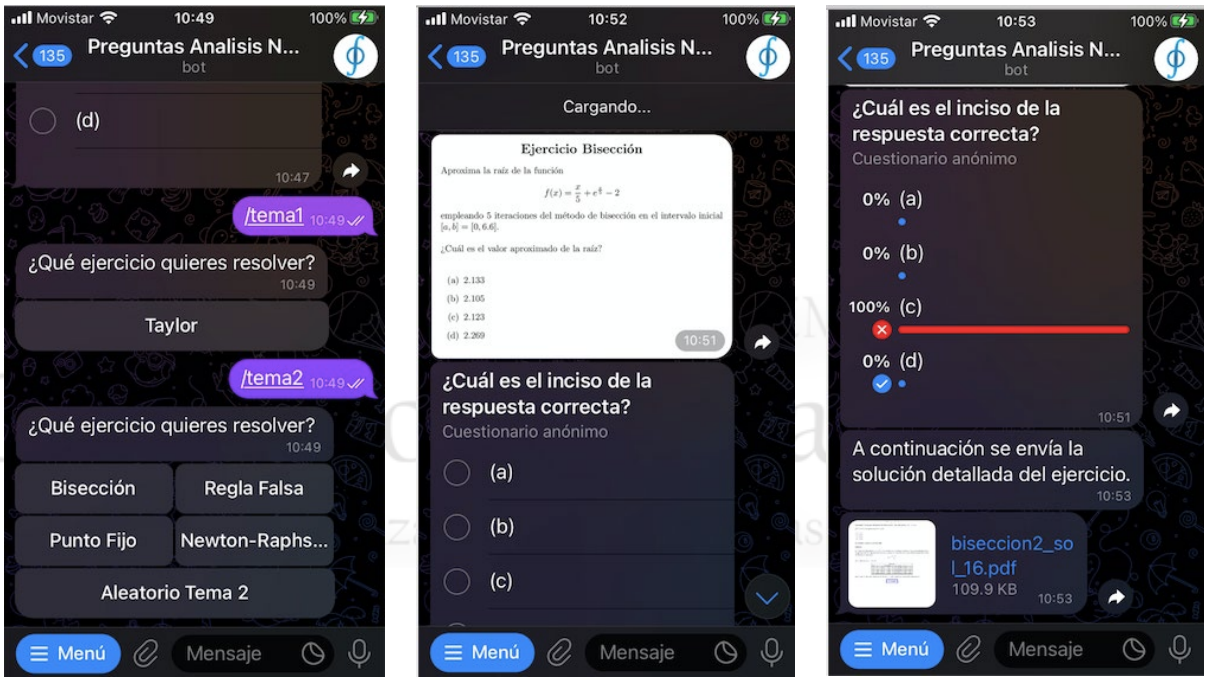


Figura 3. Imagen en el extremo izquierdo: menú de selección del subtema de trabajo. Imagen central: envío por parte del chatbot de una pregunta aleatoria del subtema seleccionado. Imagen en el extremo derecho: selección de respuesta por parte del usuario y evaluación automática por parte del chatbot.

Para finalizar el proceso, el chatbot envía un archivo .pdf que contiene la solución a detalle del problema (ver Figura 3, imagen del extremo derecho). Con este documento el estudiante puede llevar a cabo una realimentación autogestiva pues le permite realizar una comparación de su proceso con el cálculo completo.

3.2 Análisis

Los primeros hallazgos de uso del chatbot son obtenidos con base en resultados, por el momento, cualitativos. Como a trabajo a futuro se propone implementar un conjunto formal de herramientas de evaluación para determinar con certeza la capacidad del chatbot para lograr: Objetivo 1. Favorecer la evaluación formativa constante, Objetivo 2. Incrementar los refuezos positivos centrados en la asignatura y Objetivo 3. Potenciar el trabajo autogestivo del estudiante, anteriormente establecidos en la sección introductoria de este trabajo.

ISSN 2448 – 7945

A continuación, se describen algunas opiniones expresadas por un grupo de estudiantes de 45 personas, derivadas del uso del chatbot como herramienta de práctica de ejercicios en el aula, agrupadas respecto al objetivo al que pueden favorecer.

- Objetivo 1: los estudiantes reportan que favorece a la autoevaluación con fines de ajuste pues al recibir evaluación correcto/incorrecto y un documento con un precedimiento completo, corrigen sus propios errores.
- Objetivo 2: el grupo reporta que siente seguridad para estudiar sobre la asignatura porque se cuenta con una herramienta confiable y fácilmente accesible.
- Objetivo 3: los estudiantes expresan sentirse más responsables de su propio progreso pues cuentan con una herramienta de acceso ininterrumpido a la práctica de Análisis Numérico.

4. Conclusiones

En este trabajo se diseñaron reactivos representativos de cada subtema del programa de Análisis Numérico de la Facultad de Ingeniería, UNAM. Los reactivos planteados fueron escritos en términos de coeficientes ajustables que, al variar de forma aleatoria, permiten generar un número de preguntas deseado asociadas a un subtema. Los conjuntos de preguntas asociadas a cada subtema son organizados en bancos los cuales fueron dispuestos en una base de datos. Diferentes algoritmos fueron programados para permitir la interacción entre los reactivos almacenados en las bases de datos y los usuarios. Los algoritmos que hacen posible este intercambio son implementados en la aplicación de mensajería instantánea Telegram que es intuitiva y fácilmente accesible para cualquier dispositivo móvil.

Finalmente, se presentan resultados preliminares del uso del chatbot en el aula basados en opiniones de un grupo de 45 estudiantes. Como trabajo a futuro se propone el diseño de un conjunto de herramientas de evaluación formal que permita determinar las capacidades del chatbot para lograr los objetivos 1-3 planteados en la sección introductoria.

Agradecimientos

Los autores agradecemos el apoyo al proyecto UNAM-DGAPA-PAPIME PE105724.

5. Índice de referencias

1. Mendiola, M. (2018). La evaluación del aprendizaje de los estudiantes: ¿es realmente tan complicada? *Revista Digital Universitaria (RDU)*. *Vol. 19* (n° 6). http://doi.org/10.22201/codeic.16076079e.2018.v19n6.a1

ISSN 2448 – 7945

2. Facultad de Ingeniería, UNAM. (2024). *Análisis numérico. Ciencias aplicadas.* Análisis numérico – DCB. https://dcb.ingenieria.unam.mx/index.php/coordinaciones/ciencias-aplicadas/matematicas-aplicadas/analisis-numerico/
3. Wang, J., Hwang, G., & Chang, C. (2021). Directions of the 100 most cited chatbot-related human behavior research: A review of academic publications. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 2, 1–12. https://doi.org/10.1016/j.caeai.2021.100023
4. Shail, M. S. (2019). Using micro-learning on mobile applications to increase knowledge retention and work performance: A review of literature. *Cureus*, *11*(8). https://doi.org/10.7759/cureus.5307
5. García Brustenga, G., Fuertes-Alpiste, M., & Molas-Castells, N. (2018). *Briefing paper: Chatbots in education*. eLearn Center, Universitat Oberta de Catalunya. https://openaccess.uoc.edu/bitstream/10609/80185/6/BRIEFING_PAPER_CHATBOTS_EN.pdf
6. Nguyen, H., Pham, V., Tran, D., & Le, T. (2019). Intelligent tutoring chatbot for solving mathematical problems in High-school. *2019 11th International Conference on Knowledge and Systems Engineering (KSE)*, 1-6. https://doi.org/10.1109/KSE.2019.8919396
7. Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). (2024). *Coordinación de Titulación y Servicio Social.* División de Ingeniería Eléctrica (DIE). https://odin.fib.unam.mx/ctyss/

ISSN 2448 – 7945

APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS: ENFOQUE EN EL ANÁLISIS ESTADÍSTICO EN PSICOLOGÍA

González Beltrán Luis Fernando[1]* y Rivas García Olga
[1]*FES Iztacala, UNAM. Av. De los Barrios 1, Los Reyes Iztacala, Tlalnepantla, Estado de México.*

AP-POSM031

Resumen

En la educación superior se debe fomentar la solución de problemas, dejando de lado la repetición acrítica (Fink, 2003). Esto es de mayor relevancia cuando se trata de cuestiones que incluyen las matemáticas, como en el uso de la estadística. En el caso de la carrera de Psicología, además de su aprendizaje sobre temas teóricos y conceptuales, hay que enfatizar su preparación en probabilidad y estadística, que es un dispositivo clave dentro del proceso de llevar a cabo intervenciones y determinar su efectividad (González y Rivas, 2016). Esta carrera tiene problemas de reprobación, principalmente en el área metodológica, donde se entrena el análisis estadístico (Mares et al., 2013). Considerando que el salón tradicional no permite la variedad de contextos donde pueda darse un aprendizaje significativo, que la tecnología amplía y además tiene un efecto por hacer más activo al estudiante (Fink, 2003), aquí combinamos la situación didáctica en el aula, con la enseñanza virtual en una plataforma Moodle, en un entrenamiento en toma de decisiones estadísticas para la solución de problemas de investigación en Psicología. Como problema se asignó un artículo de investigación ya publicado para su análisis estratégico, centrando el enfoque en el análisis estadístico utilizado por el autor. Los participantes, un grupo de sexto semestre, de psicología, fueron entrenados en forma virtual en la estrategia de análisis de textos (Santoyo, 2001) y se profundizó en las categorías relacionadas con la estadística. Después del curso los estudiantes fueron capaces de realizar análisis cada vez más completos, con una mejora en sus habilidades de análisis estadístico medidas mediante un examen. Además, se logró que se propusieran mejoras..

Palabras clave: *Aprendizaje, problemas, competencias, estadística, estudiantes, psicología.*

1. Introducción

Las matemáticas, y en concreto la estadística, se utilizan en otras disciplinas para solucionar problemas. Y es precisamente lo que se busca en la educación superior: el razonamiento y la solución de los problemas que enfrenta en su práctica profesional. Para intentar que los alumnos desarrollen procesos complejos Fink (2003) ha propuesto dos soluciones: a) hacer uso de las nuevas tecnologías de información; y b) incluir actividades con diferentes niveles de complejidad a las que se enfrente el alumno. El primer cambio, por sí solo, nos ha quedado a deber. Ya los dos juntos buscan lograr la transferencia del aprendizaje,

[1] **Autor para la correspondencia. E-mail: luisfgb0616@gmail.com Tel. 55-41-88-04-86*

ISSN 2448 – 7945

y no quedarse solo con el dominio de los contenidos teóricos, sino abarcar las habilidades metodológicas, o procedimentales con las que los estudiantes se enfrentarán a los problemas de su profesión. En el caso particular de la Psicología, Santoyo (2001) ha desarrollado una técnica de análisis de textos, que promueve el análisis, la evaluación y la comprensión de los textos que se tienen que revisar en dicha carrera, con bastante éxito (Espinosa, Santoyo & Colmenares, 2010). En nuestro laboratorio hemos extendido esta metodología, encontrando diferencias entre pre- y postest al aplicar un cuestionario sobre la aplicación de la estadística (González y Rivas, 2016). En este trabajo cada texto se enmarcaba como un problema, que debería resolverse evaluando el análisis estadístico de los autores, a la vez que se entrenaba la capacidad lectora. Con este fin se diseñó una experiencia instruccional añadiendo a la clase un curso virtual en Moodle y que contempla la discusión guiada de las categorías relacionadas con la estadística.

2. Metodología o desarrollo

El objetivo que perseguimos es someter a prueba un curso virtual en las habilidades estadísticas de alumnos de psicología, donde seis artículos publicados se proponen como problemas a resolver, al evaluar la pertinencia de sus diseños de intervención, de las pruebas estadísticas y de las conclusiones de los autores de los artículos.

2.1 Participantes

Dos grupos de Psicología de sexto semestre, del sistema a distancia.

2.2 Materiales e Instrumentos

- Se utilizaron seis artículos como materiales de análisis.
- Se utilizaron cuatro pruebas, 1) el cuestionario global de conocimientos sobre metodología y estadística desarrollado en González y Rivas (2016), para la evaluación individual pretest-postest, 2) un cuestionario de preguntas abiertas para contestar en grupo sobre los temas estadísticos de cada lectura, 3) el mismo cuestionario anterior, pero con preguntas de opción múltiple, para evaluación individual y 4) un cuestionario de aplicación individual, para entrenamiento sobre la estrategia de análisis de textos.
- Las actividades para cada lectura, incluía las categorías de análisis estratégico, que se modificaron de las presentadas por Cepeda, Santoyo y Moreno (2010). Cada categoría se calificaba de acuerdo con un puntaje de hasta 3, y en aquellos casos en que requieren deducir, evaluar e integrar, de hasta 5, cuando responde de forma creativa y va más allá del texto. Con un total de 10 categorías, se calculó un índice de precisión, dividiendo el puntaje que obtenía cada alumno, entre 30.

ISSN 2448 – 7945

2.3 Procedimiento

Se contestó el cuestionario global (c1) como pretest. Enseguida se trabajó en la plataforma Moodle, donde estuvieron en entrenamiento, y contestaron el cuestionario de entrenamiento (c4). A continuación, tenían una lectura por semana, y deberían aplicar las categorías de análisis al artículo. Después de cada lectura, se abría un foro en la plataforma con el cuestionario (c2). Al cerrarse el foro se pedía contestar individualmente el cuestionario (c3) y se instigaba a que cada uno propusiera cursos alternativos. Al término de los análisis de las seis lecturas, contestaron nuevamente el cuestionario global (c1) como postest.

3. Resultados y análisis

Se graficó el índice de precisión promedio, conforme avanzaban las sesiones, como se puede apreciar en la Figura 1. El índice inicial fue de .45, y creció hasta .96 para la última sesión, con diferencias significativas (prueba t, p = 0.002). En el primer foro, se requirió de mucha instigación para contestar las preguntas. Ya para el cuarto foro, casi no había respuestas incorrectas y surgieron propuestas novedosas.

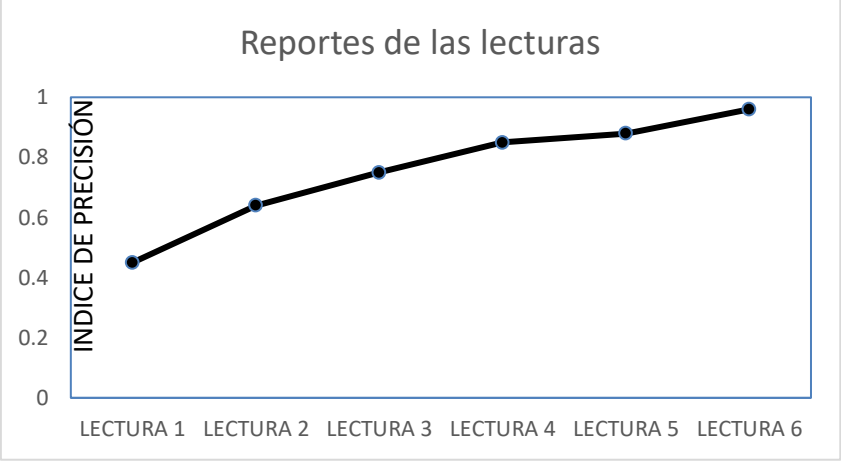


Figura 1. Muestra el índice de precisión promedio para los reportes de las lecturas de los alumnos.

Con respecto a la prueba de opción múltiple (cuestionario c3), el promedio inició en dos respuestas correctas, y de la misma forma, solo se alcanzaron 6.3 respuestas correctas hasta el cuarto foro, terminando en 7.5 y 8.1. Para mostrar el efecto en el cuestionario global (c1), se muestran los puntajes alcanzados, en la Figura 2. El puntaje en el Pretest fue relativamente bajo, mientras que en el Postest subió. Las diferencias fueron significativas (t = -15.348, p > .0009).

ISSN 2448 – 7945

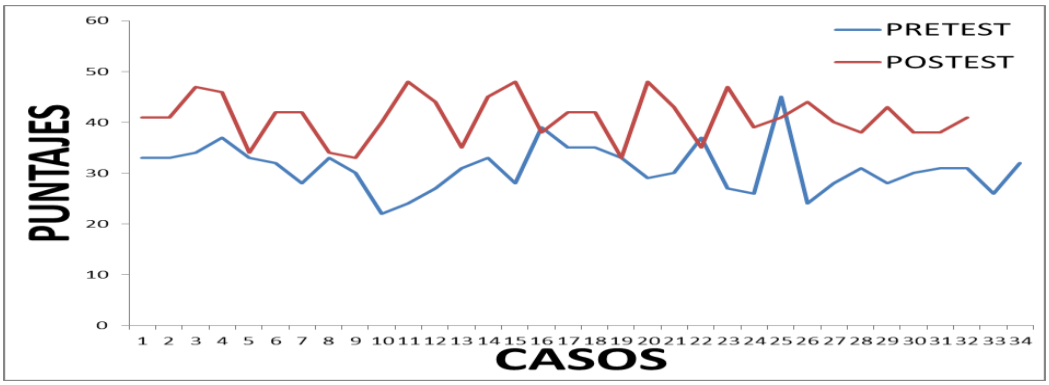


Figura 2. Puntajes individuales del cuestionario global (c1) antes y después del entrenamiento.

4. Conclusiones

Como lo muestran los resultados, el curso fue exitoso al aumentar las habilidades estadísticas de los alumnos de Psicología. Con un inicio de algo más del 40% de precisión en el análisis de los artículos correspondientes a sus materias, se logró un incremento a 59% para la segunda lectura, y un incremento de 50%, de la primera a la última lectura. Usualmente, se enseñan los conocimientos metodológicos y estadísticos, y luego se pide que se demuestre su uso correcto en prácticas. Aquí proponemos una opción intermedia, la crítica de su uso en investigaciones publicadas, antes de esperar que el alumno sea capaz de diseñar todo un proyecto.

Al contrario de muchos trabajos sobre problemas de razonamiento estadístico, o de campos específicos, como medidas de tendencia central, correlación, etc., aquí preferimos enfocarnos en el proceso de enseñanza aprendizaje, considerando la estadística como una disciplina cuya aplicación es dentro de un contexto más amplio, en este caso, la investigación. Se presentó aquí un estudio que aumenta la generalidad del Modelo de Análisis Estratégico de Textos.

5. Índice de referencias

- Cepeda, M. L., Santoyo, C. y Moreno, D. (2010). Base Teórica y descripción de la estrategia de análisis de textos. En M. L. Cepeda y M. R. López (Coordinadoras). Análisis Estratégico de Textos: Fundamentos Teóricos-Metodológicos y Experiencias Instruccionales. (pp. 49 - 110). México: UNAM.
- Espinosa, J., Santoyo V. y Colmenares L. (2010). Mejoramiento de habilidades de análisis estratégico de textos en estudiantes universitarios. Revista Mexicana de Análisis de la Conducta, 36 (1), 65-86.
- Fink, L. D. (2003). Creating significant learning experiences: An integrated approach to designing college courses. USA. John Wiley & Sons.
- González B., L. F. y Rivas G, O. (2016). Conducta compleja en contextos de solución de problemas: La estadística. En M. L. Cepeda & M. R. López

ISSN 2448 – 7945

(Coordinadoras). Conducta Compleja: Fundamentos teóricos y aplicaciones educativas. (pp. 199 - 242). México: UNAM.

- Santoyo, C. (2001). Alternativas docentes. Vol. II. Aportaciones al estudio de la formación en habilidades metodológicas y profesionales en las ciencias del comportamiento. México: PAPIME, UNAM.

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

DIFICULTADES DE COMPRENSIÓN DE LA SUMA DE FRACCIONES EN ALUMNOS DE BACHILLERATO

Caballero Barrera Sergio[1]*.
[1]*Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, C.P. 42184.*

IP-POSMO32

Resumen

Se identifican las dificultades de comprensión de la suma de fracciones en alumnos de un bachillerato público, ubicado en una zona semiurbana del estado de Hidalgo, México. La revisión de la literatura permitió identificar que la mayoría de las investigaciones se han realizado con estudiantes de primaria, por lo que hace falta analizar las dificultades que persisten en estudiantes de bachillerato. Las principales dificultades identificadas son que los estudiantes transfieren, de manera incorrecta, las propiedades de las operaciones con números enteros a las fracciones, lo que es evidencia de una conceptualización errónea o incompleta de la fracción (Lamon, 2020). El referente teórico del estudio son las diferentes interpretaciones de una fracción propuestas por Lamon (2020) y Lesh & Bradbard (1976). Se eligieron y adaptaron nueve problemas verbales que involucran suma de fracciones, retomados de artículos de investigación y de páginas de internet. Los problemas incluyeron fracciones propias, impropias y mixtas. Los participantes de la investigación fueron 10 estudiantes voluntarios (cinco hombres y cinco mujeres) de tercer semestre de bachillerato, quienes resolvieron los problemas en una sesión de una hora, durante el semestre julio-diciembre 2023; además, se les otorgó un punto extra por su participación. Las fuentes de recolección de la información fueron las producciones escritas de los participantes, a partir de las cuales se identificaron los errores que cometieron al sumar fracciones. También se trató de establecer cuáles son las fuentes de tales errores, para de ahí deducir las posibles dificultades de comprensión. Entre los principales resultados se destaca que los errores más comunes que cometen los participantes, al sumar fracciones son, la adición de los denominadores en sumas con diferente denominador, así como el uso parcial del algoritmo estándar en combinación con otros procedimientos, lo cual es indicador de una falta de comprensión de la fracción como un número.

Palabras clave: *Fracciones, Suma, Comprensión, Dificultades, Bachillerato.*

1. Introducción

Las fracciones se presentan a los niños cuando estudian el nivel básico (primaria); en México, cuyas edades oscilan entre los ocho y diez años (Reséndiz & González, 2018). Además, se mantiene la enseñanza y aprendizaje de la suma de fracciones al primer grado de secundaria, multiplicación y división de fracciones al segundo grado de secundaria cuando los niños cuentan con edades de 13 o 14 años (Alberro & García, 2018; García, 2019). En estudios realizados en educación primaria se reportan dificultades para identificar y comprender las fracciones (Cortina, Cardoso & Zúñiga, 2012; Gabriel, Coché, Szucs, Carette, Rey, & Content, 2013; Braithwaite, Tian & Siegler, 2017), así como en investigaciones realizadas

[1] *Autor para la correspondencia. E-mail: ca477756@uaeh.edu.mx*

ISSN 2448 – 7945

en secundaria también fueron identificados hallazgos sobre la dificultad de la transición de números enteros a fraccionarios (Capilla, 2016; Jarrah, Wardat & Gningue, 2022).

El presente trabajo tiene como finalidad el identificar las dificultades de comprensión de la suma de fracciones en alumnos de tercer semestre de bachillerato, ya que se ha detectado en la escuela donde se realizó el estudio que, cuando los profesores abordan temas de algebra, geometría analítica y calculo que involucran a la suma y multiplicación de fracciones, los estudiantes manifiestan dudas y cometen errores en su manejo, desarrollo y simplificación.

Lamon (2020) afirma que los cambios bruscos en primaria del uso de la unidad y su significado, al hecho de que debe dividirse cuando se abordan las fracciones, contribuyen a una gran confusión en los niños, causándoles dificultades en el entendimiento y comprensión de las fracciones. Considerando lo anterior, la fracción es un número que se escribe mediante dos enteros en forma bipartita $\frac{a}{b}$, entonces el decir la palabra fracción es escribir dos números con una barra entre ellos en el que el número superior de la fracción se llama numerador y el de abajo, denominador (Lamon, 2020). Las fracciones pueden ser sumadas, restadas, comparadas, etc., a las cuales se les considera como operadores multiplicativos, cocientes, como medidas, puntos en una recta. Para la suma de fracciones, el algoritmo se obtiene de considerar a la fracción como un cociente $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros, y b es diferente de cero, además a y b representan soluciones de un campo de ecuaciones de la forma $bx = a$ (Lesh & Bradbard, 1976).

En la aplicación del instrumento integrado por problemas verbales, que para su resolución es necesario el empleo, comprensión y uso de la suma de fracciones, los alumnos que realizaron la prueba, evidenciaron en sus producciones escritas en papel errores en la utilización del algoritmo estándar de la suma de fracciones confundiéndolo con el algoritmo de la multiplicación. Así mismo se identificó que los estudiantes prefieren realizar la conversión de las fracciones a números decimales o números mixtos para después realizar las sumas.

2. Metodología o desarrollo

En la metodología se describe la conformación del instrumento que se utilizó para recolectar la información en el que los alumnos contestaron evidenciando su comprensión de la suma de fracciones y la forma en que la afrontan, se desarrolla el proceso general para aplicar el instrumento de exploración para identificar las dificultades de comprensión de la suma de fracciones que evidencian los alumnos de bachillerato. A continuación, se comunica el proceso que se realizó para aplicación de la prueba con que se recolecta la información.

ISSN 2448 – 7945

La prueba se aplicó a estudiantes de tercer semestre de un bachillerato público que está localizado en el estado de Hidalgo, México. Los alumnos fueron seleccionados al azar de un grupo que estuvo integrado de 31 alumnos cuyas edades están entre los 16 y 18 años quienes viven y estudiaron la educación secundaria en ambientes diversos como lo son el urbano, semiurbano y rural. El instrumento que se utilizó para explorar las dificultades en la suma de fracciones de la forma $\frac{a}{b}$, se integró con problemas verbales los cuales fueron diseñados por el autor después de revisar materiales que se pueden consultar en páginas de internet (Zita & Arellano, 2023), en libros de aritmética (Aguilar, Bravo, Gallegos, Cerón & Reyes, 2009; Baldor, 1983) que se tomaron como ejemplo, y se elaboraron problemas que tuvieran características específicas como lo son la suma de dos fracciones propias que tienen mismo denominador y otras con diferente denominador, la suma de dos fracciones impropias que también tengan mismo denominador y otra con diferente denominador, así como el diseño de problemas en los que se incluyen números mixtos (números mixtos: aquellos números conformados por una parte entera y una fracción de la forma $\frac{a}{b}$, siendo a y b enteros diferentes de cero) en los que también se consideran las fracciones propias e impropias. Finalmente se incluyeron problemas en los que la suma se podría repetir más de dos veces la misma fracción y otro donde se le pide al alumno reflexionar y encontrar la variación del valor de una fracción. En la tabla 1 se presentan algunos problemas que se incluyeron en la prueba.

Tabla 1. Problemas verbales que involucran fracciones

No. de problema	Problema
1	Alejandra comió $\frac{2}{10}$ de pastel en el desayuno, $\frac{3}{10}$ en el almuerzo. ¿Cuánto pastel comió en total?
4	Daniel corrió $\frac{11}{4}$ de km en la mañana y $\frac{28}{7}$ de km en la tarde. ¿Cuánto corrió en total?
5	Paola tiene 12 $\frac{3}{5}$ metros de tela de color azul y 9 $\frac{1}{5}$ metros de tela color blanco para hacer unas sábanas, ¿cuántos metros de tela tiene en total?
9	¿Cuánto aumenta o disminuye $\frac{7}{9}$ si añadimos 1 al numerador y 4 al denominador?

2.1 Aplicación de la prueba

La prueba se aplicó a estudiantes de tercer semestre de bachillerato que tenían entre 16 y 17 años de edad y a uno de cuarto semestre de 18 años, siendo cinco hombres y cinco mujeres en una sesión del curso de geometría y trigonometría. La sesión de aplicación se llevó a cabo en un salón regular y en una clase regular durante el semestre julio-diciembre de 2023, en la que el aplicador fue el profesor titular de asignatura. Los

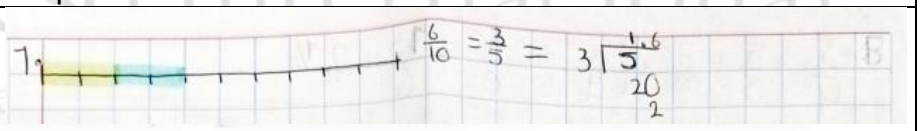
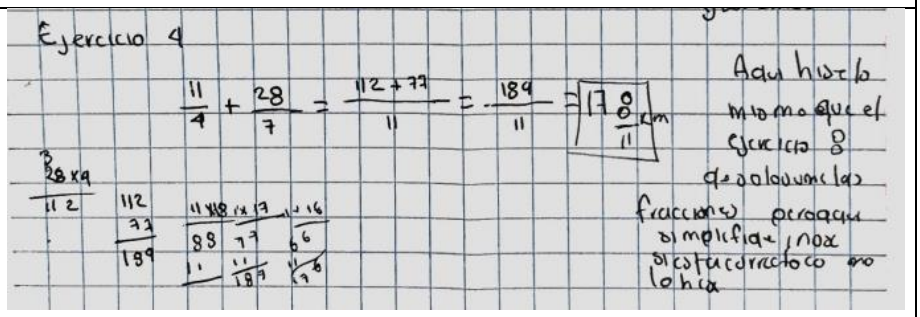
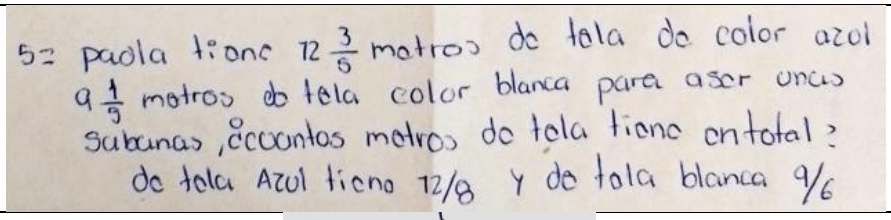
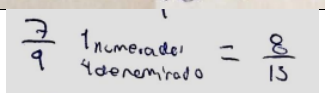
ISSN 2448 – 7945

alumnos respondieron la prueba individualmente. Como motivación se les asigno un punto extra en su asignatura del curso, lo anterior con el objetivo de que respondieran utilizando los conocimientos que en ese momento tuvieran. En consecuencia, se tiene que las fuentes de recolección de la información son las producciones escritas obtenidas de los estudiantes, las que fueron analizadas para identificar los errores que tuvieron los alumnos al sumar las diferentes fracciones que tenían que plantear para contestar cada problema verbal.

3. Resultados y análisis

En la Tabla 2 se muestran algunas respuestas que los alumnos contestaron y en las que es posible identificar algunos de los errores en la realización de la suma de fracciones.

Tabla 2. Respuestas que evidencian problemas en suma de fracciones

No. de problema	Respuesta
1	
4	
5	
9	

Los resultados que los alumnos evidenciaron en el primer problema verbal que involucro a las fracciones propias con un mismo denominador, el 57 por ciento respondió adecuadamente el problema, para el caso donde el problema implica a una suma de fracción propia con diferente denominador, el 85 por ciento de los alumnos no respondieron o calcularon la suma sin aplicar correctamente el algoritmo.

ISSN 2448 – 7945

Para los problemas que involucran suma de fracciones impropias, que están formados por denominadores idénticos, el 71 por ciento de los alumnos no los resolvieron o los resolvieron teniendo confusión en el algoritmo de la suma. Quienes si los resolvieron prefirieron convertir las fracciones a números mixtos. En el caso de problemas que involucran a fracciones impropias y diferente denominador, también el 71 por ciento no los resolvieron, o los resolvieron confundiendo el algoritmo de la suma con algunos aspectos del algoritmo de la multiplicación. Solo el 29 por ciento resolvió los problemas mencionados anteriormente.

Los problemas que incluían números mixtos (numero entero con numero fraccionario) con idéntico denominador en la fracción, el 71 por ciento realiza la suma teniendo en cuenta que suman por separado los enteros y los fraccionarios, en un caso un alumno convierte de numero mixto a fraccionario y posteriormente a decimal. El 14 por ciento de los alumnos resolvió correctamente el problema que incluía números mixtos con diferente denominador en la parte de fracción siendo el problema en el que se observó mayor recurrencia en la confusión del algoritmo de la suma con el de la multiplicación, así como al convertir la parte entera a fracción y el numero mixto a numero decimal.

En el ejercicio que presentó la suma de una fracción con otra negativa y mismo denominador, solo el 14 por ciento la respondió acertadamente y el 86 por ciento tuvo problemas para relacionar ley de signos y el algoritmo de la suma. Para el problema que incluye la suma de tres fracciones, solo el 14 por ciento de los alumnos llego a la respuesta correcta y los demás no sumaron las tres fracciones donde dos tenían el mismo denominador y la tercera, diferente.

Para el ejercicio en que se solicitó a los alumnos sumar diferentes cantidades al numerador y denominador y saber el incremento o decremento de la fracción como cantidad, ningún alumno presento respuesta correcta o en su caso no intentaron resolverlo.

4. Conclusiones

La comprensión de la suma de fracciones, y en particular las dificultades que presentan los alumnos de bachillerato, son la confusión que les generan los algoritmos de suma con el de multiplicación. En la mayoría de casos, los estudiantes pueden identificar que, para la suma de fracciones con idéntico denominador, se suman los numeradores y el denominador se escribe debajo de la suma de los numeradores. El problema se evidencia cuando a los estudiantes se les presenta una suma de fracciones propias, impropias o en números mixtos que tenga diferente denominador; ya que, confunden los algoritmos de suma con el de multiplicación sumando numeradores y denominadores, en otros casos realizan multiplicación cruzada de numerador con denominador. Los sujetos de estudio, en algunos casos tomaron las sumas de fracciones, las convirtieron a números decimales para efectuar posteriormente la suma de las cantidades.

ISSN 2448 – 7945

De lo anterior se puede concluir que es necesario presentar la suma de fracciones a los alumnos que se encuentran estudiando los primeros semestres de bachillerato para resolver los problemas de comprensión de la suma de fracciones que impacta en semestres posteriores.

Agradecimientos

El autor agradece el apoyo al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por la beca otorgada para cursar la Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica. Así mismo el autor agradece a la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial DGETI.

5. Índice de referencias

Libros

- Aguilar, A., Bravo, F. V., Gallegos, H. A., Cerón, M., & Reyes, R. (2009). *Aritmética*. México: Prentice Hall.
- Alberro, A. & García, R. (2018). *Matemáticas 1*. México: Correo del maestro.
- Baldor, A. (1985). *Aritmética teórico práctica*. España: Códice.
- García, H. E. (2019). *Matemáticas 2*. México: Innovación académica y tecnológica S. C.
- Lamon, S. J. (2020). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding*. (4ta ed.). New York: Routledge Taylor & Francis Group.

Revistas

- Braithwaite, D. W., Tian, J. & Siegler, R. S. (2017). Do children understand fraction addition? Developmental Science, 21(4), 1-9.
- Capilla, R. M. (2016). Habilidades cognitivas y aprendizaje significativo de la adición y sustracción de fracciones comunes. Cuadernos de Investigación Educativa, 7(2), 49-62.
- Cortina, J. L., Cardoso, E. & Zúñiga, C. (2012). El significado cuantitativo que tienen las fracciones para estudiantes mexicanos de 6o. de primaria. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 14(1), 70-85.
- Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B. & Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. Frontiers in Psychology, 4, 1-12.
- Jarrah, A. M., Wardat, Y. & Gningue, S. (2022). Misconception on addition and subtraction of fractions in seventh-grade middle school students. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18(6), 1-9.
- Reséndiz, E., & González, C. A. (2018). Enseñanza de fracciones en tercer grado de primaria: Análisis del discurso y prácticas pedagógicas. Revista Internacional de Ciencias Sociales y Humanidades, 28(1), 109-138.

ISSN 2448 – 7945

Información en línea

- Lesh, R. A. & Bradbard, D. A. (Ed.). (1976). *Number and measurement. papers from a research workshop*. Recuperado de https://eric.ed.gov/?id=ED120027
- Zita, A. & Arellano, F. (18 de julio de 2023). *Problemas de fracciones*. Recuperado de https://www.todamateria.com/problemas-de-fracciones/#anchor-sumas.

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

PROCESOS COGNITIVOS PROMOVIDOS EN LIBROS DE TEXTO DE SEGUNDO GRADO DE SECUNDARIA: FUNCIONES LINEALES

Zamudio Hernández Andrea[1, *], Reyes Rodríguez Aarón[1] y Barrera Mora Fernando[1]
[1]*Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, Col. Carboneras, C. P. 42184, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.*

ID-POSM034

Resumen

Se identifican procesos cognitivos que se promueven en un libro de matemáticas autorizado por la SEP para utilizarse como texto en segundo grado de secundaria, durante el ciclo escolar 2022-2023, en México. Es bien sabido que los libros de texto son la herramienta principal con la que cuentan los docentes para orientar el proceso de aprendizaje de los estudiantes, por esto, su revisión puede contribuir a mejorar las características del conocimiento que los estudiantes construyen. Se analizan los contenidos de segundo grado, sobre funciones lineales, ya que se han reportado diversas deficiencias sobre el tema en estudiantes de tercer grado. Por otro lado, la linealidad permea gran parte de la currícula escolar. El fundamento teórico del trabajo incluye la taxonomía de procesos cognitivos de Anderson y el modelo de resolución de problemas. El marco también considera las diferentes perspectivas desde las cuales se puede analizar el contenido de un libro de texto (matemática, estudiante, docente y autor). La metodología incluye un análisis cualitativo de contenido desde un punto de vista matemático. La unidad de análisis son las tareas. El análisis de la información incluyó un proceso de segmentación de los problemas del libro, la identificación del contenido explícito y el subyacente; así como el conteo y nubes de palabras y gráficos que muestran un "flujo" de procesos cognitivos. Entre los principales resultados se destaca que la mayor parte de las tareas son rutinarias, e involucran los procesos recordar hechos e implementar definiciones y algoritmos. Solo en algunos casos las tareas ofrecen oportunidades para comunicar resultados, expresar ideas o bien explicar las rutas de solución. Se detectó, además, una falta de uniformidad y consistencia en la terminología matemática en los enunciados de las tareas.

Palabras clave: *Cognición, libros, función, aprendizaje, secundaria.*

1. Introducción

Los libros de texto son la herramienta principal con la que cuentan los docentes para orientar los procesos de aprendizaje de los estudiantes y, en consecuencia, influyen en las prácticas que se llevan a cabo en las aulas (Fan, 2013; Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L., 2011; Howson, 1995; Stylianides, 2014; Valverde, G.A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T., 2002). De acuerdo con diversas investigaciones, los libros de texto tienen una gran influencia en las actividades del salón de clase (Fan, 2013; Howson, 1995; Stylianides, 2014; Valverde et al., 2002) pues se ha evidenciado que los docentes usan los textos para decidir qué tareas implementar y cómo hacerlo (Porter, 2002; Stylianides, 2014; Tarr, J. E., Chávez, O., Reys, R. E., & Reys, B. J., 2006). Así, estos materiales influyen sobre lo que se enseña y aprende por los estudiantes (Polikoff, 2015).

[1] * *Autor para la correspondencia. E-mail: za477761@uaeh.edu.mx Tel. 771 7172 000, ext. 2531*

ISSN 2448 – 7945

¿Qué oportunidades de aprendizaje ofrecen las tareas, sobre funciones lineales, de un libro de matemáticas, aprobado por la SEP como texto para segundo de secundaria en el ciclo escolar 2022-2023? Esta pregunta es relevante ya que las funciones lineales juegan un rol central en el aprendizaje matemático, además de que las características de las tareas moldearán el tipo de aprendizaje matemático que los estudiantes pueden alcanzar al abordarlas (Stein et al., 2000; Sullivan, et al. 2010; Watson y Ohtani, 2015). Por lo anterior, es importante conocer las oportunidades de aprendizaje que ofrecen las tareas en libros de texto, las cuales dependen del nivel de demanda cognitiva y de los procesos asociados que promueven.

Se analizaron las oportunidades de aprendizaje (procesos cognitivos) que ofrecen las tareas referentes a funciones lineales que se encuentran en un texto oficial de matemáticas, correspondientes al segundo grado de secundaria, utilizado como material didáctico en una institución privada en el estado de Hidalgo, durante el ciclo escolar 2022-2023. Se decidió enfocar el análisis en el concepto de función, en particular, el de función lineal, ya que este permea todas las ramas de las matemáticas (Lloyd y Wilson, 1998). Particularmente, el concepto de función lineal es un contenido clave del plan de estudios de matemáticas de secundaria en México y de propuestas curriculares internacionales (CCSSI, 2010; NCTM, 2000).

Se eligió el libro de segundo grado de secundaria dado que la primera autora trabaja en ese nivel educativo y, con base en su experiencia como docente, identificó diversas dificultades de comprensión del concepto de función lineal en estudiantes de tercer grado de secundaria, a pesar de que este concepto se aborda en los dos grados anteriores en este nivel educativo (SEP, 2017).

1. 1. Antecedentes

Se llevó a cabo una revisión de trabajos de investigación relacionados con el análisis de libros de texto, con la finalidad de identificar líneas de investigación principales. Las aproximaciones teóricas y metodológicas utilizadas, así como los principales resultados que se han obtenido. La revisión incluyó artículos empíricos de investigación, publicados en idioma inglés y en revistas que cuentan con arbitraje estricto.

Se identificaron tres grandes grupos de investigaciones con relación al análisis de libros de texto: (a) análisis de libros individuales, (b) análisis comparativos de libros utilizados en un mismo país, y (c) análisis comparativos de libros de diferentes países. En lo que respecta a los análisis comparativos entre diferentes países, las investigaciones mayoritariamente contrastan libros de naciones occidentales como Reino Unido, Estados Unidos, España, Alemania o Noruega con libros de países asiáticos o africanos, entre los que destacan China, Corea, Japón, Singapur, Sudáfrica o Etiopía (Fan y Zhu, 2007; Hong y Choi 2014; Hong y Choi, 2018; Mellor, K., Clark, R., Essien, A., 2018; Tesfamicael y Lundeby 2019; Vicente 2012; Wang, Y., Barmby,

ISSN 2448 – 7945

P., & Bolden, D., 2017). Entre los estudios comparativos destaca una sola investigación en la que se contrastan libros de 15 diferentes países (Mesa, 2004). En relación con el foco de las investigaciones, es decir, la característica de las tareas que se analiza, destacan: (a) oportunidades de aprendizaje que ofrecen los contenidos (Bieda, K., Ji X., Drwencke, J. & Picard, A., 2014; Davis 2012; Fujita y Jones 2014; Mellor et al. 2018; Otten, S., Males, L. Gilbertson, N., 2014; Remillard et al. 2014; Stylianides 2014; Thompson et al. 2012), (b) nivel de demanda cognitiva de las tareas (Bayazit 2012), (c) alineación entre el contenido de los libros con el currículum (Polikoff 2015), (e) heurísticas utilizadas en los problemas resueltos (Fan y Zhu, 2007), (f) cantidad o frecuencia de tareas con ciertas características (Vicente, 2022), o (g) contextualización de las tareas. En cuanto a investigaciones enfocadas en las oportunidades de aprendizaje, predominan las orientadas a las oportunidades de razonamiento y prueba.

La revisión permitió determinar que las investigaciones interesadas en los procesos cognitivos que promueven las tareas de los libros de texto de matemáticas en México son escasas y que incursionar en el análisis de libros de texto de matemáticas resulta una línea de investigación desafiante, debido a que este tipo de investigación se encuentra en una etapa temprana de su desarrollo y, por esta razón, sus fundamentos filosóficos, así como los marcos teóricos y los métodos de investigación para llevar a cabo una indagación disciplinada, se encuentran aún en desarrollo (Fan, 2013).

1. 2. Elementos teóricos

El fundamento teórico de este trabajo incluye la taxonomía de procesos cognitivos de Anderson et al. (2001) y el modelo de resolución de problemas (Polya, 1971). También se consideran las diferentes perspectivas desde las cuales se puede analizar el contenido de un libro de texto: (a) del estudiante, (b) matemática, (c) del docente y (d) del autor del libro (Stylianides, 2014). Cabe mencionar que el trabajo se enfocó en realizar un análisis desde una perspectiva matemática, buscando determinar los procesos cognitivos que se promueven en cada tarea (ver Tabla 1), atendiendo solamente a su potencial matemático, sin considerar algún contexto pedagógico específico (Stylianides y Stylianides, 2010).

2. Metodología

Se llevó a cabo un análisis cualitativo de contenido (Kuckartz y Rädiker, 2023) desde un punto de vista matemático. La unidad de análisis son las tareas relacionadas con el concepto de función lineal, presentes en un libro de matemáticas, autorizado por la Secretaría de Educación Pública de México para utilizarse como texto en segundo grado de secundaria durante el ciclo escolar 2022-2023. El análisis realizado es puramente académico, y no tiene la finalidad de promover o inhibir el uso de algún material curricular. Por la razón anterior, en este trabajo se omite la información sobre el título y editorial del texto analizado.

ISSN 2448 – 7945

Tabla 1. Categorías de procesos cognitivos

Categoría	Procesos cognitivos
1. Recordar. Recuperar conocimiento relevante de la memoria a largo plazo.	Reconocer, recuperar
2. Entender. Construir significado, incluyendo comunicaciones y representaciones orales, escritas (retórica o algebraica) y gráficas.	Interpretar, ejemplificar, clasificar, resumir, inferir, comparar, explicar
3. Aplicar. Llevar a cabo o implementar procedimientos.	Ejecutar, implementar
4. Analizar. Dividir un material en sus partes constitutivas y determinar cómo las partes se relacionan unas con otras.	Diferenciar, organizar, atribuir
5. Evaluar. Realizar juicios basados en criterios o estándares.	Verificar, criticar
6. Crear. Organizar elementos para formar una estructura coherente o funcional; reorganizar elementos en una nueva estructura.	Generar, planear, producir

MEMORIAS DEL Congreso Internacional sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

Este trabajo se abordó desde un enfoque cualitativo, el cual se caracteriza por la forma en la que se recolectan y analizan los datos, es decir, la información recolectada consiste principalmente en palabras que expresan ideas o significados, aunque también puede ser información en forma de imágenes, dibujos, fórmulas, gestos, entre otros. En este enfoque una característica importante de la información es su cualidad de expresar ideas y significados. Esta investigación es documental, ya que involucra una revisión repetida, examinación e interpretación de los datos con la finalidad de comprender su significado y obtener conocimiento empírico respecto de los procesos cognitivos que promueven las tareas (Frey, 2018).

El análisis de la información incluyó un proceso de segmentación de los problemas y ejercicios del texto, considerando como unidad de análisis a la *tarea*; entendiendo con este término a cualquier ejercicio, problema, actividad o partes de las anteriores que tienen marcadores separados en el libro de texto (Stylianides, 2009). Por ejemplo, un ejercicio o problema con incisos a-d, se contabilizó como cuatro tareas distintas (Otten et al., 2014). Por otro lado, se llevó a cabo la identificación del contenido subyacente en cada tarea. En la columna A de una tabla de Excel se colocaron los enunciados de las tareas, una por renglón. En otra columna, denominada análisis, los autores realizaron observaciones relativas a los procesos cognitivos que, desde su perspectiva, se asocian con cada tarea, a partir de las definiciones especificadas en Anderson et al. (2001). Las herramientas de análisis incluyeron el conteo de palabras asociadas con los procesos cognitivos, nubes de palabras y redes gráficas que muestran un “flujo” de procesos cognitivos presentes en una tarea.

3. Resultados y análisis

ISSN 2448 – 7945

El texto que se analizó está integrado por 10 unidades, las cuales se encuentran agrupadas en tres secciones denominadas trimestres. Cada una de las unidades, a su vez, se encuentra dividida en dos secuencias instruccionales. Cada unidad inicia con un cuadro denominado *Mis aprendizajes*, donde se especifica cuáles son los aprendizajes esperados.

3. 1. Selección y segmentación de los problemas y ejercicios

En primer lugar, se identificaron los problemas y ejercicios relacionados, explícita o implícitamente, con el concepto de función lineal. Específicamente, se consideraron los ejercicios y problemas sobre: (a) proporcionalidad, (b) graficación y variación lineal y (c) variación lineal. Los problemas y ejercicios seleccionados fueron segmentados, tomando en cuenta que algunos de ellos están conformados por más de un inciso. Así que, cada inciso se contabilizó como una tarea. Se identificaron 150 tareas, las cuales constituyen los datos crudos de este trabajo. El análisis primario incluyó la identificación del contenido subyacente en cada tarea, proceso que se efectuó considerando el contexto de los problemas, lenguaje utilizado y la precisión de la terminología matemática. Posteriormente, se estructuró un párrafo de texto en el que se identifican los procesos cognitivos principales y los asociados a cada una de las tareas, los cuales se resaltaron con texto de color rojo (Figura 1).

A	D	E
Enunciado de las tareas	**Contenido subyacente en las tareas**	**Procesos cognitivos involucrados**
Elige las respuestas correctas. Si un helado de una bola cuesta $20.00 y el de dos bolas cuesta $40.00, ¿cuánto cuesta un helado con tres bolas? a) $40.00 b) $70.00 c) $50.00 d) $60.00	La redacción del enunciado es imprecisa y puede conducir a interpretaciones erróneas, ya que se da por supuesto que se sobreentiende la existencia de una relación de proporcionalidad directa en el problema. Sin el supuesto mencionado no es posible saber cuánto cuesta el helado de tres bolas, ya que en la vida real, generalmente se ofrecen descuentos en los productos más grandes. Sin el supuesto de la relación de proporcionalidad, la respuesta del problema es indeterminada. Una redacción en la que no hay lugar a las impresiones anteriores podría ser: El costo de un helado depende de la cantidad de bolas que tiene. Si cada bola de helado cuesta $20, cual es el precio de un helado con tres bolas. Con esta nueva redacción, el estudiante solo tiene que recordar cuál es el resultado de multiplicar 20(3), o recordar el algoritmo para multiplicar e implementarlo.	Nivel 1 - recordar Nivel 3 - Aplicar -> Implementar

Figura 1. Segmentación e identificación del contenido subyacente en las tareas

3. 2. Tipo y características de procesos cognitivos

El análisis secundario incluyó la utilización de dos herramientas gráficas, mediante las cuales se resumen los resultados de la investigación y se identifican patrones al interior de los datos. En primer lugar, mediante una nube de palabras se destacan los procesos cognitivos que aparecen con mayor frecuencia, resaltando los procesos cognitivos de recordar e implementar. También se subraya el uso de representaciones tabulares y problemas asociados con el uso de un sistema de coordenadas cartesianas (Figura 2).

ISSN 2448 – 7945

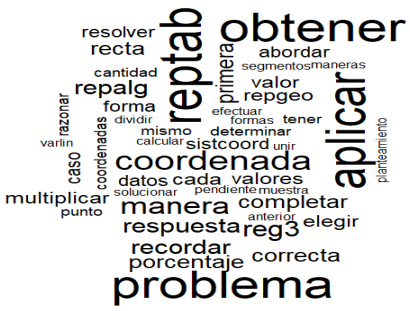


Figura 2. Síntesis del contenido subyacente (elaborado con R)

Entre los principales resultados, derivados de la construcción de una red de procesos cognitivos (Figura 3), se destaca que la mayor parte de las tareas son algorítmicas, e involucran los procesos cognitivos de recordar e implementar, asociadas con el conocimiento de definiciones y algoritmos. Solo en algunos casos, las tareas proporcionan a los estudiantes oportunidades para comunicar resultados, expresar conjeturas o justificaciones o bien explicar rutas de solución. Se detectó, además, una falta de uniformidad y consistencia en la terminología matemática utilizada en el texto.

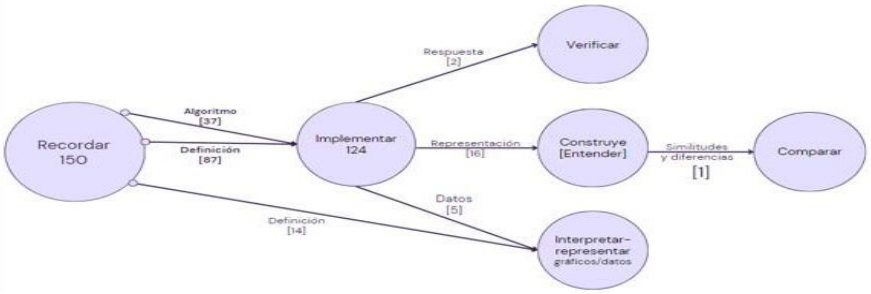


Figura 3. Red dirigida de procesos cognitivos

4. Conclusiones

En general, las tareas tienen un énfasis en lo procedimental, además se identificó una falta de conexiones entre diversas representaciones utilizadas, las cuales se manejan de forma aislada, ya que en la gran parte de las tareas analizadas se solicita al alumno implementar diversos procedimientos para su resolución. Las tareas solo están enfocadas en encontrar o elegir el resultado correcto para cada actividad planteada, lo que significa que no se le da importancia al proceso que implementa el alumno para llegar a ese resultado. Los procesos de comunicación, en general, están ausentes en el contenido asociado con funciones lineales. Se identificó una falta de procesos cognitivos asociados con la actividad de resolución de problemas, incluyendo la implementación de heurísticas (Polya, 1971), formulación de conjeturas, así como la justificación y comunicación de resultados.

Agradecimientos

ISSN 2448 – 7945

La primera autora agradece al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por el apoyo otorgado para la realización de este trabajo, a través de la beca de posgrado 1237485. El tercer autor agradece el financiamiento del Proyecto del Plan Nacional PID2022-139007NB-I00, financiado por MCIN/ AEI / FEDER, UE.

5. Índice de referencias

- Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., Airasain, P. W., Cruikshank, K. A., Mayer, R. E., Pintrich, P. R., Raths, J. & Wittrock, M. C. (2001). A taxonomy for learning, teaching, and assessing a revision of Bloom 's taxonomy of educational objectives. New York: Pearson Education.
- Bieda, K., Ji X., Drwencke, J. & Picard, A. (2014). Reasoning and proving opportunities in elementary mathematics textbooks. International Journal of Educational Research, 64, 71-80. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.06.005
- Common Core State Standards Initiative [CCSSI] (2010). Common Core State Standards for mathematics. Recuperado el 13 de junio de 2023 de https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Common_Core_State_Standards/Math_Standards.pdf
- Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: Towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. ZDM, 45(5), 765–777. DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6
- Fan, L. & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. Educational Studies in Mathematics, 66, 61–75. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-006-9069-6
- Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (2011). Introduction. In G. Gueudet, B. Pepin and L. Trouche (Eds.), From Text to 'Lived' Resources. Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development (pp. ix-xiii). New York: Springer.
- Hong, D., & Choi, K. (2014). How is the function concept introduced in textbooks?: A comparative analysis. Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, 3, 329-336.
- Hong, D. S., & Choi, K. M. (2018). A comparative analysis of linear functions in Korean and American standards-based secondary textbooks. International

ISSN 2448 – 7945

Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49(7), 1025–1051. https://doi.org/10.1080/0020739x.2018.1440327

- Kuckartz, U., & Rädiker, S. (2023). Qualitative content analysis. Sage, Los Angeles.
- Lloyd, G. M., & Wilson, M. (1998). Supporting innovation: the Impact of a teacher's conceptions of functions on his implementation of a reform curriculum. Journal for Research in Mathematics Education, 29(3), 248. https://doi.org/10.2307/749790
- Mellor, K., Clark, R., Essien, A. (2018). Affordances for learning linear functions: A comparative study of two textbooks from South Africa and Germany. Pythagoras, 39(1), a378. DOI: https://doi.org/10.4102/pythagoras.v39i1.378
- Martin, W. G. (2000). Principles and standards for school mathematics. National Council of Teachers of Mathematics.
- Polikoff, M. (2015). How well aligned are textbooks to the Common Core Standards in Mathematics? American Educational Research Journal, 52(6), 1185–1211. DOI: https://doi.org/10.3102/0002831215584435
- Pólya, G. (1971). How to solve it (2nd ed.). Princeton: Princeton University Press.
- Porter, A. (2002). Measuring the content of instruction: Uses in research and practice. Educational Researcher, 31(7), 3–14.
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. & Silver, E. A. (2000). Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development. Teachers College Press.
- Stylianides, J. G. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. Mathematical Thinking and Learning, 11(4), 258-288.
- Stylianides, J. G. (2014). Textbook analyses on reasoning-and-proving: Significance and methodological challenges. International Journal of Educational Research, 64, 63–70.
- Tarr, J. E., Chávez, O., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2006). From the written to the enacted curricula: The intermediary role of middle school mathematics teachers in shaping students' opportunity to learn. School Science and Mathematics, 106(4), 191–201.
- Tesfamicael, S. & Lundeby, O. (2019). A comparative study of norwegian and ethiopian textbooks: the case of relations and functions using anthropological theory of didactics (ATD). Universal Journal of Educational Research 7(3): 754-765, 2019. DOI:10.13189/ujer.2019.070315

ISSN 2448 – 7945

- Thompson, D., Senk, S., & Johnson, G. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. Journal for Research in Mathematics Education, 43(3), 253–295.
- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). According to the Book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks (2002nd ed.). Springer.
- Vicente, S., Verschaffel, L., Sánchez, R., Múñez, D. (2022). Arithmetic word problem solving. Analysis of Singaporean and Spanish textbooks. Educational Studies in Mathematics, 111, 375–397. DOI: https://doi.org/10.1007/s10649-022-10169-x

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

LA ALFABETIZACIÓN MATEMÁTICA DE LOS FUTUROS DOCENTES, UNA PROPUESTA PARA IMPLEMENTAR P.E. 2022

Rivera Reyes Alejandro[1]*, Contreras Reséndiz Guillermo[2], Mendoza Batres Norma Luz[3]
[123]*Escuela Normal No. 2 de Nezahualcóyotl.*

IP-POSM035

Resumen

En la Escuela Normal No. 2 de Nezahualcóyotl está en marcha una investigación sobre la ***Alfabetización Matemática****, misma que ha generado una serie de conocimientos y propuestas para su implementación con los alumnos que cursan los Planes de Estudio 2022, en la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Entre estas se encuentra la implementación de un Taller donde se ejemplifique cómo se puede atender, así mismo se plantea el concepto que maneja, tanto la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico como de algunos otros autores, a su vez se consideran datos sobre los resultados obtenidos en la prueba del Programa Para la Evaluación Internacional de los Estudiantes del 2022, los cuales nos refieren la necesidad de abordar el tema con los futuros docentes, de manera inicial porque tendrán que afrontar esa evaluación, la Nueva Escuela Mexicana (NEM), que pone a la comunidad al centro y se demanda una contextualización del aprendizaje que se imparte en educación básica. La investigación sigue su curso, brindando condiciones para poder tomar información de esta e ir diseñando actividades que contribuyan a una implementación de los cursos que están por realizarse. Del mismo modo apoyar a los docentes en formación del plan 2018 de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria, a contar con elementos que les permitan tomar el contexto como base para el desarrollo de planteamientos matemáticos en su labor frente a grupo, también se pretenden sean incluidos en un futuro a los docentes en formación de la Licenciatura en Educación Primaria, planes 2018 y 2022, quiénes también implementan, desde sus prácticas profesionales, los planes de estudio de la NEM. Cabe destacar que el taller ha de contribuir al desarrollo de una alfabetización matemática de los futuros docentes.*

Palabras clave: *Alfabetización, Matemáticas, NEM, Docentes, Formación.*

1. Introducción

Los resultados de las evaluaciones internacionales respecto al dominio de las competencias matemáticas no han sido alentadores para nuestro país, sin embargo, se han obtenido resultados diferentes en olimpiadas y otras competencias de la misma asignatura. El proceso de enseñanza de las matemáticas está en continuo cambio en la educación básica, como lo plantea la Nueva Escuela Mexicana (NEM) la cual propone la contextualización de la enseñanza a partir de los planes analítico y sintético.

[1] *Autor para la correspondencia. E-mail: alexrivrey24@gmail.com*

ISSN 2448 – 7945

Es en esta parte donde la Alfabetización Matemática (**AM**) juega un papel importante, por lo que ha sido incluido en el Plan de Estudio (PE) de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (LEAM) 2022 un curso con esta denominación, el reto hoy, es el proceso de inculcar en los futuros docentes este concepto, ya que abordar la realidad de los alumnos desde un contexto matemático demanda del profesor un conocimiento sustancial de la realidad que viven estos, para poder así construir planteamientos donde se implementen las competencias matemáticas. Para ello se presenta un taller como propuesta para su desarrollo, este se deriva de la investigación que se realiza en la Escuela Normal No. 2 de Nezahualcóyotl (EN2N), donde se forma a los docentes de primaria y de secundaria que impartirán la asignatura de matemáticas en Educación Básica.

2. Antecedentes

2.1 La alfabetización matemática como concepto.

Desde el 2003 la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) emitió el documento Marcos teóricos del Programa Para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA) 2003, conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas, en el cual, además de difundir los resultados, se presentaron los principios que la guiaron, así como el dar a conocer los contenidos que los estudiantes necesitan adquirir, de este documento nos enfocamos en lo que a las matemáticas se refiere y es que en él se proponen cinco aspectos para matematizar, en primer lugar Problemas de la realidad, en segundo Sistematización del problema según conceptos matemáticos, el tercer elemento es Reducción de la realidad mediante procedimiento que nos lleve a la construcción de un problema matemático, como cuarto elemento tenemos Resolver el problema y por último Dar sentido a la solución matemática en términos de la situación real.

Esta propuesta se asemeja en gran medida a la que hace Ángel Alsina, quién propone 6 fases para fomentar la **AM** en la infancia a partir de: 1.- Matematización del contexto de enseñanza, 2.- Conocimientos matemáticos previos de los alumnos, 3.- Aprendizaje de conocimientos matemáticos y documentación en contexto,4.- Coconstrucción y reconstrucción de conocimiento matemático en el aula, 5.- Formalización de los conocimientos matemáticos adquiridos y 6.- Reflexión sistemática sobre la práctica matemática realizada (Ángel Alsina, 2017, p.73).

Ambos modelos resaltan en primer plano la importancia del contexto y en segundo los conocimientos matemáticos que el alumno tiene, además las dos propuestas concluyen en la generación de un conocimiento con sentido para el pupilo, al identificar la importancia y trascendencia que esta disciplina tiene entorno a su aprendizaje en la educación.

La **AM** la refieren Ramón Pajares, Ángel Sanz y Luis Rico (2004) como las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente

ISSN 2448 – 7945

cuando enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones; tomando en cuenta esta opinión se considera como letrado o alfabetizado a un individuo que logra buenos resultados, sin embargo, es necesario complementar la idea con el manejo propio de la disciplina de matemáticas.

El concepto ha sido estudiado por una gran variedad de actores destacando Lynn Arthur Steen (1990), Skovsmose (2000) y Serrano (2015), quienes coinciden en la necesidad de un manejo adecuado de la disciplina, además de su contextualización por parte de los que la aprenden y enseñan. En variadas ocasiones, como docentes de matemáticas, hemos enfrentado la interrogante de los estudiantes ¿y esto para qué me sirve?, del mismo modo el planteamiento ¿Eso dónde lo uso?, claro que los estudiantes no identifican la necesidad de aprender, de ahí la importancia de contextualizar el aprendizaje de las matemáticas.

Lynn Arthur Steen (1990) presenta, derivado de sus estudios, cinco dimensiones de alfabetización Matemática las cuales son: 1.- Práctica. 2.- Cívica. 3.- Profesional. 4.- Recreativa y 5.- Cultural, Cada una de estas se relaciona con situaciones que todos enfrentamos de forma diaria, estas dimensiones implican cuatro tipos de **AM**: I Numérica, la cual se refiere al uso adecuado y correcto de la aritmética. II Algebraica, esta tiene que ver con el manejo, conocimiento de fórmulas y lenguaje matemático. III Geométrica, el conocimiento adecuado de los espacios y cuerpos y IV Estadística, el manejo de datos estadísticos y probabilísticos.

A partir de estas aportaciones se identifica la necesidad de iniciar acciones que permitan ir abonando a la **AM** en los futuros docentes de educación básica, de ahí surge la necesidad de diseñar un taller que favorezca su conocimiento y desarrollo. Es pertinente considerar que a partir de la idea que Steen nos presenta de **AM** como “Habilidades matemáticas que permiten a los individuos enfrentarse a las demandas del día a día” (Steen 1990), y considerando sus dimensiones y tipos, se puede iniciar el proceso de su implementación con los futuros docentes de matemáticas, quienes tendrán de forma directa la responsabilidad de contextualizar la asignatura con sus alumnos.

2.2 La prueba PISA, datos y resultados

Los resultados que la OCDE ha emitido del Programa PISA en diciembre de 2023, en el caso de México no han sido alentadores, en matemáticas se observa que su desempeño ha mermado, el Gobierno Federal se manifestó en contra de estos, sin embargo, lo que es evidente es el deficiente manejo de las matemáticas que se tiene en nuestro país, pero tampoco en evaluaciones nacionales el resultado cambia, en este proceso no es el conocimiento el evaluado solamente, sino la implementación que se hace en un contexto determinado, en el cual el individuo tiene que poner en juego las habilidades y competencias matemáticas que ha adquirido a lo largo de su formación académica, este organismo destacó que México obtuvo en 2022, 395 puntos en matemáticas, dato que comparado con otros años delata puntaje negativo, en esta

ISSN 2448 – 7945

última publicación los resultados fueron: **-16.9** en Tendencia promedio de 10 en el desempeño medio en el periodo de 2012-2022 y de **-13.8** en Cambio a corto plazo en el desempeño medio en el periodo de 2018-2022, en lo que respecta a alumnos con alto rendimiento de nivel 5 y/o 6 fue de **-0.04**, pero en los de bajo rendimiento por debajo del nivel dos fue de +11.1 (PISA 2022, p. 441)

Ante dichos resultados, se identifica la necesidad de desarrollar la **AM** en la educación básica, con especial incidencia en convertir a los docentes que han de impartir esta asignatura en alfabetizadores matemáticos. Actualmente es común ver que una gran cantidad de docentes hacen uso de problemas que no están contextualizados ya que, toman ejemplos que emergen de otros países, con unidades de medición o monedas diferentes a la nacional, por lo que nos podemos dar cuenta que los problemas que se plantean a los alumnos no son construidos o diseñados por el docente frente a grupo y no corresponden totalmente a la realidad que viven.

Al analizar los problemas que se plantean en la prueba PISA, se pueden identificar situaciones comunes y posibles que los evaluados puedan enfrentar, por lo cual existe la necesidad de que el docente conozca realmente el contexto de sus alumnos, que identifique situaciones donde se implementen los conocimientos adquiridos. Actualmente, en nuestro país se han dado cambios en los programas de estudio que demandan una **AM**.

3. La propuesta pedagógica de la Nueva Escuela Mexicana, “la comunidad al centro”

La educación siempre es un referente decisivo en el futuro de niños, niñas, adolescentes y jóvenes y también lo será en sus comunidades, por lo que la Secretaría de Educación Pública en el año 2019, realizó una reforma constitucional y modificaciones a la Ley General de Educación (LGE), con el convencimiento de brindar una educación de excelencia y con sentido humano, proponiendo transformar el Sistema Educativo Mexicano a través de la NEM, la cual tiene un enfoque crítico, humanista y comunitario, con miras a formar estudiantes con una visión integral, evitando educar solo para sumar conocimientos y habilidades del pensamiento. Pretende recuperar el sentido de lo humano que representa conocerse, cuidarse y valorarse a sí mismo, aprender cómo pensar y en qué no hacerlo, practicar el diálogo como base para relacionarse y convivir con los demás, adquirir valores éticos y democráticos y colaborar e integrarse en comunidad para lograr la transformación social.

A su vez la LGE en su artículo 11 establece que: "El Estado, a través de la nueva escuela mexicana, buscará la equidad, la excelencia y la mejora continua en la educación, para lo cual colocará al centro de la acción pública el máximo logro de aprendizaje de las niñas, niños, adolescentes y jóvenes. Tendrá como objetivos el desarrollo humano integral del educando, reorientar el Sistema Educativo Nacional, incidir en la cultura educativa mediante la corresponsabilidad e impulsar transformaciones sociales dentro de la escuela y en la comunidad”. (LGE; 2019)

ISSN 2448 – 7945

Los cuatro elementos que articulan la propuesta curricular planteada por la SEP en el Anexo del acuerdo 14/08/22 del Diario Oficial de la Federación (DOF) con fecha del 19 de agosto, se enuncian a continuación:

1. *Integración curricular:* donde se pronuncia la problematización de la realidad, la interdisciplinariedad y el trabajo por proyectos a través de los contenidos expresados en los campos formativos y ejes articuladores.
2. *Autonomía profesional del magisterio:* al momento de contextualizar los contenidos de los programas de estudio tomando en cuenta la realidad social, territorial, cultural y educativa de las y los estudiantes.
3. *La comunidad como el núcleo integrador de los procesos de enseñanza y aprendizaje:* pretendiendo llevar a cabo acciones para concebir a la escuela como un centro de aprendizaje comunitario, donde se construyan saberes y exista intercambio de valores, normas, culturas y formas de convivencia en la comunidad.
4. *El derecho humano a la educación* siendo la prioridad del Sistema Educativo Nacional, las y los estudiantes.

Para fines del presente documento ahondaremos en el tercer elemento, reconociendo las razones por las que, en la propuesta pedagógica de la NEM, la comunidad es el foco de los procesos educativos, señalando en el Acuerdo 14/08/22 del DOF tres razones principales:

- La primera de ellas es que la escuela no es un espacio que se encuentre aislado de la comunidad, sino más bien su razón de ser, dado que se encuentra directamente relacionada con la diversidad de personas que acuden a ella con sus lenguas, costumbres, hábitos, identidades, relaciones, afectos y expectativas, que al mezclarse descubren lo que tienen de específicamente humano, así como lo que tienen en común con los demás.
- La segunda razón es que los aprendizajes, saberes, valores y relaciones que adquieran las y los estudiantes no sean prescriptivos, sino más bien que sean llevados a otros espacios de su vida escolar y comunitaria con el objeto de construir nuevos significados con lo aprendido, problematizando la realidad y fortaleciendo así la educación.
- La tercera razón es que la escuela debe considerar los conocimientos y saberes con los que ya cuentan las y los estudiantes, los cuales fueron construidos socialmente en su vida comunitaria.

Por lo tanto, las prácticas educativas requieren poner énfasis en el aprendizaje activo incentivando la investigación desde la comunidad. Con el fin de que la construcción del conocimiento sea enfocada en la resolución de problemas, elaboración de proyectos, intercambio social e independencia individual.

ISSN 2448 – 7945

En este punto entra la columna vertebral del proyecto **"La alfabetización matemática"** buscando propiciar el desarrollo del pensamiento matemático a través de situaciones recuperadas en la vida real cotidiana y con sentido humano, propiciando aprendizajes significativos en el marco de la relación escuela-comunidad.

3.1 Planes de estudio 2022 en la Escuela Normal (Curso Alfabetización Matemática)

Considerando el desarrollo histórico en la creación e implementación de la escuela, esta ha mostrado una función alfabetizadora que no puede ser encomendada más que a docentes. Esta idea nos lleva a reflexionar sobre una nueva concepción de **AM**. Desde esta perspectiva, es imprescindible considerar "prácticas apropiadas para el desarrollo de la **AM**" motivo por el cual la formación docente en las escuelas normales del país se encuentra trasformando sus planes y programas de estudio, lo que nos implica actualizar el perfil de egreso de nuestros estudiantes y con ello dirigirnos hacia el papel del alfabetizador de matemáticas.

En el plan de estudio 2022 de LEAM en la malla curricular uno de los Trayectos denominado: Lenguas, Lenguajes y tecnologías digitales; es el que contempla en su fase de Profundización el plan y programa del curso "Alfabetización matemática", el cual se refiere a la habilidad de las personas para formular, emplear e interpretar las Matemáticas en diferentes contextos y situaciones, a través de razonamientos Matemáticos, uso de conceptos, algoritmos y modelos, con el propósito de resolver problemas, así como describir, explicar y predecir fenómenos. Esta habilidad permite enfrentar retos y situaciones en la esfera privada, laboral y social de las personas, de manera informada, reflexiva a través de juicios y decisiones bien fundamentadas.

Conocer algunos conceptos matemáticos y dominar algoritmos de cálculo no implica que una persona tenga una **AM**, se requiere la capacidad para acceder, usar, interpretar y comunicar información e ideas matemáticas gestionando diversas situaciones de su vida diaria. Las habilidades bajas o insuficientes de **AM** hacen a las personas vulnerables, sufren exclusión en la vida diaria, en el trabajo, estando propensas a estafas y timos.

4. Metodología

El diseño del estudio se encuentra dentro de la investigación acción, la cual se orienta hacia el cambio educativo, que se caracteriza por ser un proceso que como postulan Kemmis y MacTaggart (1988); se edifica desde y para la práctica, encaminándose a optimizarla a través de su trasformación, al mismo tiempo que intenta comprenderla, exigiendo la participación de los sujetos en el progreso de sus propias prácticas, requiere una actuación grupal por la que los sujetos implicados acompañan coordinadamente en todas las fases del proceso de investigación, involucra la

ISSN 2448 – 7945

realización de análisis crítico de las situaciones y se configura como un espiral de ciclos de planificación, acción, observación y reflexión.

4.1 Propuesta. Taller de alfabetización matemática, para los futuros docentes de matemáticas

Objetivo: Alfabetizar a los futuros docentes de matemáticas y en un futuro a los de Primaria, planes 2018 y 2022 de ambas licenciaturas, a través de la implementación de un taller, este pretende que la **AM** de los futuros docentes de **Matemáticas** a través del análisis de un tema altamente relevante de la vida diaria, el agua, y a su vez que partiendo de este taller puedan generar proyectos para **Alfabetizar Matemáticamente** a sus futuros estudiantes.

El taller llevará por nombre “Un líquido vital para la vida” cuyo objetivo será la concientización del gasto de agua que se genera en cada una de sus viviendas y en su municipio, para adoptar posibles medidas de ahorro, concientizando a sus familias y comunidad de la escasez existente en el entorno. El producto final del taller será la realización de un documento gráfico que concentre el análisis y la información recabada durante el mismo, como es enfocado a la disciplina de matemáticas se intercalarán tres tipos de tareas dentro del proyecto, contenidos matemáticos, problemas contextualizados y tareas procedimentales. El proyecto estará integrado en 3 fases de aplicación y monitoreo.

Se iniciará mediante un debate en clase, donde se limitarán los aspectos para conocer el gasto de agua diario que se produce en una vivienda. Posteriormente, cada alumno realizará las mediciones correspondientes para calcular dicho gasto en su vivienda utilizando conceptos y procedimientos relativos al volumen de cuerpos geométricos, la proporcionalidad, entre otros. Tras una primera corrección de los trabajos individuales, cada aportación se contrasta con las del resto del equipo para decidir, justificadamente, cuál de los métodos utilizados es más apropiado y qué parámetros estadísticos son más representativos para el gasto de agua o la frecuencia de uso.

En seguida de la primera actividad, se elaborará una encuesta para realizar un estudio estadístico más amplio sobre los hábitos de consumo en las viviendas de la comunidad, una vez recogidos los datos de las encuestas, y tras el recuento de respuestas, se elaborarán, en una hoja de cálculo, tablas de frecuencias necesarias para recopilar la información. A partir de ellas, cada equipo decide qué información desea trasladar a su documento y elige las tablas y gráficos adecuados, combinando sus mediciones y los parámetros estadísticos hallados. El trabajo debe finalizar con unas conclusiones relacionando su estudio con alguna problemática mundial vinculada con el agua.

Resultados

Se espera que los docentes en formación a partir de la propuesta logren identificar la necesidad de una **AM** en su labor docente, permitiendo visualizar en el contexto en el

ISSN 2448 – 7945

que se encuentren, situaciones que les exijan a sus alumnos aplicar las Matemáticas que adquieren, pero además que se habitúen a identificar al contexto como un campo de aplicación de las matemáticas y con ello lograr tanto el desarrollo de la NEM como la educación de individuos alfabetizados matemáticamente.

Conclusiones

Con la investigación se busca que cada vez más instituciones educativas pongan en marcha estrategias que coadyuven a la **AM** de los futuros docentes utilizando las nuevas propuestas pedagógicas marcadas en el sistema educativo mexicano y mejorar el desempeño en la práctica, alcanzando mejores resultados y logrando los perfiles de egreso que marcan los programas de estudio.
Es así como la propuesta que aquí emerge busca llegar a otros espacios donde también pueda será aplicada en pro de las demandas actuales de la educación.

5. Índice de referencias

Libros

- Alsina, A. (2017). *Caracterización de un modelo para fomentar la alfabetización matemática en la infancia: vinculando investigación con buenas prácticas*. Universidad de Girona. España. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6168902.pdf
- Kemmis, S. & McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción*. Barcelona: Laertes.
- OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003, conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*. Ministerio de Educación y Ciencia. https://www.oecd.org/pisa/39732603.pdf
- OECD. (2023). *PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education*. Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/53f23881-en.
- Pajares, R. & Sanz, A. & Rico, L. (2004). *Aproximación a un modelo de evaluación, El proyecto PISA 2000*. Ministerio de Educación Cultura y Deporte, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, Secretaria General de Educación y Formación Profesional, Madrid, España. http://sede.educacion.gob.es/publiventa/aproximacion-a-un-modelo-de-evaluacion-el-proyecto-pisa-2000/estadisticas/12652
- Serrano Gómez, W. La alfabetización matemática, Grupo de Investigación y Difusión en Educación Matemática, Universidad Pedagógica Experimental Libertador. La educación crítica de la matemática en el contexto de la sociedad venezolana: hacia su filosofía y praxis, 2015, https://b0b41d13-129e-4f00-9858-705a7b94b6cc.file-susr.com/ugd/e7f519_96223d417bca4c91834f639c0b3f511a.pdf

Información en línea

ISSN 2448 – 7945

- *DOF - Diario Oficial de la Federación*. (s/f). Gob.mx. Recuperado el 05 de marzo de 2024, de https://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5661845&fecha=19/08/2022#gsc.tab=0
- *DOF - Diario Oficial de la Federación* de la Federación, el, C. P. en el D. O. (s/f). *CONSTITUCIÓN POLÍTICA DE LOS ESTADOS UNIDOS MEXICANOS*. Gob.mx. Recuperado el 05 de marzo de 2024, de https://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/CPEUM.pdf
- DGESuM. (s/f). *Planes y programas de estudio 2022*. Recuperado el 5 de marzo de Planes de Estudio 2022 (sep.gob.mx)
- Mg, & Cesar Hilton Aguilar Ramos, M. (s/f). *Cesar Hilton Aguilar Ramos, Mathematic Literacy*. Recuperado el 05 de marzo de 2024 de https://www.scribd.com/book/540909172
- Steen, L. A. ”Numeracy” St. Olaf College https://www.steen-frost.org/Steen/Papers/90numeracy.pdf
- Skovsmose, O. Escenarios de Investigación 1. REVISTA EMA 2000, Vol. 6, No. 1, 3-26 http://funes.uniandes.edu.co/1122/1/70_Skovsmose2000Escenarios_RevEMA.pdf

MEMORIAS DEL Congreso Internacional Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

MODELOS MATEMÁTICOS EN EL DESARROLLO DE APLICACIONES PARA PERSONAS CON DISCAPACIDAD AUDITIVA

Fernando René Barbosa Morales[1, *], Elva Bernal Rodríguez[2]
Esteban Sánchez Escarriola[3]
[1,2,3]*TECNM Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli Av. Nopaltepec s/n Fraccionamiento la Coyotera del Ejido de San Antonio Cuamatla, C.P. 54748 Cuautitlán Izcalli, Estado de México.*

AP-POSM038

Resumen

El objetivo de este trabajo es aplicar modelos matemáticos tales para comprender el comportamiento de movimientos que sirven de base para el desarrollo de aplicaciones para personas con discapacidad auditiva. En la creación de aplicaciones digitales los modelos matemáticos juegan un papel importante ya que son utilizados en el modelado o visión por computadora, se sabe que se pueden simular comportamientos de movimientos de cualquier sistema complejo como los sistemas mecánicos, los fluidos, la simulación de vuelos, procedimientos quirúrgicos entre muchos otros.

Para el desarrollo de este proyecto se utilizó una metodología de software XP (Xtreme Programing) donde se planificaron las etapas del proyecto y selección de software a utilizar, el desarrollo de los modelos matemáticos en algunos sistemas de graficación y software especializado para el diseño en 3D de una mano en sus diferentes posiciones; las pruebas unitarias de integración y aceptación, integradas en el lenguaje de programación seleccionado y las pruebas en computadora, el despliegue de software a través de una aplicación móvil y el refinamiento del diseño.

En conclusión, los modelos matemáticos como las transformaciones lineales, las proyecciones y manipulación de vectores aplicados e integrados en softwares especializados permiten una mejor compresión de las matemáticas y su uso conlleva al desarrollo de aplicaciones las cuales permiten crear un entorno digital más inclusivo y así disminuir la brecha para quienes dependen de información visual en lugar de auditiva. Como resultado se desarrolló en una primera etapa la aplicación "Modulo alfabético del Sistema Digital para Personas con Discapacidad Auditiva".

Palabras clave: *auditiva, discapacidad, inclusivo, digital, móvil, software.*

1. Introducción

En el desarrollo de proyectos de programas para computadoras, la ingeniería de software es una especie de técnica que aplica los principios de la ciencia de la computación y de la matemática para alcanzar soluciones con una mejor relación costo beneficio para el problema de un sistema informático (Noriega Martínez, 2017).

En sus inicios los programas informáticos eran muy simples debido a las limitantes del hardware siendo estos equipos del tamaño de una habitación. En los años 80's la

[1*] Autor para la correspondencia. E-mail: ferbarbosa@live.com.mx Tel. 55-38-93-38-18

ISSN 2448 – 7945

computación se erigía con más fuerza en el ámbito de la investigación, por lo que en el año de 1983 la revista Time en su ejemplar del 3 de enero dedicó su portada a la computadora, como se ve en la figura 1, la cual denominó como “la máquina del año” en lugar de su habitual título de “el hombre del año” (CINVESTAV, 2008).

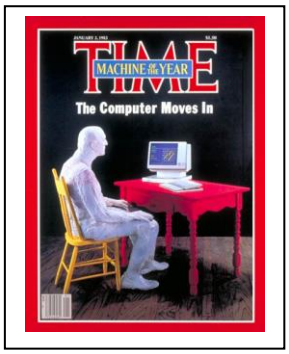


Figura 1. Revista time 1983 (fuente time.com)

Las imágenes creadas por computadora conocidas por sus siglas en inglés como CGI han sido uno de los recursos más importantes en la industria del desarrollo de software, ya que brindan la posibilidad de generar productos de simulación, realismo o estructuras para la disminución de costos de realización (Serrano Ayala, 2011), en la actualidad con tecnologías más avanzadas como los de Visión por Computadora cuyo objetivo es permitir que la computadora entienda el mundo por medio del procesamiento de señales digitales (Sánchez López, 2022), así como el Rastreo, Geolocalización y Visualización se realizan proyectos de Realidad Aumentada (RA) o Mixta (RM) que permiten la interacción de estar en algún lugar de manera virtual muy semejante a la realidad.

El propósito fundamental es mostrar cómo las computadoras utilizan algunos modelos matemáticos que han permitido desarrollar la tecnología antes mencionada y que actualmente sirven para generar animaciones muy sofisticadas; como el crear imágenes planas y hacer que se comporten como objetos 3D, para lograrlo, se realizan en su interior operaciones elementales que permiten conseguir pasar de un modelo geométrico de tres a dos dimensiones en una pantalla, pero que a la vista del espectador parezca que está contemplando un mundo con tres dimensiones, esto es posible por medio de las transformadas geométricas (Villamarin Zapata, 2015).

Una Transformación es el proceso u operación que consiste en cambiar una relación, expresión o figura se cambia en otra siguiendo una ley dada (Lehmann, 1989), dichos procesos de trasformación son variados, por ejemplo, en la ecuación de la circunferencia, ésta puede ser con centro en el origen (h,k), la traslación de los ejes coordenados y cuando los ejes coordenados giran un ángulo determinado.

Blender es un software que cuenta con un conjunto de herramientas donde es posible crear, imágenes, efectos visuales y animaciones en 3D, en su creación fueron

ISSN 2448 – 7945

utilizadas varios modelos matemáticos como los Cuaterniones, el uso del Modo de ángulo del eje, los Ángulos de Euler, los ejes de cardán, las transformaciones de rotación, la Orientación de transformaciones entre muchas otras (CC-BY-SA 4.0 Int. License, 2024) en la Figura 2 ver como se muestra ésta última transformación donde en la imagen de la izquierda será complicado mover el avión en la dirección de avance, usando la Local, pero en la imagen de la derecha, será más fácil hacerlo.

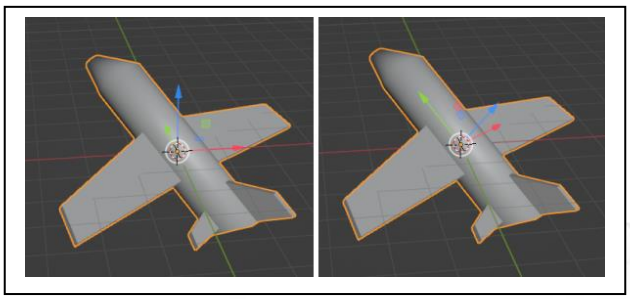


Figura 2. Uso de la orientación de transformaciones (doc.blender.org)

2. Metodología o desarrollo

Los modelos matemáticos han estado presentes desde la máquina analítica de Charles Babbage, hasta las actuales computadoras, se han desarrollados numerosos programas de computadora, para ello, la Ingeniería de Software utiliza metodologías entre las cuales se encuentran la de Cascada, Prototipo y Espiral; por otro lado, se tienen las ágiles como la SCRUM, CRYSTAL y la XP (eXtreme Programming) conocida como Programación Extrema (Maida & Pacienzia, 2015) utilizada en este proyecto.

2.1 Transformaciones

Para comprender el desarrollo de una aplicación para personas con discapacidad auditiva como el Lenguaje de Señas Mexicano (LSM) mediante la cámara de un dispositivo móvil es importante conocer algunos modelos matemáticos que hay detrás del software que facilita el diseño y movimientos de figuras como las Transformaciones Geométricas, la de Perspectiva, Bilineal, Lineales y de Coordenadas entre otras más, son algunos de los modelos que se implementan en los algoritmos de los entornos de software.

2.1.1 Transformaciones geométricas

Se definen como las relaciones de puntos en dos imágenes se representan como operaciones matriciales sobre los puntos del objeto y cada uno se representa como una matriz constituida por las coordenadas (x, y, z) de los puntos que forman dicho objeto. (Villamarin Zapata, 2015). Algunas de las transformaciones se obtienen mediante el producto de matrices y otra por la suma de vectores (por ejemplo la traslación) se hace uso de un “truco” matemático: representar el término independiente

ISSN 2448 – 7945

como cuarta coordenada adicional, a la cual se le denomina coordenada homogénea. En los puntos la cuarta coordenada es un 1, en los vectores la cuarta coordenada es un 0. La transformación en coordenadas homogéneas de acuerdo a los diferentes tipos de operaciones con elementos geométricos se muestra en la figura 3.

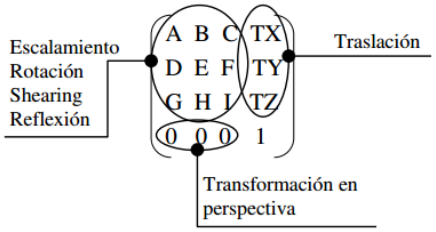


Figura 3. Matriz de transformación de coordenadas homogéneas

(Villamarin Zapata, 2015) describe que la matriz de 3x3 se produce una transformación lineal que realiza dilataciones o escalamientos, deformaciones, reflexiones y rotaciones, el bloque de la fila 1x3 genera una transformación de la perspectiva y la columna 3x1 produce una traslación y el bloque 1x1 actúa como factor de escala que dilata y contrae globalmente el cuerpo. Para una mejor compresión se tienen las siguientes imágenes.

2.1.2 Transformaciones lineales

Según (L. Grossman, 2012) una transformación lineal *T* de *V* en *W* es una función que asigna a cada vector $\boldsymbol{v} \in V$ un vector único $T\mathbf{v} \in W$ y que satisface. Para cada $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ en *V* y cada escalar α

$$T(u+v)=Tu+Tv \quad \text{y} \quad T(\alpha v)=\alpha T v$$

Ecuaciones 1 y 2. Transformación lineal

Por ejemplo

Sea $T:R^2 \rightarrow R^3$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix}$. Por ejemplo, $T\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$. Entonces

$$T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right]=T\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ x_1+x_2-y_1+y_2 \\ 3y_1+3y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_1-y_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ x_2-y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix}$$

Ecuación 3. Suma y resta de matrices y agrupación por subíndice

Donde

ISSN 2448 – 7945

$$\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_1-y_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ x_2-y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Ecuación 4. Se asocia cada matriz con su matriz de transformación

Obtenemos

$$T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Ecuación 5. Se obtiene la Transformación lineal correspondiente

De igual forma tenemos

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x+\alpha y \\ \alpha x-\alpha y \\ 3\alpha y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix} = \alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ecuación 6. Transformación lineal multiplicada por un escalar

De esta forma T es una transformación lineal

2.1.3 Transformación de reflexión

Para una transformación de reflexión se propone el siguiente ejemplo

Sea $T:R^2 \rightarrow R^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$. Se puede ver que *T* es lineal, en términos geométricos, *T* toma un vector en R^2 y lo refleja respecto al eje *y*, ver la figura 4.

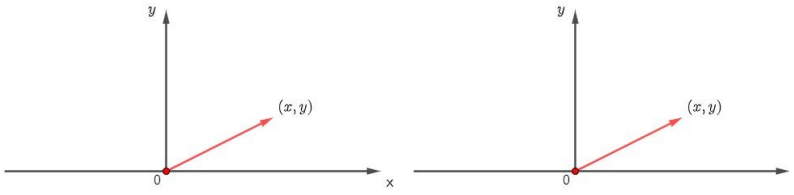


Figura 4. El vector (-*x*,*y*) es la reflexión al eje *y* del vector (*x*,*y*)

2.1.4 Transformación de rotación

Si tenemos el vector $v=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en el plano *xy* se rota en el ángulo θ (medido en grados o radianes) en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Se llamará a este nuevo vector rotado como $v'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, entonces como se ve en la figura 5, si r denota la longitud de v (que no cambia por la rotación),

ISSN 2448 – 7945

$$x=r\cos\alpha\ ,\ y=r\,sen\,\alpha\quad ;\quad x'=r\cos(\alpha+\theta)\ ,\ y'=r\,sen(\alpha+\theta)$$

Ecuaciones 7 y 8. Coordenadas rectangulares y coordenadas incrementadas un valor *θ*

Pero, $r\cos(\theta+\alpha) = r\cos\theta\cos\alpha - r\,sen\,\theta\,sen\,\alpha$, de manera similar
$r\,sen(\theta+\alpha) = r\,sen\,\theta\cos\alpha + r\cos\theta\,sen\,\alpha$ se tiene respectivamente a *x'*e *y'*

$$x' = x\cos\theta - y\,sen\,\theta \quad \text{e} \quad y' = x\,sen\,\theta + y\cos\theta$$

Ecuaciones 9 y 10. Rotación del punto *x* a *x'* e *y* a *y'* un valor de *θ*

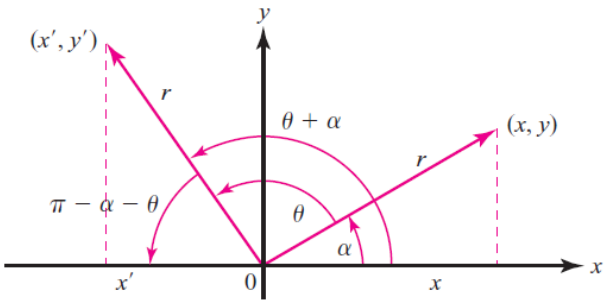


Figura 5. El punto (x',y') se obtiene rotando el punto (x,y) un ángulo θ

Sea

$$A_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -sen\,\theta\\ sen\,\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

Ecuación 11. Matriz formada por las ecuaciones 9 y 10

Entonces de las ecuaciones 9 y 10 se ve que $A_\theta=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$. La transformación lineal $T:R^2\rightarrow R^2$ definida por $T_v = A_\theta$, donde A_θ está dado por la ecuación 12, se llama Transformación de rotación.

2.2 Metodología XP (eXtreme Programming)

De acuerdo a (Penadés & Letelier, 2006) XP, "es una metodología ágil centrada en potenciar las relaciones interpersonales como clave para el éxito en el desarrollo de software, promoviendo el trabajo en equipo, preocupándose por el aprendizaje de los desarrolladores, y propiciando un buen clima de trabajo", las fases son:

2.2.1 Fase 1 de exploración

Se define el alcance general del proyecto donde el cliente determina lo que necesita mediante sencillas historias de usuarios (Joskowicz, 2008), en el proyecto actual y con base en el tema 2.1, el software que cumple con el desarrollo del sistema, son Blender para diseño de la mano y el lenguaje Kotlin para la codificación del sistema.

ISSN 2448 – 7945

2.2.2 Fase 2 de planificación

La planificación es una fase corta, en la que el cliente, los gerentes y el grupo de desarrolladores acuerdan el orden en que deberán implementarse las historias de usuario y, asociadas a éstas, las entregas, (Joskowicz, 2008), en el presente caso las reuniones se realizaban conforme a un cronograma de actividades estando los profesores responsables del proyecto (asesores) y los estudiantes a cargo del desarrollo.

2.2.3 Fase 3 de iteraciones

Es la fase principal en el ciclo de XP, las funcionalidades son desarrolladas en esta etapa, generando al final de cada una un entregable funcional que implementa las historias de usuario asignadas a la iteración (Joskowicz, 2008), ver la figura 7.

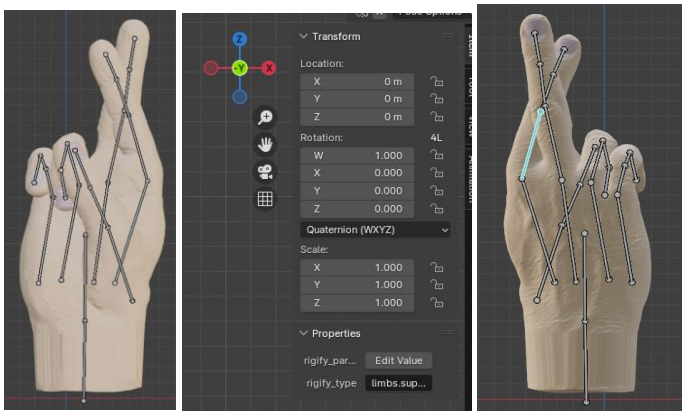


Figura 6. Mano utilizada en Blender para implementarla en Kotlin

Las posiciones de la mano son una muestra de cómo un software facilita diversos movimientos, gracias a los modelos matemáticos que ya se encuentran integrados en el mismo permite crear aplicaciones para un beneficio y resultados específicos.

2.2.4 Fase 4 de puesta en producción

Al final de cada iteración se entregan módulos funcionales y sin errores, puede ser deseable por parte del cliente no poner el sistema en producción hasta que no se tenga la funcionalidad completa, aunque pueden ser necesarias tareas de ajuste (“fine tuning”) (Joskowicz, 2008), en esta etapa se muestra la interpretación de algunas letras del lenguaje de señas (LSM) como se ve en la figura 7.

ISSN 2448 – 7945

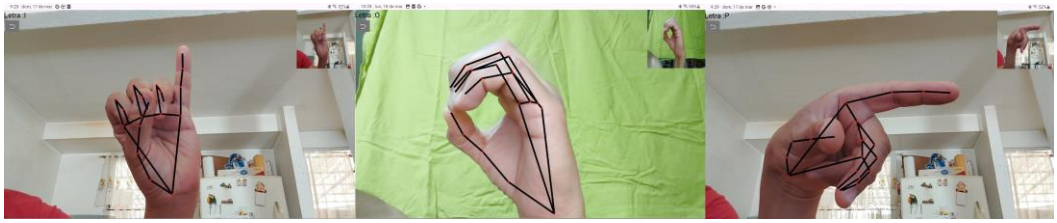


Figura 7. Letra I (izquierda), letra O (centro), letra P (derecha) en LSM

3. Resultados y análisis

La figura anterior se ve como las líneas se encuentran a la par con los huesos carpianos en diferentes posiciones y no pierde su alineación, las imágenes se desarrollaron con el framework Mediapipe, definido para crear canalizaciones de aprendizaje automático para datos de series temporales, como video y audio (Sánchez López, 2022), el algoritmo utilizó un promedio de 483 imágenes de la mano por letra, por las variaciones de posición, tamaño, color de piel debido a la luz y otros.

4. Conclusiones

Gracias a los modelos matemáticos, los alumnos conocieron como se aplican en el desarrollo proyectos desde “cero” muy especializados, o con el software utilizado se crean en un menor tiempo y con buenos resultados como en su proyecto de residencias, es importante generar conocimiento para que los futuros egresados contribuyan con el desarrollo de software nacional y disminuir la dependencia exterior.

5. Índice de referencias

- CC-BY-SA 4.0 Int. License. (2024). *Acerca de Blender*. [En línea]. Disponible en: https://docs.blender.org/manual/es/dev/getting_started/about/index.html
- CINVESTAV. (2008). *50 años de la computación en México y 25 años de la computación en el CINVESTAV*. [En línea]. Disponible en: https://www.cs.cinvestav.mx/SemanaComputoCINVESTAV/Computo.html
- Joskowicz, J. (2008). *Reglas y Prácticas en eXtreme Programming*. Universidad de Vigo.
- L. Grossman, S. (2012). *Álgebra Lineal*. Mc Graw Hill Educación.
- Lehmann, C. (1989). *Geometría analítica*. Limusa Noriega Editores.
- Maida, E., & Pacienzia, J. (2015). *Metodologías de desarrollo de software*. Pontifica Universidad Católica Argentina.
- Noriega Martínez, R. (2017). *El Proceso de Desarrollo de Software*. IT Campus Academy.
- Penadés, M., & Letelier, P. (2006). *Metodologías ágiles para el desarrollo de software: eXtreme Programming (XP)*. ResearchGate.
- Sánchez López, L. A. (2022). *Inteligencia artificial y visión por computadora aplicada a la educación*. Revista Odigos. *3*(2), 61-73.

ISSN 2448 – 7945

- Serrano Ayala, J. (2011). *Métodos de Integración entre Imágenes Generadas por Computador (CGI) y Video Real*.
- Villamarin Zapata, D. (2015). *Estado del Arte, Herramientas y Aplicaciones para Transformaciones geométricas 3D*.

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

Memorias del Congreso Internacional sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán
8 y 9 de mayo del 2024, Cuautitlán Estado de México
ISSN 2448 – 7945

ESTRATEGIAS QUE IMPLEMENTAN PROFESORES DE MATEMÁTICAS AL RESOLVER TAREAS CON MÚLTIPLES SOLUCIONES UTILIZANDO GEOGEBRA

Espinosa Ramírez Eduardo [1, *], Barrera Mora Fernando [1] y Reyes Rodríguez Aarón [1]
[1] *Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5, col. Carboneras C.P. 42184, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.*

ID-POSM039

Resumen

Se identifican y clasifican estrategias que emplean profesores de matemáticas, de secundaria y bachillerato, cuando abordan tareas/problemas con múltiples soluciones, usando GeoGebra. Particularmente, se identifica cómo GeoGebra apoya la utilización de ciertas estrategias, lo cual no se reporta en la mayoría de las investigaciones sobre tareas con múltiples soluciones. El sustento teórico de la investigación es el marco de resolución de problemas, específicamente las heurísticas propuestas por Polya (1973); así como el constructo de aprendizaje con entendimiento de Hiebert et al (1997). Los participantes en la investigación fueron ocho docentes inscritos en un posgrado en educación matemática de una universidad pública del estado de Hidalgo, seleccionados por conveniencia. Se diseñaron tres tareas con múltiples soluciones, las cuales se implementaron en ocho sesiones de dos horas cada una, durante el periodo escolar enero-junio 2023. En el problema base de la primera tarea se pide maximizar el área de un triángulo; en la segunda tarea los participantes deben encontrar la longitud de un segmento en una configuración geométrica. La tercera tarea es el problema conocido como El Tesoro del Pirata. La primera y tercera tareas se abordan individualmente, mientras que, para la segunda, los participantes trabajan en equipos. En todos los casos se realizaron exposiciones plenarias para comunicar las estrategias de solución. Las fuentes de recolección de la información fueron los reportes escritos de los participantes, así como notas de campo elaboradas por los investigadores. En todas las tareas se solicitó reportar, como mínimo, tres soluciones diferentes. Dadas las características de GeoGebra las principales estrategias que utilizaron los participantes fueron: (a) el arrastre, (b) trazado de mediatrices, y (c) medición de longitudes y ángulos. Se identificó, además, una mejora en las habilidades de resolución de problemas de los participantes.

Palabras clave: T*areas con múltiples soluciones, tecnologías digitales, resolución de problemas.*

1. Introducción

Para apoyar con efectividad el aprendizaje de los estudiantes, desde una perspectiva didáctica de resolución de problemas, el profesor debe contar con los conocimientos necesarios para diseñar e implementar tareas. Además, él mismo debe tener habilidades para resolver problemas, ya que lo anterior le permitirá guiar y brindar apoyo a sus estudiantes, ante las dificultades que emergen al resolver un problema. Por lo anterior, es importante que los docentes de matemáticas se enfrenten a experiencias de resolución de problemas de manera sistemática, similares a las que propondrán en sus salones de clase, con la finalidad de que desarrollen conocimientos y habilidades para reconocer obstáculos y dificultades, particularmente, cuando se solicita encontrar diversas rutas de solución (Antunovic-Piton et al., 2022).

[1] * *Autor para la correspondencia. E-mail: es197147@uaeh.edu.mx Tel. 771 7172 000, ext. 2531*

ISSN 2448 – 7945

Con base en lo antes mencionado, y con la finalidad de contribuir en la formación de docentes en matemáticas, en este trabajo se analizan las estrategias, utilizadas por profesores de secundaria y bachillerato, cuando abordan tareas con múltiples soluciones, las cuales son aquellas en las que se indica explícitamente obtener múltiples soluciones o rutas de solución (Leikin, 2010). El docente debe ser un hábil resolutor de problemas con amplios recursos matemáticos, y con capacidad para reconocer las ventajas y limitaciones del uso de tecnologías digitales, como Geogebra, durante el proceso de instrucción. Así, la pregunta que orienta el desarrollo de este trabajo es: ¿Qué estrategias muestran profesores de matemáticas, inscritos en un posgrado en educación matemática, cuando resuelven tareas con múltiples soluciones usando Geogebra?

1.1. Antecedentes

Se revisaron diversos trabajos de investigación que han identificado el uso de estrategias en la resolución de problemas cuando se abordan tareas con múltiples soluciones. Esto con la finalidad de conocer las principales líneas de investigación, las aproximaciones teóricas y metodológicas comúnmente utilizadas, así como los resultados de mayor relevancia. Se identificó que la mayoría de las investigaciones se enfocan en las estrategias utilizadas al resolver problemas de geometría euclidiana, con el uso combinado de ambientes de papel y lápiz, y de tecnologías digitales como Geogebra y Cabri. Los participantes en estas investigaciones son profesores en formación, profesores en servicio, así como estudiantes de educación básica (primaria y secundaria) y de licenciatura.

A partir de la revisión de la literatura, los resultados de los trabajos indican que los profesores en formación tienen escasa experiencia en resolver tareas con múltiples soluciones, además de mostrar dificultades para aplicar y estructurar sus conocimientos previos en la solución de problemas. En contraste, los profesores en servicio muestran una mejora en sus habilidades, y en el desarrollo de una actitud inquisitiva después de implementar estrategias tales como el arrastre, trazos auxiliares, uso de herramientas de medición y empleo de casos particulares en construcciones dinámicas (Piñeiro, 2021; Santos-Trigo y Barrera-Mora, 2011). Aunque en los trabajos reportados utilizan un SGD para abordar tareas con múltiples soluciones, entre los objetivos de nuestro trabajo se encuentra el explorar y documentar la forma en que el uso de un SGD puede ayudar a formular y justificar resultados (desarrollo de la Tarea 2).

1.2. Elementos teóricos

ISSN 2448 – 7945

El fundamento teórico de la investigación es el marco de resolución de problemas, específicamente las heurísticas propuestas por Polya (1973). En la perspectiva didáctica de resolución de problemas se considera que las matemáticas son la ciencia de los patrones (Steen, 1988), y que se aprende matemáticas resolviendo problemas (Halmos, 1980). Un problema es una tarea para la cual el resolutor no conoce una ruta o camino que le permita obtener la solución de forma inmediata. Así, desde esta perspectiva lo más importante no solo es encontrar la respuesta correcta, sino llevar a cabo procesos reflexivos y de construcción de significados, los cuales emergen durante la experimentación con los objetos matemáticos, durante la formulación y justificación de conjeturas, así como durante la comunicación de resultados y la formulación de nuevos problemas, (Hiebert et al., 1997).

De acuerdo con Polya (1963), la resolución de problemas promueve un aprendizaje basado en el descubrimiento y argumenta que la mejor forma de aprender y entender algo es descubrirlo por uno mismo. Es importante que los estudiantes lleven a cabo actividades análogas a las desarrolladas por los matemáticos profesionales durante la generación de nuevo conocimiento disciplinario. De acuerdo con Barrera y Reyes (2016), para favorecer el desarrollo de entendimiento matemático (Hiebert et al., 1997), es importante que durante el proceso de instrucción se lleven a cabo iteraciones sucesivas del ciclo básico mostrado en la Figura 1. El uso de tareas con múltiples soluciones ofrece oportunidades de aprendizaje, porque al considerar múltiples soluciones, se fomenta el establecimiento de diversas conexiones y ofrece a los estudiantes mecanismos para reflexionar sobre los contenidos involucrados en las distintas soluciones, promoviendo así la construcción de conceptos matemáticos. Además, estas tareas promueven la colaboración y el intercambio de ideas entre los estudiantes, generando un espacio en el que se valora la participación inquisitiva y el uso de múltiples formas de representar e interpretar la información. Esta interacción entre pares no solo fortalece la comprensión individual, sino que también enriquece el proceso de construcción de significados compartidos.

ISSN 2448 – 7945

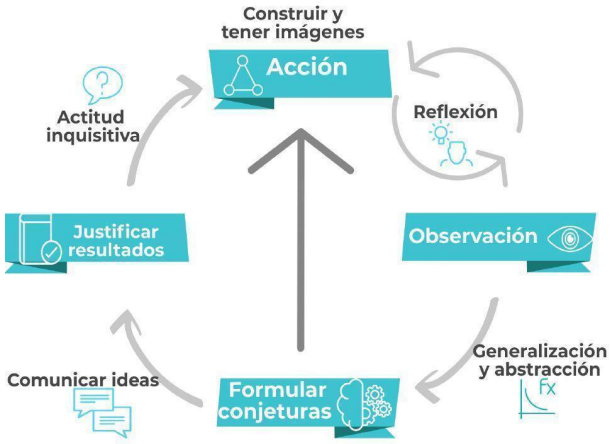


Figura 1. Ciclo básico para el desarrollo de entendimiento matemático

2. Metodología

Este trabajo se abordó desde un enfoque cualitativo, el cual se caracteriza por la forma en que se colecta, es decir, consiste principalmente en palabras que expresan ideas o significados, aunque puede ser información en forma de imágenes, dibujos, fórmulas, gestos, entre otros (Hernández et al., 2014). La característica fundamental de la información cualitativa es su finalidad de transmitir o comunicar ideas y significados. El trabajo consistió en un estudio colectivo de casos (Crowe et al., 2011), donde cada participante se consideró como un caso.

Se diseñaron e implementaron tres tareas con múltiples soluciones, durante el ciclo escolar enero-junio 2023, con un grupo de 8 docentes seleccionados por conveniencia, quienes eran estudiantes de un posgrado en educación matemática (3 hombres y 5 mujeres), en una universidad pública del estado de Hidalgo. Las tareas se llevaron a cabo en el marco de un curso sobre uso de tecnologías digitales en el aprendizaje de las matemáticas empleando el sistema de geometría dinámica (SGD de aquí en adelante) GeoGebra. Las actividades que los participantes realizaron se incluyeron en las evaluaciones parciales correspondientes a dicho curso. Las fuentes de información incluyen reportes, individuales y grupales, elaborados por los participantes, así como notas de campo elaboradas por los investigadores.

La primera tarea que abordaron los participantes consiste en maximizar el área del triángulo DPA (Figura 2 izquierda) inscrito en una circunferencia de radio R, con centro en el origen de un sistema coordenado. En el punto P, hace tangencia la recta BP, siendo B un punto móvil sobre el eje horizontal ubicado a la derecha del punto D . La segunda tarea consiste en determinar la longitud del segmento DE en una configuración geométrica donde se sabe que el triángulo ABC es isósceles, que el segmento DE es paralelo al segmento AB, además de que la base y la altura del triángulo miden 12 y 8 unidades, respectivamente (Figura 2, derecha) y la tercera tarea es el problema denominado “Tesoro del Pirata", cuyo enunciado se puede consultar en Scher (2003, citado en Ratliff, 2011).

ISSN 2448 – 7945

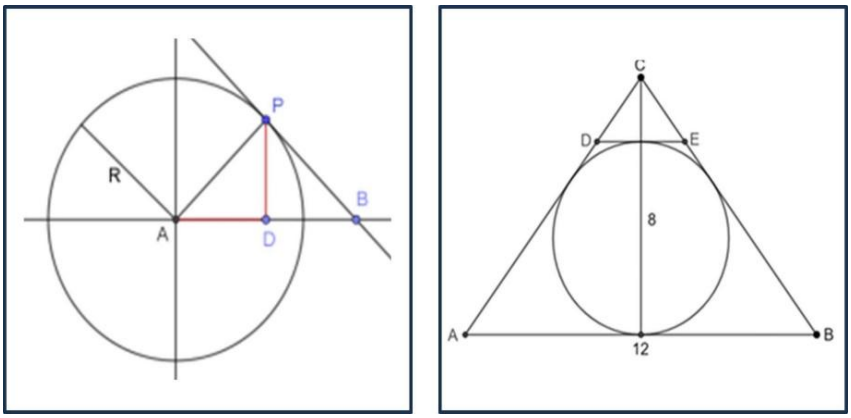


Figura 2. Configuraciones correspondientes a las primeras dos tareas

La aplicación de las tareas se llevó a cabo en ocho sesiones, dos por semana, con una duración de dos horas cada una. Durante la implementación de las tareas se favoreció que la actividad de los participantes incluyera las fases del ciclo bosquejado en la Figura 1. La primera y tercera tareas se desarrollaron de forma individual, mientras que en la segunda tarea se pidió formar dos equipos, por afinidad. El equipo A se formó con tres integrantes y el equipo B con cinco. Para la segunda tarea, los participantes llevaron a cabo trabajo extra clase, donde los equipos se reunieron para discutir las diferentes soluciones. En el caso de las tareas 2 y 3 se solicitó, explícitamente a los participantes, encontrar al menos tres soluciones diferentes. En todos los casos se solicitó la elaboración de un reporte escrito y se dedicó una sesión de clase para la discusión plenaria de los resultados.

Se consideró como categoría de análisis a las heurísticas de resolución de problemas, y como unidad de análisis a los párrafos de texto en los reportes escritos. En cada párrafo de los reportes se marcaron con un color diferente, las líneas de texto que hacían referencia, explícita o implícitamente, a heurísticas o estrategias empleadas por los participantes. Además, se trató de reconocer la posible contribución de GeoGebra al proceso de aplicación o implementación de tales estrategias.

3. Resultados

Se identificaron algunas estrategias que utilizaron los participantes cuando resolvieron tareas con múltiples soluciones con las herramientas de GeoGebra. En la primera tarea que consiste en hallar el área máxima de un triángulo, las estrategias más frecuentes son: dibujar la figura, plantear una ecuación y usar el arrastre (Polya, 1973; Hollebrands, 2012; Hölzl,1996). En esta primera tarea, los participantes sólo obtuvieron una solución, y esto puede deberse a que los participantes no habían tenido la oportunidad de conocer y abordar con anterioridad problemas con múltiples soluciones. En el caso de esta tarea destaca el uso de operaciones algorítmicas para

ISSN 2448 – 7945

hallar una solución, la falta de justificaciones y la renuencia de los participantes para utilizar GeoGebra.

En la segunda tarea, el equipo A obtuvo un total de tres soluciones y utilizaron seis estrategias (descomponer el problema, dibujar la figura, trazado de elementos auxiliares, generalización, planteamiento de la ecuación y medición de atributos). El trabajo en equipo favorece el proceso de justificación, mediante la discusión y explicación de sus hallazgos. Por su parte, el equipo B encontró 2 soluciones y utilizó ocho estrategias (descomponer el problema, dibujar la figura, trazado de elementos auxiliares, examinar la hipótesis, generalización, casos particulares, planteamiento de la ecuación y medición de atributos). Este equipo utilizó las mismas estrategias que el equipo A; sin embargo, la forma de utilizarlas los llevó a obtener rutas distintas de solución (Tabla 1). Cabe señalar que el uso de GeoGebra ayudó a los participantes a realizar una exploración del problema, haciendo uso de las herramientas que el software proporciona. En la Tabla 1 se muestran las estrategias esperadas durante el proceso de solución para ambos equipos.

Tabla 1. Estrategias aplicadas en la Tarea 2.

	Heurísticas (Estrategías)/ Participante	EQUIPO A	EQUIPO B
1	Descomponer y recomponer el problema.		
2	Dibujar la figura.		
3	Elementos auxiliares.		
4	Examinar la hipótesis.		
5	Generalización.		
6	Casos particulares		
7	Plantear una ecuación.		
8	Medición de atributos.		

Las dos estrategias adicionales de este equipo fueron: (a) examinar la hipótesis y (b) considerar casos particulares. La primera aparece cuando el equipo decide utilizar ternas pitagóricas debido a que las medidas del triángulo corresponden a una de estas ternas, así que construyeron una tabla con 15 casos particulares para verificar si la solución también se aplicaba a las otras ternas, descubriendo que sólo era válido para aquellas que son proporcionales a la terna 3, 4 y 5. Las justificaciones utilizadas por el equipo incluyeron el uso de argumentos válidos.

En la tercera tarea (El Tesoro del Pirata), los ocho participantes utilizaron como estrategia principal el arrastre junto con dibujar una figura que represente la información del problema. Se propusieron diferentes puntos del plano, en donde podría ubicarse la palmera para, posteriormente, prescindir de ella y preguntarse sí es posible hallar el tesoro sin tener la ubicación de ésta. Los resultados arrojaron que las estrategias antes mencionadas fueron base para combinarse con otras como el trazado de elementos auxiliares (mediatrices), medición de atributos (longitudes y ángulos) y planteamiento de ecuaciones. Adicionalmente, se obtuvo evidencia de una mejora en estrategias propuestas por los participantes conforme avanzaron las sesiones de trabajo. Las estrategias más utilizadas, globalmente, son el arrastre

ISSN 2448 – 7945

guiado, trazado de elementos auxiliares (mediatrices, perpendiculares), planteamiento de una ecuación y medición de atributos.

4. Conclusiones

Las estrategias que los ocho profesores de secundaria y bachillerato mostraron al usar Geogebra son el dibujar una figura, aplicar el arrastre guiado, la medición de atributos (Longitudes y ángulos), el planteamiento de una ecuación y el trazado de elementos auxiliares (rectas, paralelas, bisectrices, medianas y otras figuras geométricas).

El uso de GeoGebra les permitió a los participantes interactuar con los objetos del problema, lo cual contribuyó a que identificaran características que en un entorno de lápiz y papel quedan ocultas, por ejemplo, el disponer de la herramienta adecuada para poder desplazar al menos un punto en los problemas apoyó la forma en la cual podían justificar sus resultados. Por otro lado, aunque al principio tres de los participantes no utilizaron GeoGebra se observa que en tareas posteriores las estrategias como dibujar la figura, abordar casos particulares, y trazo de elementos auxiliares sobresalen en ellos a diferencia de aplicar algoritmos como lo fue para la primera tarea. Conforme se avanzó en la aplicación de las tareas los participantes fueron aumentando tanto las estrategias utilizadas, así como el presentar justificaciones más sólidas en los resultados que mostraron en los reportes. Cabe señalar que las discusiones plenarias realizadas en el aula permitieron a los miembros del grupo conocer, identificar e incluso explorar estrategias que no consideraron.

Agradecimientos

El primer autor agradece al Consejo Nacional de Humanidades Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por el apoyo brindado para la realización de este trabajo, a través de la beca de posgrado 1238480. El segundo autor agradece el financiamiento del Proyecto del Plan Nacional PID2022-139007NB-I00, financiado por MCIN/ AEI / FEDER, UE.

5. Índice de referencias

- Antunovic-Piton, B., & Baranovic, N. (2022). Factors affecting success in solving a stand-alone geometrical problem by students aged 14 to 15. Center For Educational Policy Studies Journal., 55-79. Recuperado el 13 de noviembre de 2022 de https://cepsj.si/index.php/cepsj/article/view/889/572
- Barrera-Mora, F., & Reyes-Rodriguez, A. (2016). Designing technology-based tasks for enhancing mathematical understanding through problem solving. In L. Uden, D. Liberona and B. Feldmann (Eds.), Learning technology for education in cloud: The changing face of education (pp. 183-192). Switzerland: Springer
- Crowe S, Cresswell K, Robertson A, Huby G, Avery A, Sheikh A. (2011). The case study approach. BMC Med Res Methodol. Jun 27;11:100. doi: 10.1186/1471-2288-11-100

ISSN 2448 – 7945

- Halmos, P. R. (1980). The Heart of Mathematics. The American Mathematical Monthly, 87(7), 519–524. https://doi.org/10.2307/2321415
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2014). Metodología de la investigación (Sexta ed.). México: Mc Graw Hill.
- Hollebrands, K. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school. Journal for Research in Mathematics Education, 38(2), 164-192. From http://www.jstor.org/stable/30034955
- Hölzl, R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of Geometry. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1, 169-187. doi:https://doi.org/10.1007/BF00571077
- Hiebert, J. et al. (1997). Making sense. Teaching and learning mathematics with understanding. United States: Heinemann.
- Leikin, R. (2010). Learning through teaching through the lens of multiple solution tasks. Mathematics Teacher Education, 69-85. doi:10.1007/978-90-481-3990-3_4
- Piñeiro, J., Castro-Rodríguez, E., & Castro, E. (2021). Conocimiento sobre la resolución de problemas de matemáticas por estudiantes para profesor. Boletim de Educaação Matemática, 1416-1437. Recuperado el 21 de Octubre de 2022 de https://www.scielo.br/j/bolema/a/s7w6mzXRsRxXW8WxGJSKzgL/?format=pdf&lang=es
- Polya, G. (1963). On learning, teaching and learning teaching. The American Mathematical Monthly 70, 605-619.
- Polya G. (1973). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton University Press, Princeton.
- Ratliff, M. (2011). Preservice Secondary School Mathematics Teachers' Current Notions of Proof in Euclidean Geometry. Tennessee Research and Creative Exchange.
- Santos-Trigo, M., & Barrera-Mora, F. (2011). High school teachers' problem solving activities to review and extend their mathematical and didactical knowledge. Primus, 21(8), 699-718. doi:https://doi.org/10.1080/10511971003600965
- Steen, L. (1988). The Science of Patterns. Science, 240(4852), 611-616. doi:10.1126/science.240.4852.611

ISSN 2448 – 7945

MATEMÁTICAS EN EL CONTEXTO DE PROBLEMAS DE BALANCE

Urrutia Vargas Celina Elena [1 *], Aguilar Márquez Armando [2], Pineda Becerril Miguel de Nazareth [3] y Pedro Guzmán Tinajero [4]
[1,2,3,4]*FESC-UNAM. Cuautitlán-Teoloyucan Km. 2.5 Vista Hermosa y Av. Narciso Mendoza, Col. San Sebastián Xhala.*

AP-POSM041

Resumen

La clase de matemáticas en la educación superior tiene como propósito desarrollar en el estudiante las habilidades necesarias para el planteamiento y resolución de problemas. Se presenta un diseño para la clase de álgebra, asignatura que se cursa en el primer semestre de la carrera de Ingeniería Química, Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM.
El objetivo planteado: El alumno será capaz de aplicar conceptos matemáticos en problemas de balance de materia. Se diseña la estrategia de aprendizaje (utilizando la planeación de la enseñanza estratégica) con un problema enfocado al tema de balance de masa (éste corresponde a la asignatura de Transferencia de Masa II que cursará en el 7°semestre de su carrera),se refuerzan sólo los conceptos algebraicos (resolución de sistemas de ecuaciones lineales por método de Cramer) , se abordan los conocimientos articuladamente para lograr que el estudiante se motive con un aprendizaje significativo a largo plazo, la estrategia didáctica aplicada es óptima logrando que los conocimientos adquiridos sean una base robusta para otras asignaturas, en conclusión, se demuestra que matemáticas no es sólo es aplicación de fórmulas sino también razonamiento lógico al solucionar problemas de Ingeniería en la vida real.

Palabras clave: *Planeación, enseñanza, ecuaciones, determinantes, balance.*

1. Introducción

Las matemáticas son una herramienta indispensable para el planteamiento y resolución de ecuaciones de balance de masa y energía, el profesor de matemáticas hoy en día para enseñar en clase tiene que explorar nuevos caminos en beneficio de sus alumnos para facilitar el aprendizaje, según Torres, De la torre, Pereyra, Hernández, Flores & Hernández (2018) “Una herramienta didáctica de apoyo en la enseñanza se puede definir como el medio o recurso, por el medio del cual se trasmiten temas una información o un conocimiento con la intención de facilitar su comprensión”(p.39). Por lo tanto el docente no puede restringir su actividad profesional solo a los aspectos temáticos , requiere considerar el desafío de enfrentar lo nuevo y renovarse constantemente. Como sostiene Bruner (1988) “La incapacidad del hombre moderno para entender las matemáticas y las ciencias no depende tanto de una atrofia de sus habilidades, cuanto de nuestro fracaso para saber cómo enseñar

[1] * *Autor para la correspondencia. E-mail: celinaelena@yahoo.com.mx*

ISSN 2448 – 7945

estas materias" (p.161). El profesor en el aula se enfrenta con la apatía del estudiante debido a que éste se encuentra acostumbrado a adquirir conocimientos rígidos que sólo aprende al aplicar y a transferir a situaciones idénticas mediante el aprendizaje repetitivo y mecánico, además el docente tiene que buscar la vinculación de los conocimientos impartidos con las materias que abordará el alumno a lo largo de su carrera, de acuerdo con Quesada (2012) "Una de las maneras conocidas para dar sentido a la información por adquirir es fomentar en el alumno el aprendizaje significativo, el cual ocurre cuando hace una incorporación activa de los contenidos objeto de estudio" (p. 50). La enseñanza estratégica de las matemáticas en el ámbito universitario tiene transformaciones a lo largo del tiempo "los antecedentes de este enfoque se pueden rastrear en la evolución de la educación matemática y en las tendencias pedagógicas, favorecen enfoques de aprendizaje activo, métodos como el aprendizaje basado en problemas"(OpenAI,2024).Esta enseñanza tiene por varios autores a lo largo del tiempo, y hay muchos libros relevantes en este campo uno de los autores destacados es Polya (1965) que menciona "el profesor que desee desarrollar en sus alumnos la aptitud para resolver problemas, debe hacerles interesarse en ellos y darles el mayor número posible de ocasiones de imitación y práctica"(p.27).

2. Metodología o desarrollo

Se presenta una propuesta del diseño de la clase de álgebra (asignatura que se imparte a los estudiantes de primer ingreso de la carrera de Ingeniería Química Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM) con base en el modelo de la enseñanza estratégica, La enseñanza del álgebra a nivel superior requiere una metodología específica que fomente la comprensión profunda de los conceptos, habilidades analíticas y la capacidad de resolver problemas complejos, como establecer el objetivo o tarea criterio. comunicación al grupo de la tarea criterio, conocimientos previos e ideas intuitivas, enseñanza activa, enfoque en la comprensión conceptual, resolución de problemas, tareas guiadas e independientes, retroalimentación, autorregulación y evaluación. En el contexto universitario el lograr la vinculación de las matemáticas con otras asignaturas es un factor importante para que el estudiante tenga interés por aprender, además en la actualización del trabajo docente en el aula el aprendizaje significativo exige la integración de los objetivos de los conocimientos de una forma distinta y así cambiar la impartición de la clase tradicional a una más dinámica, en donde se aplique la función tutorial o guía del docente para desarrollar en el estudiante las habilidades necesarias para la resolución y aplicación de problemas, se aborda un problema sencillo de balance de masa, según el (Plan de Estudios de la carrera de Ingeniería Química FESC, 2024) el tema de balance de masa corresponde a la asignatura de Transferencia de Masa II que cursará en el 7°semestre de la carrera. Se guía al alumno a la lectura y comprensión del problema planteado "Cuando la información faltante corresponde a diferentes corrientes, entonces el método estándar para la resolución de los balances de materia

ISSN 2448 – 7945

consiste en establecer el balance formal asignando letras o símbolos para la representación de las cantidades desconocidas" (Himmelblau,1974). Es difícil lograr la atención de los estudiantes "sin embargo cuando se simula un problema, es posible retener hasta el 90% de lo que se ha aprendido. Esta es una de las principales ideas del aprendizaje tanto mediante el trabajo en proyectos como en del basado en problemas" (Araújo, 2008).Para facilitar el aprendizaje efectivo buscando la comprensión, la aplicación y la apreciación de los conceptos matemáticos entre los estudiantes, se utiliza la planeación de la enseñanza estratégica donde al enfrentarse a problemas de aplicación se desarrollan habilidades de pensamiento crítico y de análisis, además de favorecer la capacidad de transferir el conocimiento a situaciones diferentes, una mejor retención del material estudiado y desarrollar habilidades de resolución de problemas para comprender la utilidad de los conceptos que se están enseñando. Una buena enseñanza tiene como base la ejecución, construcción significativa de conocimientos y se llega a ésta con la planeación. Al plantear problemas relacionados con la ingeniería como balances de masa en procesos industriales los estudiantes pueden percatarse de la utilidad de las habilidades matemáticas que adquieren en su curso de álgebra y entender la aplicación directa en el campo laboral. "Todos los balances de materiales se basan en la ley de la conservación de masa. En virtud de esta ley la cantidad de masa que entra en un sistema (o proceso) es la que sale de él" (Perry,1976). A continuación, se presentan los pasos para la planeación de la enseñanza y la clase además en un apartado especial el problema de aplicación.

2.1 Tema: Planeación de la enseñanza en clase de álgebra

2.1.1 Subtema: Determinantes

Objetivo o tarea criterio: El alumno será capaz de aplicar conceptos matemáticos en problemas de balance de materia. Antes de planificar cualquier clase, es fundamental tener en cuenta el objetivo específico que se desea alcanzar.

Contexto de recuperación: Resolución de problemas, examen.

Contexto de adquisición: En la impartición los conceptos en el aula, explicar el procedimiento o algoritmo y resolver problemas parecidos a los que resolverán en el examen.

Tipo de contenido: Procedimental (el orden de los pasos a realiza en forma de algoritmo).

Tipo de aprendizaje: Construcción.

Secuencia del contenido: En esta parte se en listan, en forma sintetizada, las actividades que hay que realizar y el orden en que se llevaran a cabo. El procedimiento o algoritmo:

a) Revisar la definición de un determinante.
b) Realizar ejercicios de resolución de determinantes.
c) Leer cuidadosamente el problema planteado.
d) Sustituir las variables en las ecuaciones generadas.
e) Realizar las operaciones.

ISSN 2448 – 7945

f) Encontrar el valor de las variables.
g) Explicar el significado del resultado, según el contexto del problema (los valores de las sustancias que se encontraron).

Selección de procedimientos de aprendizaje: Tomar notas, diagrama, algoritmo.
Manejo de ideas intuitivas: Se pregunta al alumno sus nociones, dudas y conceptos de los determinantes.
Procedimiento para mejorar la disposición al aprendizaje: Conocimientos previos. Realizar un examen diagnóstico acerca de los conocimientos que tiene de los determinantes por ejemplo ¿qué método conocen para resolverlos?, (los alumnos cursan el primer semestre de la Universidad algunos tienen el conocimiento desde nivel medio superior otros no).Al Comenzar cada clase recordando conceptos previamente aprendidos que son relevantes para el tema que se abordará ayuda a los estudiantes a hacer conexiones entre los conceptos nuevos y los conocimientos que ya poseen, se inicia la enseñanza a partir de ellos.
Procedimiento para enseñar los contenidos: Análisis del procedimiento o algoritmo.
Procedimientos para fomentar la autorregulación: Proponer al alumno la solución de problemas para identificar los puntos que no domina. Dar confianza al alumno para que pueda pedir ayuda cuando lo requiera. Orientar al alumno para que el mismo monitoree su aprendizaje.
Tareas guiadas: En el salón de clase se plantean problemas para que los estudiantes los resuelvan. El profesor verifica con cada estudiante la aplicación correcta del algoritmo y su interpretación del resultado. Se corrigen los errores individualmente o en el grupo.
Tareas independientes: Se plantearán otros problemas para que los alumnos resuelvan sin la ayuda del profesor. Se formularán las preguntas para fomentar la autorregulación con preguntas como: ¿cuáles fueron sus errores?,¿por qué no aprendieron?,¿qué les faltó? Posteriormente el profesor resuelve el problema para el grupo, con el fin que revisar las respuestas.
Evaluación: Se plantearán problemas de balance de masa (evaluación del producto), se pedirá que analicen el algoritmo y que mencione las ideas principales (evaluación del proceso).

2.1.2 La clase

Primero: Al iniciar la clase en el encuadre se pone a consideración del grupo la tarea criterio y la forma de evaluación del tema (señalando y puntualizando los aspectos que se tomarán en cuenta).
Segundo: Se realiza un diagnóstico oral, “El docente realiza un diagnóstico que le permita conocer la situación de entrada de los estudiantes con los objetivos propuestos. Así, ha de ubicar la situación estudiantil en sus niveles de aprendizaje y dominio de contenidos” (Estévez,2002), y se averiguan los conocimientos previos acerca de conceptos como los antecedentes de determinantes y su resolución.

ISSN 2448 – 7945

Tercero: Enseñanza de los contenidos: Enfoque en la comprensión conceptual no se limita a enseñar procedimientos algorítmicos; se enfatiza la comprensión conceptual detrás de los conceptos algebraicos y se realizan ejercicios del método de Cramer
Cuarto: Impartición de la clase, fomentando la participación activa de los estudiantes en el proceso de aprendizaje mediante la realización de ejercicios planeados para consolidar lo aprendido (problema de aplicación) y desarrollar la capacidad de resolución de problemas, capacidad que se define según Amaya y Prado, (2007) "Concepto específico que abarca también habilidades, estrategias, actitudes y disposición para enfrentar los retos y desafíos del mundo de hoy" (p.6).Al Proporcionar a los estudiantes problemas desafiantes que requieran la aplicación de múltiples conceptos y habilidades, esto les ayudará a pensar de manera crítica. El mencionado ejercicio se presenta al final. Quinto: Tareas guiadas: En el salón de clase se plantean problemas adicionales para que los estudiantes los resuelvan. El profesor verifica con cada estudiante la aplicación correcta del algoritmo y su interpretación del resultado. para proporcionar retroalimentación constante a los estudiantes sobre su progreso. Esto puede incluir comentarios sobre sus soluciones a problemas, para verificar su comprensión. Reconoce que los estudiantes tienen diferentes estilos de aprendizaje y niveles de habilidad. Adapta tu enseñanza para satisfacer las necesidades individuales de los estudiantes, proporcionando actividades y recursos adicionales para aquellos que necesiten apoyo adicional, así como desafíos para aquellos que estén más avanzados.
Sexto: En cuanto a la tarea independiente: Se plantearán otros problemas para que los alumnos resuelvan sin la ayuda del profesor y éste los revisará al final con el fin de fomentar la autorregulación ¿cuáles fueron sus errores? ¿qué les faltó? y solicitan revisan ejercicios que realizaron por su cuenta los estudiantes para consolidar lo aprendido
Séptimo: En la evaluación se plantearán problemas en base a la tarea criterio y se recaba la información suficiente para conocer el grado de avance en el aprendizaje alcanzado por los alumnos.

2.1.3 El problema de aplicación

Conocimientos previos:
a) "Se define el determinante IAI de una matriz A= (a i j)3x3 por la expresión:
$a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$
Un examen detenido de esta suma revela un patrón definido" (Sydsaeter, Hammond &Carbajal,2012, p.363).
b) Método de Cramer para solucionar sistemas de ecuaciones "Sin embargo, la regla de Cramer es una herramienta valiosa en las matemáticas teóricas y aplicadas más avanzadas" (Barnett, Ziegler & Byleen,2000, p.712).

En un reactor industrial se analiza un proceso químico en el que se tienen tres componentes: *x, y, z*. Se sabe que la cantidad total de cada elemento se conserva. En un determinado momento, se obtuvieron las siguientes relaciones entre las cantidades de los componentes:

ISSN 2448 – 7945

Para la primera ecuación de balance de materia se encontró que:

Ecuación 1. $8x+6y+10z=180$

Para la segunda ecuación de balance de materia se encontró que:

Ecuación 2. $5x+4y+2z=81$

Para la tercera ecuación de balance de materia se encontró que:

Ecuación 3. $3x+6y+4z=107$

Pregunta: ¿Cuáles serían las cantidades de los componentes?

Para resolver este sistema de ecuaciones usando determinantes, primero se representa en forma matricial:

Ecuación 4.
$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 10 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 \\ 81 \\ 107 \end{bmatrix}$$

Ahora se resuelve por la regla de Cramer:

Obtener el determinante de la matriz de coeficientes(Δ) :

Ecuación 5.
$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 10 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 128$$

MEMORIAS DEL Congreso Internacional

Se calculan los determinantes en $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ **ecuaciones 6,7, 8**

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 180 & 6 & 10 \\ 81 & 4 & 2 \\ 107 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 640 \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} 8 & 180 & 10 \\ 5 & 81 & 2 \\ 3 & 107 & 4 \end{vmatrix} = 1280 \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 180 \\ 5 & 4 & 81 \\ 3 & 6 & 107 \end{vmatrix} = 1024$$

Por último, se encuentran los valores de los componentes x, y, z:

Ecuaciones 9,10,11

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{640}{128} = 5 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{1280}{128} = 10 \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{1024}{128} = 8$$

Los valores encontrados de *x, y, z* representan las cantidades de los componentes químicos, al final, se reflexionar sobre lo que se ha aprendido y cómo se puede mejorar en el futuro.

3. Resultados y análisis

En el momento de la clase donde el estudiante de Ingeniería Química aborda la resolución del problema práctico de balance de masa conecta el álgebra con situaciones reales y se enfrenta con la necesidad de modelarlo matemáticamente primero analiza la información disponible para identificar las incógnitas o las cantidades desconocidas de las sustancias involucradas, segundo establece relaciones entre variables les asigna una letra *x, y, z*, respectivamente, a continuación escribe las ecuaciones de balance de masa, toma en cuenta que por cada variable desconocida que se consideró se establece un balance de masa independiente dando como resultado tres ecuaciones lineales por último se resuelve por métodos

ISSN 2448 – 7945

algebraicos en este caso por la regla de Cramer para llegar a la solución. Esto implica revisar el objetivo de aprendizaje, evaluar la efectividad de las actividades realizadas y hacer ajustes en la planificación futura según las necesidades de los estudiantes.

4. Conclusiones

En la aplicación de la estrategia didáctica propuesta utilizando la resolución de problemas prácticos se logra alcanzar una experiencia de aprendizaje efectiva y significativa en los estudiantes, ayudándoles a desarrollar una comprensión profunda de los conceptos y habilidades matemáticas sólidas necesarias para tener éxito en el estudio y la aplicación del álgebra en el nivel superior como se evidencia con los resultados de los exámenes programados para la evaluación.

La enseñanza estratégica de matemáticas en el contexto de problemas de balance de masa utilizando determinantes es una herramienta fundamental en el desarrollo de habilidades cognitivas.

Al utilizar la enseñanza estratégica en su clase el profesor de matemáticas logra situar al estudiante en forma cada vez más activa en el centro del proceso de aprendizaje y llevar el contenido de la enseñanza en una integración significativa a su memoria a largo plazo, porque lo estimula lo motiva y les ayuda a comprender la utilidad de lo que están estudiando.

El problema de aplicación de balance de masa que se plantea, aunque modesto cumple con el objetivo de que al término de la clase el alumno será capaz de aplicar conceptos matemáticos en el contexto de problemas de balance de masa y en explicar el significado del resultado, según el contexto del problema, además lo prepara para utilizar el razonamiento lógico matemático.

5. Índice de referencias

.

Libros

- Amaya. & Prado, E. (2007). *Estrategias de aprendizaje para universitarios un enfoque constructivista. México*: Trillas, p.6
- Araújo, U. (2008). *El Aprendizaje basado en problemas. Una nueva perspectiva de la enseñanza en la universidad.* España: Gedisa, p.75
- Barnett, R., Ziegler,M., & Byleen,K.(2000). *Precálculo funciones y gráficas.* México: Mcgraw-hill /internacional editores, 4^0 edición.
- Bruner, J. (1988). *Desarrollo cognitivo y educación, selección de textos por Jesús Palacios.* España: Morata,5^0 edición, p.161
- Estévez, E. (2002). *Enseñar a aprender ,estrategias cognitivas.* México: Páidos, p.81
- Himmelblau, D. (1974). *Principios y cálculos básicos de la ingeniería química*. México: C.E.C.S.A.6^a impresión.p.96
- Perry, J. (1976). *Manual del Ingeniero Químico.* México: UTHEA, p.507
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas, p.27

ISSN 2448 – 7945

- Quesada, R. (2012). *Cómo planear la enseñanza estratégica.* México: Editorial. Limusa. págs.50 y 223
- Sydsaeter, K., Hammond, P., & Carbajal, A. (2012). *Matemáticas para Análisis Económico*.2ª edición. España: Pearson Educación
- Torres. V, De la torre, V. R., Pereyra, S. A., Hernández, M.S., Flores, G.M. & Hernández, J.J. (2018). *Tecnologías educativas para el proceso de enseñanza -aprendizaje.* México: Fontamara, p.39

Información en línea

- Open AI.(2024), Conversación con ChatGPT [En línea] Disponible en URL: https://chat.openai.com/share/0ff4e724-f125-42c8-a524-48b94364fb00. Fecha de recuperación 21-01-2024
- Plan de Estudios de la carrera de Ingeniería Química. Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. [En línea]. Obtenido en enero 10 del 2024 de la dirección:https://www.cuautitlan.unam.mx/licenciaturas/ing_quimica/plan_estudios.html

MEMORIAS DEL Congreso Internacional

ISSN 2448 – 7945

SISTEMAS CONCEPTUALES GENERADOS POR ESTUDIANTES DE NUEVO INGRESO A MATEMÁTICAS APLICADAS EN TAREAS DE MODELACIÓN

Nelly Mariela Moreno Cruz[1 *], Aarón Reyes Rodríguez [2] y Fernando Barrera Mora [3]
[1]*Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, Col. Carboneras, C.P. 42184, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.*

IP-POSM042

Resumen

Se identifican y caracterizan modelos generados por estudiantes de nuevo ingreso a una licenciatura en matemáticas aplicadas, cuando abordan una tarea que es una adaptación de la Model Eliciting Activity (MEA) denominada "El hotel histórico". La tarea se adaptó, implementó y analizó con base en la Perspectiva de Modelos y Modelación (PMM), propuesta por Lesh. La tarea tiene tres secciones: (i) actividad de calentamiento, (ii) actividad principal, y (iii) exposiciones plenarias. En la investigación participaron 19 estudiantes, seleccionados por conveniencia, inscritos en una universidad pública del estado de Hidalgo. Las actividades se implementaron durante el ciclo académico julio-diciembre 2023, como parte de una de sus asignaturas de primer semestre. La implementación se llevó a cabo en dos sesiones de trabajo de tres horas cada una. En la primera sesión, los participantes abordaron la actividad de calentamiento y la actividad principal, en equipos. En la segunda sesión se efectuaron las presentaciones plenarias. Las fuentes de recolección de la información fueron las producciones escritas de los estudiantes, así como grabaciones en video de las exposiciones plenarias. Se identificaron los sistemas conceptuales (modelos) generados, así como los procesos de mejora, adaptación y refinamiento. Se propusieron tres tipos de modelos, tabular, gráfico y algebraico. Los estudiantes elaboraron los tres modelos y se realizó el refinamiento de su aproximación inicial. Mediante la comparación y discusión se logró el refinamiento de los modelos individuales, obteniéndose evidencia de una mejora de los sistemas conceptuales propuestos por los estudiantes.

Palabras clave: *Modelación, tareas, aprendizaje, licenciatura, estudiantes, optimización.*

1. Introducción

En diversas investigaciones (Guerrero y Borromeo, 2022) y propuestas curriculares de carácter internacional (CCSSI, 2022) se promueve la inclusión del modelado en los programas de estudio, debido a que este tipo de actividades permite que los estudiantes desarrollen habilidades para tomar decisiones informadas. Sin embargo, lo anterior se lleva a cabo sin brindar a los profesores la capacitación necesaria para abordar el desafío que implica promover un aprendizaje basado en la modelación matemática. En las perspectivas didácticas que favorecen la modelación se considera que el aprendizaje de un concepto se asocia con el desarrollo de modelos; es decir, sistemas conceptuales construidos a partir de las situaciones del mundo real. La construcción de

[1] *Autor para la correspondencia. E-mail: nellymariela2610@gmail.com*

ISSN 2448 – 7945

modelos es un medio para que los estudiantes entiendan, expliquen e, incluso, realicen predicciones sobre el comportamiento de fenómenos o situaciones de la vida real; pero es importante reconocer que el proceso de modelación no es una tarea fácil. Con base en lo antes mencionado, el objetivo de este trabajo es identificar la evolución de los modelos generados por estudiantes inscritos en primer semestre de una licenciatura en Matemáticas Aplicadas, en una universidad pública de México, cuando abordan una actividad, la cual es una adaptación de la *Model Eliciting Activity* denominada *Hotel Histórico* (Aliprantis y Carmona, 2003). En este contexto, los objetivos específicos son: (i) identificar los sistemas conceptuales generados por los estudiantes, (ii) describir el proceso de evolución de los modelos, (iii) identificar regularidades en las representaciones utilizadas.

1.1. Antecedentes

Se revisaron diversos trabajos de investigación interesados en identificar los modelos que generan estudiantes o profesores al abordar actividades contextualizadas denominadas Model Eliciting Activity (en lo subsecuente referidas como MEA), con la finalidad de conocer las principales líneas de investigación, las aproximaciones teóricas y metodológicas comúnmente utilizadas, así como los resultados de mayor relevancia. La revisión incluyó artículos empíricos de investigación, publicados en revistas de reconocido prestigio. De acuerdo con la revisión de literatura, se concluye que las investigaciones sustentadas en la Perspectiva de Modelos y Modelación (PMM) se enfocan en analizar los modelos generados por estudiantes de educación básica (Aguilar, 2021), y de diversas licenciaturas, entre las que se encuentran contaduría (Montero y Vargas, 2022), medicina, ingenierías (Aviña, 2019; Ärlebäck, 2013). También hay investigaciones en las que participan profesores, tanto de secundaria como de bachillerato (Alvarado, 2017; Vargas, 2018). Sin embargo, la investigación sobre modelos generados por estudiantes de licenciatura en matemáticas o matemáticas aplicadas es reducida (solo se identificó un artículo al respecto). Por otra parte, los resultados de tales investigaciones no informan si existió una generalización o reutilización del modelo, y las conclusiones se limitan a afirmar la presencia o ausencia de un refinamiento de los modelos generados.

1.2. Elementos teóricos

Este trabajo se fundamenta teóricamente en la PMM, la cual es una perspectiva didáctica en la cual el aprendizaje matemático se concibe como una actividad de construcción de modelos, los cuales son sistemas conceptuales que consisten en elementos, relaciones y reglas que gobiernan las interacciones entre tales elementos y que se expresan mediante el uso de sistemas de notación externa, y que son utilizados para construir, describir o explicar los comportamientos de otros sistemas (Lesh, 2003). Los modelos permiten comprender, explicar, manipular, predecir o controlar sistemas matemáticamente significativos; por lo que, la construcción de tales sistemas conceptuales permite a una persona desarrollar habilidades para construir nuevo conocimiento a partir de sus recursos y experiencias previas. En esta aproximación

ISSN 2448 – 7945

teórica, el producto del aprendizaje es el *proceso de construcción de modelos* y no sólo el modelo.

Las tareas asociadas con la PMM consisten en situaciones problemáticas contextualizadas. Son situaciones reales o hipotéticas, que son versiones simplificadas de problemáticas a las que se enfrentan personas que hacen un uso intensivo de las matemáticas en su actividad profesional. Existen seis principios para el diseño de una MEA (Doerr, 2016):

- Principio de la realidad. Las situaciones deben ser cercanas a los intereses de los estudiantes, sus experiencias y conocimientos.
- Principio de la construcción de modelos. Se busca el desarrollo explícito de una construcción, descripción, explicación o de una predicción justificada.
- Principio de la autoevaluación. Los estudiantes, por sí mismos, reconocen la necesidad de hacer construcciones, descripciones, explicaciones y, por ello, pueden emerger ideas novedosas y relevantes en un grupo.
- Principio de documentación. Las situaciones deben ser reveladoras de pensamiento, en el sentido de que los productos generados por los estudiantes revelan la forma como pensaron los datos, las metas y el proceso de solución.
- Principio de la reutilización del modelo. Un modelo proporciona información sobre una forma de pensamiento transferible, susceptible de modificaciones y reutilización.
- Principio de la generalización del modelo. Se genera una solución que proporciona un prototipo útil para interpretar situaciones más complejas.

2. Metodología o desarrollo

Esta investigación es cualitativa ya que los datos empíricos se encuentran en forma de palabras, ecuaciones, gráficas y tablas, los cuales expresan significados. De acuerdo con Kazdin (2016), la investigación cualitativa está centrada en narrativas, descripciones, interpretaciones, contextos y significados; y su objetivo general es describir, interpretar y comprender fenómenos, mediante el estudio y análisis profundo de la experiencia contextualizada de los participantes, y la transmisión de cómo se percibe esa experiencia y el significado que tiene para los participantes. Así, en una investigación cualitativa se buscan patrones de significado.

2.1 Diseño de la MEA

La MEA que se utilizó en este trabajo está basada en la actividad denominada *Hotel Histórico*, propuesta por Aliprantis y Carmona (2003). La tarea se adaptó al contexto sociocultural de los estudiantes con los que se implementó. Mediante una búsqueda en internet, se identificó una noticia sobre el cierre de un hotel con importancia histórica en la ciudad de Pachuca. Después de leer la nota periodística, se realizaron preguntas a los estudiantes con la finalidad de familiarizarlos con el contexto de la tarea. A la lectura de la nota periodística, junto con las preguntas de contextualización, se le denomina *Actividad de Calentamiento* (en lo subsecuente referida como AC).

ISSN 2448 – 7945

Posteriormente, se entregó por escrito el enunciado de la tarea principal, denominada *Administración del Gran Hotel de Pachuca*, en el cual un grupo empleados, se oponen al cierre del hotel, solicitan ayuda, para que los estudiantes, quienes abordan la actividad, elaboren una carta dirigida a Rebeca, la dueña del hotel. En la carta, se debe explicar a la dueña cuánto debe de cobrar por una noche de habitación, de modo que se maximice la ganancia, dada la siguiente información: si se cobran $1500 por habitación, por noche, el hotel tendría cupo completo; es decir, se ocuparían todas las habitaciones. Por cada $50 que se incrementa el precio de la habitación, las habitaciones ocupadas disminuyen en una unidad. Por ejemplo, si el costo diario por habitación es de $1600, entonces sólo se ocuparán 33 habitaciones. Además, el costo de limpieza de cada habitación es de $40. También se debe pagar el salario de la persona que atiende el bar y el estacionamiento, que por día es de $250 y $200, respectivamente. Estos costos son independientes del número de habitaciones ocupadas.

2.2 Implementación de la MEA

La MEA se implementó con un grupo de 19 estudiantes de nuevo ingreso a una Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, en una universidad pública del estado de Hidalgo. Los estudiantes se seleccionaron por conveniencia, ya que uno de los autores impartió una de las seis asignaturas que los participantes cursaron durante el primer semestre. La MEA fue una de las actividades regulares del curso, y se consideró para la evaluación del tercer periodo parcial. El proceso de implementación se llevó a cabo en dos sesiones de clase, de tres horas cada una, durante el mes de diciembre de 2023.

En este trabajo sólo se reporta el trabajo de cuatro estudiantes, quienes trabajaron en equipo. En la primera sesión, llevada a cabo el jueves 7 de diciembre, los participantes abordaron la AC y la actividad principal. Los primeros 30 minutos se utilizaron para explicar en qué consistía la actividad, se respondieron las dudas y los participantes respondieron las preguntas de la AC. El resto de la sesión la dedicaron a la actividad principal, cuyo producto es la carta para Rebeca. Se proporcionó a los estudiantes una rúbrica de evaluación. También se les pidió elaborar una presentación de diapositivas, como actividad extra-clase, en la cual explicarían los modelos que elaboraron. La primera autora revisó los reportes escritos entregados por los participantes previo a la segunda sesión de trabajo. Las exposiciones, en plenaria, se llevaron a cabo el martes 12 de diciembre; en ella, el equipo presentó los modelos que elaboraron y explicaron el proceso de construcción de tales modelos. En esta sesión, se realizaron preguntas con la finalidad de resolver dudas sobre la información de los reportes escritos. Además, los estudiantes respondieron una encuesta anónima, en la que expresaron su opinión sobre la actividad y completaron una autoevaluación de su desempeño y la calidad del modelo que realizaron.

2.3 Instrumentos de recolección de la información

La información se recolectó mediante los reportes escritos que realizaron los estudiantes: borradores individuales, cartas y reportes por equipo. Estas producciones en papel

ISSN 2448 – 7945

se digitalizaron. Las exposiciones, en plenaria, se grabaron en vídeo y, posteriormente, se realizó una transcripción de tales grabaciones. Las transcripciones, junto con los documentos digitalizados, constituyeron los datos crudos de la investigación.

2.4 Procedimiento de análisis

El análisis involucró la transformación textual en datos, mediante la identificación de tres tipos de modelo: algebraico, tabular y gráfico. A partir de estas categorías se reconocieron los cambios o adaptaciones de los sistemas conceptuales generados por los estudiantes.

3. Resultados y análisis

En este apartado se describen las acciones de cada integrante del equipo para identificar si hubo refinamiento en los modelos y, posteriormente, se discute el proceso de construcción de acuerdos grupales. Los estudiantes nombraron a un presidente y secretario de equipo, quienes organizaron los roles de los participantes y fue el encargado de tomar notas y elaborar el reporte final. Las respuestas a la AC, indican que los estudiantes creyeron que la situación era real, por lo que se involucraron personalmente en el problema. De acuerdo con el reporte, primero leyeron el enunciado del problema, y cada uno intentó obtener una solución. Posteriormente, comentaron e intercambiaron sus puntos de vista. El presidente realizó una representación gráfica de la función que realizó otro de sus compañeros, donde se observa la ganancia máxima. Después de volver a discutir con sus compañeros propuso su propio modelo algebraico el cual pasó por dos modificaciones. El modelo incluye la representación algebraica, él considera a x el número de habitaciones vacías, $H(x) = 35 - x$ representa las habitaciones ocupadas, $D(x) = 1500 + 50x$ es el precio de las habitaciones en función de las habitaciones vacías, los gastos de limpieza no los consideró en función de las habitaciones vacías, es decir, lo tomó como si fuera un salario constante como el de los encargados del bar y estacionamiento. El estudiante se dio cuenta que su modelo sólo cubría las ganancias por una habitación. La primera modificación (o refinamiento) consistió en considerar los gastos de limpieza en función de x, las habitaciones vacías y los gastos de bar y estacionamiento. Él menciona que la parte de las habitaciones ya estaba solucionada, pero se da cuenta que su ecuación sigue sin responder al problema planteado ya que nuevamente no consideró el número de habitaciones ocupadas y sólo consideró las vacías. Finalmente, en su última modificación pudimos observar que los gastos de limpieza se están multiplicando por el número de habitaciones ocupadas. De acuerdo con la entrevista que se le realizó sobre sus sistemas conceptuales pudimos observar que muestra un claro refinamiento del modelo que generó.

El segundo integrante creó tres sistemas conceptuales: primero consideró una tabla donde denomina a las variables x y y como sigue: x= habitaciones ocupadas y y=precio por habitación; después representó la ecuación de una recta que pasa por los puntos $(35, 1500)$ y $(34, 1550)$, la recta que pasa por estos puntos es $y = -500 + 3250$, él

ISSN 2448 – 7945

estudiante considero a y como el número de habitaciones, lo multiplica por x y le resta los gastos de limpieza y servicios que encontró el integrante anterior. De aquí intenta calcular la primera entrada del vértice de una parábola, es decir, $x = 32.9$, pero exploró más esta idea en su siguiente modelo. Para su tercer sistema conceptual, realizó una gráfica de una parábola donde consideró a x como el número de habitaciones que no se deben ocupar y y las ganancias.

El tercer integrante creó dos modelos algebraicos, uno de los cuales emergió al comparar sus resultados con los del estudiante 2. El estudiante 3 pensó inicialmente que la siguiente expresión algebraica era incorrecta:

$$G(x) = (1500 + 50x)(35 - x) - 40(35 - x) - 450.$$

En este modelo, la literal x representa el número de habitaciones vacías, pero al final abandonó la idea. Su segundo modelo considera a x como el número de habitaciones ocupadas, entonces $35 - x$ son las habitaciones vacías, lo cual multiplica por los 50 pesos de cada habitación vacía que hay y le suma 1500 que es el precio de cada habitación y llega a que las habitaciones ocupadas por el precio de habitación están dadas por la función $x(1500 + 50(35 - x))$ menos los costos de limpieza, bar y estacionamiento, al desarrollar y simplificar llega a la función de ganancia $Gx = -50x2 + 3210x - 450, 0 < x < 35$. El estudiante mencionó que la máxima ganancia se obtiene cuando $x = 32.1$, pero como las habitaciones son un número entero lo aproximó con el valor de $x = 32$.

El secretario, al observar que había discrepancias entre sus compañeros, elaboró una tabla de las ganancias máximas del hotel, donde x es el número de habitaciones ocupadas, y la literal y representa el costo de la habitación y las ganancias. Realizó esta tabla para corroborar los datos de sus compañeros. Por último, en la carta que entregaron se observan los tres tipos de sistemas conceptuales: algebraico, tabular y gráfico. El procedimiento consistió en identificar los datos que conocen, y posteriormente representan con x al número de habitaciones ocupadas. Así, $35 - x$ es el número de habitaciones vacías, de esto obtienen que el precio por habitación será igual al precio inicial más el número de habitaciones ocupadas multiplicado por el precio adicional, es decir, $1500 + 50(35 - x)$. Las ganancias brutas del hotel se calcularon sin tomar en cuenta los gastos de mantenimiento por habitación y los salarios de los empleados. Por lo que, es necesario multiplicar el precio por habitación obtenido anteriormente por el número de habitaciones ocupadas, es decir, $x(1500 + 50(35 - x))$. Después calcularon los gastos por día, es decir, los gastos de limpieza y salarios, los cuales serían $40x + 450$. Finalmente, para calcular la ganancia neta diaria, a la ganancia bruta le restan los gastos anteriores, desarrollando y simplificando obtuvieron la expresión $G(x) = 3210x - 50x2 - 450$. Además, elaboraron una representación gráfica, a partir de la que visualizaron el máximo que se alcanza cuando $x = 32$, Así, el vértice de la parábola es $V(32, 1650)$. Adicionalmente, integraron la tabla de ganancias netas. El proceso de colaboración permitió recopilar los modelos generados individualmente.

ISSN 2448 – 7945

De acuerdo con la autoevaluación, los participantes consideran que su modelo es bueno en comparación con el de sus compañeros. También consideran que su modelo puede adaptarse, reutilizarse y generalizarse con facilidad. En la entrevista se les preguntó por qué no habían incluido en su carta, información con respecto a la reutilización y generalización, pero ellos contestan que no tuvieron suficiente tiempo, pero si se sustituyen nuevos datos, el modelo continúa funcionando.

4. Conclusiones

La información empírica permitió identificar un proceso de refinamiento de modelos a partir de la discusión entre los integrantes del equipo. A su vez, aunque no lo pusieron por escrito en la cara o en el reporte, mencionan que su modelo es apto para reutilizarse y que sirve para generalizarse si es que se desea cambiar todos los datos que se proporcionan. Por otro lado, es importante resaltar que el contexto de la tarea fue crucial para el proceso de modelación ya que los estudiantes se involucraron en la tarea, con la finalidad de dar solución a la problemática planteada por el cliente ficticio, quien solicitó su apoyo.

Agradecimientos

La primera autora agradece al Consejo Nacional de Humanidades Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por el apoyo brindado para la realización de este trabajo, a través de la beca de posgrado 1272116.

5. Índice de referencias

- Aguilar, J. J. (2021). Modeling through Model-Eliciting Activities: An analysis of models, elements, and strategies in High School. The cases of students with different level of achievement. *Mathematics teaching research journal, 13(1),* 52-70.
- Aliprantis, C. D. & Carmona, G. (2003). Introduction to an economic problema: a models and modeling perspective. En R. Lesh & H. M. Doerr (Ed.), *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 255-264). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Alvarado, A., Olvera, C. Mata, A. & Escobedo, A. (2017). Secuencia de desarrollo de modelos para la enseñanza y el aprendizaje multinivel e interdisciplinario. *Tópicos selectos de Educación en CITEM,* 13-31.
- Aviña, M. J., Vargas, V. Alvarado, A. & Cristóbal, C. (2019). Ciclos de entendimiento de estudiantes universitarios al resolver una actividad de proporcionalidad. *CPU-e. Revista de Investigación Educativa, 29.*
- Ärlebäck, J. B., Doerr, H. M. & O´Neil, A. H. (2013). A modeling perspective on interpreting rates of change in context. Mathematical thinking and learning, 15(4), 314-336.

ISSN 2448 – 7945

- Ärlebäck, J. B. & Doerr, H. M. (2020). Moving beyond descriptive models: Research issues for design and implementation. AIEM Avances de Investigación en Educación Matemática, 17, 5-20.
- Common Core State Standards Initiative [CCSSI] (2022). Common Core State Standards for Mathematics. USA: CCSSI.
- Doerr, H. M. (2016). Designing sequences of model development tasks. En C. R. Hirsch & A. R. McDuffie (Ed.), Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics (pp.197-205). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Guerrero, C. & Borromero, R. (2022). Pre-service teachers' challenges in implementing mathematical modelling: Insights into reality. PNA, 16(4), 309-341.
- Kazdin, A. E. (2016). Research design in clinical psychology. Boston, MA: Pearson.
- Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., & Zawojewsky, J. S. (2003) Modelo development sequences. En R. Lesh & H. M. Doerr (Ed.), Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching (pp. 35-59). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Montero, L. & Vargas, V. (2022). Ciclos de modelación y razonamiento covariacional al realizar una actividad provocadora de modelos. *Educación Matemática, 34,* 214-248.
- Vargas, V., Reyes, A. & Cristóbal, C. (2018). La deforestación como consecuencia del incremento de áreas de cultivo: Actividad Provocadora de Modelos. Épsilon, 99, 7-28.

Memorias del Congreso Internacional sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán
8 y 9 de mayo del 2024, Cuautitlán Estado de México
ISSN 2448 – 7945

USO DE TUTORES AUTÓNOMOS EN PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Torres Ramos Ingrid Chantal[1, 1], Ma. Eugenia Canut Díaz Velarde[2]
[1,2]*Facultad de Estudios Superiores Acatlán (FES Acatlán). Avenida Alcanfores y San Juan, Totoltepec s/n, Sta Cruz Acatlán, 53150 Naucalpan de Juárez, México*

ID-POSM043

Resumen

En los últimos años la educación en México se ha enfrentado a varios retos. En el año 2020 con la declaración de COVID-19 (febrero 2020 primer caso confirmado) en particular se paraliza la vida "normal" escolar, generando un incrementó en el rezago educativo en todos los niveles. Según el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), 5.2 millones de niños, adolescentes y jóvenes entre los 3 y los 29 años, no se inscribieron al ciclo escolar 2020-2021 por motivos económicos y por causas de la COVID-19. Actualmente, con la evolución e implementación de la tecnología el profesor debe enfrentarse a la inserción de nuevas herramientas educativas. Una de las más populares es el uso de los Chatbots de inteligencia artificial (IA) como tutores inteligentes, diseñados para fortalecer el aprendizaje dentro y fuera del aula. Por eso, el objetivo del trabajo es analizar el uso y alcances de los diversos programas de IA. Del cual se desprende la pregunta de investigación de qué manera es utilizado el Chatbots durante el proceso de enseñanza aprendizaje y cuáles son las estrategias utilizadas en la aplicación de ejercicios de clase. Una causa de temor de los profesores es el uso desmedido de dicha herramienta por parte del estudiante sin los conocimientos previos sobre el tema, además de aumentar la tasa de plagio al presentar como propio el contenido generado por la IA.

Palabras clave: *educación, inteligencia, artificial, tutoría.*

1. Introducción

La evolución de la Inteligencia Artificial (IA) ha sido un proceso continuo a lo largo de varias décadas. Considerando que los primeros trabajos teóricos sobre IA son de 1940 con Turing y von Neumann quienes desarrollaron las primeras máquinas de cálculo y lógica, como la máquina de Turing y el ENIAC, sentando las bases para la computación y la IA. En 1990-200 con el aprendizaje automático se produjo un renacimiento en la investigación de redes neuronales gracias al avance en la capacidad de cómputo y la disponibilidad de grandes conjuntos de datos. Dando origen a algoritmos de aprendizaje automático como las Máquinas de Soporte Vectorial (SVM) y las Redes Neuronales Profundas (Deep Learning).
Otra etapa importante en la IA es la de Big Data y Aprendizaje Profundo (2000-2020), con el boom de Internet y la disponibilidad de grandes cantidades de datos (generado

1 *Autor para la correspondencia. E-mail: ingalixt_03@hotmail.com*

ISSN 2448 – 7945

por diversas empresas de telecomunicación, farmacéuticas, bancarias, entre otras) se impulsó el desarrollo del aprendizaje profundo, que permitió avances significativos en la visión por computadora, el procesamiento del lenguaje natural y otros campos. Grandes empresas tecnológicas como Google, Facebook y OpenAI lideraron la investigación en IA.

Desde el 2020 la IA se ha incorporado en la vida cotidiana a través de aplicaciones como asistentes (tutores) virtuales, sistemas de recomendación, vehículos autónomos, telecomunicaciones, entre otros. Actualmente, se continúa investigando y desarrollando la IA para abordar problemas globales, como el diagnóstico médico, la predicción del cambio climático y la automatización industrial. En particular, la educación está sufriendo una transformación por lo que el profesor se ha enfrentado a las preguntas ¿se debe cambiar el modelo de educación universitaria actual?, ¿deben las instituciones de educación superior incluir las herramientas de IA en sus planes de estudio?, ¿en los años próximos qué necesitarán las universidades para seguir cumpliendo la misión, visión de la institución, más aún de la sociedad? O una pregunta más simple ¿qué debo modificar en la clase para que la IA sea utilizada de manera óptima? La implementación de la IA en la educación ha generado un intenso debate en torno a sus ventajas, desventajas y usos. La inteligencia artificial en la educación ha cambiado no solo el sistema educativo sino también los enfoques de compartir conocimientos para el aprendizaje, la cognición y el desarrollo de la civilización (Kaur, 2021).

Los sistemas automatizados, han sido apoyos educativos desde hace muchos años (como Lego Mindstorms el robot construido en la década de 1980 por la empresa LEGO y el ITM). Al hablar de las ventajas de la IA uno de los primeros puntos es la educación personalizada. Al ser el aprendizaje automático (Machine Learning) una aplicación de la IA se puede adaptar el contenido y el ritmo de aprendizaje a las necesidades personales de cada estudiante.

En la década de los 60 se inicia la enseñanza asistida por computadora por medio de sistemas de tutoría inteligentes (ITS, por sus siglas en inglés). Los ITS consisten en un software que utiliza técnicas de IA con el fin de representar el conocimiento e interactuar con el estudiante; su desiño y construcción es la base de la psicología cognitiva, investigación educativa e IA (Quispe, 2014). Los ITS se han desarrollado a tal grado que hay una gran variedad por mencionar algunos: ChatGPT, Nuevo Bing, Tidio, Zendesk, Chatsonic, LivePerson, Ada, Einstein GPT, Google Bard, Replika.

Por otro lado, según el informe de la UNESCO “Inteligencia Artificial y Educación” (2020) indica que los sistemas de educación en línea basados en IA pueden superar problemas geográficos y socioeconómicos logrando un mejor nivel educativo. En este momento se puede realizar una pausa, realizar una reflexión como profesor, entender el gran reto al que se enfrenta considerando el sistema educativo mexicano. Considerando que, a nivel mundial, la intensificación de la adopción de tecnología digital en el proceso de aprendizaje es desigual entre las instituciones educativas y sigue siendo un problema clave en la mejora de la calidad del aprendizaje en muchos países desarrollados (Fahimirad y Kotamjani, 2018). Tomando en consideración que no todas las políticas públicas de educación son coherentes internacionalmente, lo

ISSN 2448 – 7945

que conlleva una eficiencia y racionalidad subjetivas en los procesos de aprendizaje (Pedro et al., 2019).

El presente trabajo tiene como objetivo mostrar cómo algunas actividades que solían dejarse en clase ya no cumplen su objetivo al contar como un tutor autónomo. Para ello, se establecen el siguiente objetivo:

- Analizar el uso y alcances de los diversos programas de IA.

De este objetivo se desprende la pregunta de investigación de qué manera es utilizado el Chatbot durante el proceso de enseñanza aprendizaje y cuáles son las estrategias utilizadas en la aplicación de ejercicios de clase.

2. Desarrollo

En esta sección se realizará un análisis del uso de los chatbots en una tarea particular realizada durante una sesión de clase.

Los chatbots o asistentes virtuales es un software de inteligencia artificial, el cual puede realizar diversas actividades sin la intervención humana. El chatbot es una herramienta que se puede utilizar de múltiples formas en el ámbito educativo, por ejemplo, como fuentes de información y reflexión, para responder preguntas, recibir explicaciones adicionales, realizar el seguimiento del aprendizaje del alumnado, o identificar patrones de rendimiento académico, entre otras posibilidades. Aunque pareciera un problema que involucra únicamente a las universidades la realidad es que el problema ha llamado la atención de grandes compañías como son Bill y Melissa Gates Foundation, Facebook y la escuela pública Summit con el objetivo que los chatbots sirvan como asesores virtuales, y que el proceso se adapte a las habilidades de los estudiantes, es decir, que se acoplen a las habilidades y capacidades de cada estudiante. Considero que se debe realizar una reflexión y preguntar si el estudiante en México esta realmente cumpliendo con los objetivos mencionados.

2.1 Aplicación de actividades en chatbots

Como se mencionó en la introducción los ITS se han desarrollado a tal grado que hay una gran variedad. La actividad que se plantea a continuación se aplicó durante el semestre 2024-2 a un grupo de estadística de la carrera de Actuaría de la FES Acatlán. El problema que se planteo fue realizar un resumen utilizando diversos chatbots con una aplicación utilizando el software R sobre el tema prueba de hipótesis. Posteriormente, con la información encontrada se dividieron en equipos con el fin de comparar los resultados encontrados y realizar un resumen por equipo para proceder a su exposición.

Se observo que el chatbot más utilizado fue el Chat GPT, uno de los más populares en su rama con 180.5 millones de usuarios activos al mes de noviembre de 2023, desarrollado en 2022 por OpenAI.

ISSN 2448 – 7945

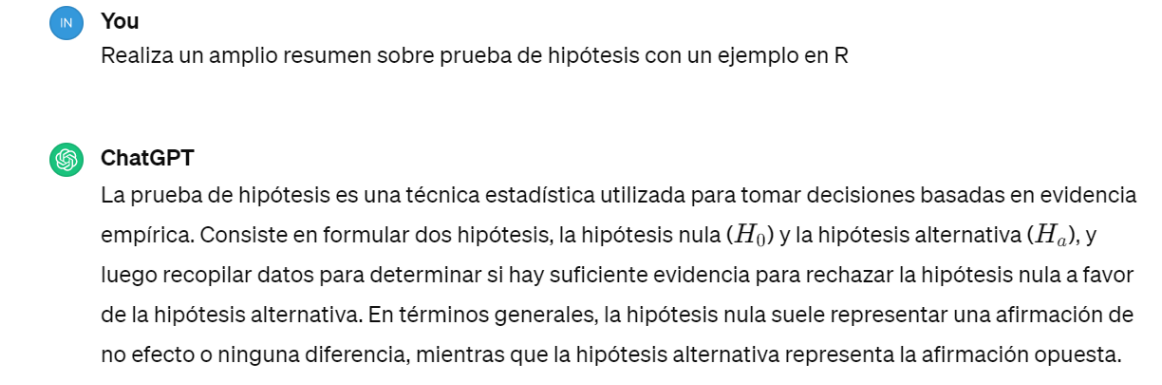


Figura 1. Fragmento del resultado con el ChatGPT de la actividad propuesta.

El segundo chatbot utilizado fue Nuevo Bing, de Microsoft socio de OpenAI, alcanzó los 100 millones de usuarios diarios activos durante marzo de 2023.

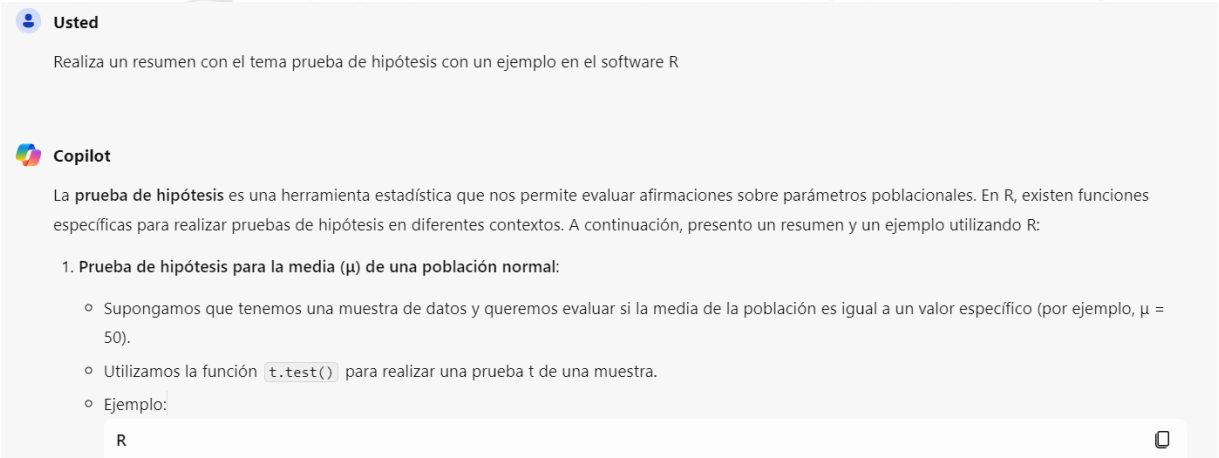


Figura 2. Fragmento del resultado con el Chat Copilot con Bing de la actividad propuesta.

3. Resultados y análisis

Las ventajas de la Inteligencia Artificial (IA), que forma parte de la transformación digital de la educación, no podrán concretizarse a menos que los docentes estén capacitados para navegar por el paisaje tecnológico en constante evolución (UNESCO, 2022)

Dentro de los usos que se le puede dar a la Inteligencia Artificial (IA) en la educación es ayuda a explicar, retroalimentar, aplicar, evaluar y personalizar el aprendizaje de los estudiantes con ello se permite que sientan entusiasmados, con lo que logran un aprendizaje significativo. También se uso como una herramienta estrategica que les permitió resolver problemas al facilitarles distintos recursos y actividades en el porceso de eneseñanza – aprendizaje.

ISSN 2448 – 7945

4. Conclusiones

Los educadores nos enfrentamos con diversos desafíos desde el uso dentro del salón de clases hasta por el estudiante, considerando que el profesor no ha aceptado el valor educativo de la IA, o no ha sabido cómo convertirla en su aliada por lo que ha entrado el conflicto con el profesor provocando que no se use de mayor manera. Sin embargo, las ciencias aplicadas, la industria, las finanzas y la medicina han experimentado transformaciones digitales (Luckin y Cukurova, 2019). La transformación digital de la educación ha influido significativamente en la adopción de tecnología por parte de las educaciones secundarias y superiores en todo el mundo. También ha aumentado el interés en la inteligencia artificial en la educación (AIEd) en términos de investigación y su aplicación práctica en la educación moderna. Este tipo de aplicaciones tiene como ventajas que: se adaptan a las encesidades y ritmos de cada estudiante y potencian la adquisición de destrezas; mejora la comprensión de problemas matemáticos; logra adaptarse a las necesidades del alumnado en cualquier momento y lugar; y el acceso a este tipo de herramienta es fácil y rápido al contenido necesario de la materia. Una causa de temor de los profesores es el uso desmedido de dicha herramienta por parte del estudiante sin los conocimientos previos sobre el tema, además de aumentar la tasa de plagio al presentar como propio el contenido generado por la IA. Sin embargo, se deben comentar que existen diversas apps de fácil acceso y gratuitas de enseñanza online como por ejemplo Carnegie Speech o Duolingo, apoyan en el aprendizaje de un idioma extranjero.

5. Índice de referencias

- Fahimirad, M. and Kotamjani, S.S. (2018). A review on application of artificial intelligence in teaching and learning in educational contexts. *International Journal of Learning and Development*, 8(4), pp. 106-118. https://doi.org/10.5296/ijld.v8i4.14057
- Kaur, K. (2021). Role of artificial intelligence in education: Peninsula College Central Malaysia. *International Journal of Academic Research in Progressive Education and Development*, 10(2), 1006–1016.
- Luckin, R. and Cukurova, M. (2019). Designing educational technologies in the age of AI: A learning sciences-driven approach. *British Journal of Educational Technology*, 50(6), pp. 2824–2838. https://doi.org/10.1111/bjet.12861.
- Pedro, F., Subosa, M., Rivas, A. and Valverde, P. (2019). Artificial intelligence in education: *Challenges and opportunities for sustainable development*. United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO)
- Quispe, R. (2014). *Tutor inteligente para fortalecer el aprendizaje de la estructura morfosintáctica a nivel primero de primaria*. Tesis de pregrado. Universidad Mayor de San Andrés, La Paz, Bolivia.
- UNESCO (2022). La UNESCO apoya la definición y el desarrollo de competencias en materia de IA para los docentes. https://www.unesco.org/es/articles/la-unesco-

ISSN 2448 – 7945

192 apoya-la-definicion-y-el-desarrollo-de-competencias-en-materia-de-ia-para-los-
193 docentes
194
195

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATRICIALES MEDIANTE UN ENFOQUE DE OPTIMIZACIÓN A TRAVÉS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Orozco Sánchez Ana Pamela [1*], Hernández Hernández Jonathan Israel[2] , Torres Rodríguez Agustín Alfredo[3], Cerón Hernández Arizbeth[4] y Martínez Flores Alejandro[5]
[1,2,3,4,5]*Instituto Tecnológico de Atitalaquia, Av. Tecnológico No. 9. C. P. 42970. Colonia Tezoquipa Atitalaquia, Hidalgo, México.*

EN-POSM047

Resumen

Este trabajo presenta el estudio sobre un método computacional matricial que puede derivarse mediante un paradigma computacional diferente. Se explora este método como un problema de optimización relacionado con ecuaciones matriciales, proporcionando una perspectiva innovadora en el campo del álgebra lineal. Además, se diseñan ejemplos prácticos de cálculo de matrices inversas utilizando este método y se compara con una implementación en el software Python a través de métodos numéricos básicos como el método de Euler y Runge-Kutta. En lugar de calcular directamente la operación matricial, este enfoque permite que el problema modelado como un sistema dinámico no lineal de primer orden, evolucione hasta la convergencia en la solución deseada, lo que asegura una estabilidad asintótica lineal. Esto resulta especialmente beneficioso cuando las operaciones matriciales estándar se vuelven computacionalmente costosas debido al aumento del tamaño de la matriz para problemas más complejos. Se utilizan técnicas numéricas como una herramienta adicional para examinar y contrastar la metodología que se aplicará en los ejemplos que se desarrollarán. Como resultado de este trabajo se exponen los casos de estudio de esta metodología junto con los procedimientos correspondientes para su aplicación, detallando sus atributos, consideraciones y aspectos a tener en cuenta para llevar a cabo su implementación. Finalmente, se discute el posible impacto de esta estrategia educativa como un proceso de enseñanza y aprendizaje.

Palabras clave: *Algebra Lineal, Optimización, Ecuaciones Diferenciales, Métodos Numéricos, Sistemas Dinámicos, Investigación de Operaciones.*

1. Introducción

La investigación de operaciones (IO) es un campo interdisciplinario que utiliza métodos matemáticos, estadísticos y de modelado para analizar y optimizar sistemas complejos. Se centra en la toma de decisiones para mejorar u optimizar el rendimiento de sistemas en áreas como la gestión de la cadena de suministro, la logística, la planificación de la producción, las finanzas, el marketing y muchos otros campos. La IO utiliza modelos matemáticos y algoritmos para ayudar a tomar decisiones eficaces y eficientes en situaciones complejas (Taha, 2012). Las partes fundamentales de un problema típico de IO incluyen:

[1*] Autor para la correspondencia. E-mail:PAMELA_SASY@HOTMAIL.COM

ISSN 2448 – 7945

- **Función objetivo**: es la función que se desea maximizar o minimizar. Representa la medida de rendimiento que se busca optimizar en el problema. Por ejemplo, en un problema de programación lineal, la función objetivo podría ser maximizar las ganancias o minimizar los costos.
- **Variables de decisión:** son las variables que se pueden ajustar o controlar para optimizar la función objetivo. Estas variables representan las decisiones que deben tomarse en el problema. Por ejemplo, en un problema de asignación de recursos, las variables de decisión podrían ser la cantidad de cada recurso asignado a diferentes tareas.

- **Restricciones:** son las limitaciones o restricciones que deben cumplirse en el problema. Estas restricciones pueden ser de diferentes tipos, como restricciones de recursos, restricciones de capacidad, restricciones de tiempo, entre otras. Las restricciones restringen las posibles soluciones del problema.

- **Optimización:** consiste en encontrar la mejor solución posible para el problema, es decir, encontrar los valores de las variables de decisión que optimizan la función objetivo, cumpliendo con todas las restricciones.

- **Error:** en el contexto de IO, el error puede referirse a la discrepancia entre el valor obtenido de la función objetivo en la solución encontrada y el valor óptimo real. Minimizar este error es importante para garantizar que la solución encontrada sea lo más cercana posible a la solución óptima.

Sin embargo, también puede aplicarse de manera exitosa en distintos campos de las ciencias básicas como el álgebra lineal. Un ejemplo destacado es el cálculo de la matriz inversa (Grossman, 2019). Si bien existen métodos directos para calcular esta operación como la eliminación gaussiana, estos métodos pueden volverse menos efectivos a medida que el tamaño de la matriz aumenta, ya que la complejidad computacional aumenta con el cuadrado del tamaño de la matriz y además es propensa a errores acumulativos en las operaciones de eliminación (Tsukada, et al. 2023).

Por otro lado, resolver el problema de la inversa de una matriz mediante un método de optimización puede resultar más eficiente en ciertos casos. Por ejemplo, en lugar de calcular directamente la matriz inversa, podríamos formular el problema como una optimización donde minimizamos la diferencia entre la matriz original y su inversa multiplicada (Corriu, 2022), obteniendo así una solución que se acerque a la inversa de la matriz original. Este enfoque puede ser más eficiente computacionalmente en matrices grandes o en casos donde la matriz no sea fácilmente invertible por métodos directos.

ISSN 2448 – 7945

2. Metodología o desarrollo

Para desarrollar esta propuesta de tarea de aprendizaje, se han diseñado las siguientes etapas o fases con el objetivo de estructurar y facilitar el proceso:

Fase 1. Propuesta del modelo: en esta etapa se sugiere una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que modele la matriz A con los datos a analizar. Esta ecuación puede representar, por ejemplo, la evolución temporal de la matriz A en un sistema dinámico.

Fase 2. Establecer el radio de convergencia: se busca determinar el rango de valores dentro del cual el modelo propuesto evoluciona de manera óptima hacia una solución asintótica en estado estacionario. Este paso es crucial para garantizar la estabilidad y eficiencia del proceso de solución.

Fase 3. Restricción y análisis de la condición: se analiza la condición que debe cumplir o limitar el problema para su solución. Esto puede incluir restricciones matemáticas o de otro tipo que influyan en la solución del problema.

Fase 4. Método iterativo: en esta fase se emplea un método computacional iterativo para calcular la aproximación de las soluciones de la ecuación diferencial propuesta. Este método permite obtener los valores de la matriz inversa A de manera eficiente y precisa, proporcionando una herramienta poderosa para el análisis de sistemas complejos.

2.1 Propuesta del modelo

Los sistemas dinámicos no lineales son aquellos en los que las relaciones entre las variables de estado y sus derivadas no son lineales (Thyagarajan, 2020). En estos sistemas, las interacciones entre las variables pueden ser complejas y no pueden describirse de manera simple mediante ecuaciones lineales (da Costa Campos, 2019). Debido a esta complejidad, para encontrar soluciones a estos problemas y comprender su comportamiento a lo largo del tiempo, es necesario recurrir a técnicas numéricas.

Los sistemas dinámicos no lineales y sus ecuaciones diferenciales asociadas son fundamentales en el estudio de fenómenos complejos en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería (McOwen, 2012). Su importancia radica en su capacidad para modelar y comprender sistemas cuyo comportamiento no puede describirse de manera simple.

Para nuestra tarea de aprendizaje se hace uso del siguiente sistema no lineal propuesto por Fortuna, Frasca y Buscarino, (2022).

ISSN 2448 – 7945

Ecuación 1. $C^{'}(t) = -\mu A^{T}[AC(t) - I]$

Dónde:

- A es la matriz cuadrada a calcular su inversa.
- $C(t)$ es una matriz cuadrada A con la solución.
- μ es el radio de convergencia
- $C^{'}(t)$ es la primera derivara de $C(t)$.
- A^{T} es la transpuesta de la matriz A.
- I es la matriz identidad de dimensión igual a la matriz A.

Las condiciones iniciales del sistema se consideran igual a 0 para su respectiva solución en las fases posteriores.

2.2 Radio de convergencia.

El radio de convergencia dado por la ecuación (1) en el contexto de un sistema de optimización se refiere a la región alrededor de un punto en el espacio de búsqueda dentro de la cual un algoritmo de optimización es efectivo en converger a un óptimo local o global. Es importante en el análisis de la estabilidad y la velocidad de convergencia de los algoritmos iterativos utilizados para resolver problemas de optimización (Jiang, Cui y Chang, 2022).

La noción de radio de convergencia puede ser particularmente relevante en el contexto de métodos iterativos no lineales, donde la convergencia puede depender significativamente de la selección inicial (Shastri, Shaw y Singh, 2023). En un sentido más técnico, el radio de convergencia puede estar asociado con el concepto de región de atracción, que es el conjunto de puntos iniciales para los cuales el método converge a un punto fijo o a una solución óptima.

Por ejemplo, si un método de optimización tiene un radio de convergencia grande, esto sugiere que incluso si comenzamos desde un punto inicial alejado del óptimo, el método tiene una buena probabilidad de encontrar el óptimo. Por el contrario, un radio de convergencia pequeño requeriría que el punto inicial esté muy cerca del óptimo para garantizar la convergencia. En términos matemáticos, el radio de convergencia se relaciona con el concepto de convergencia local y, en algunos casos, puede ser determinado o estimado a través de análisis de estabilidad como el criterio de Kantorovich (Argyros y George, 2021).

2.3 Restricción y análisis de la condición.

Una restricción es una condición que debe satisfacer la solución del problema de optimización. Las restricciones pueden tomar la forma de igualdades o

ISSN 2448 – 7945

desigualdades que limitan los valores que pueden tomar las variables de decisión. En el espacio de soluciones, las restricciones definen una región factible donde todas ellas se satisfacen simultáneamente. Por ejemplo, en un problema de programación lineal, las restricciones suelen ser lineales y definen un poliedro dentro del cual se debe encontrar la solución óptima (Taha, 2012).
La importancia del análisis de la condición o restricción radica en que proporciona una comprensión de la estabilidad numérica de los algoritmos de optimización y de la fiabilidad de las soluciones obtenidas. Los problemas mal condicionados requieren atención especial en la selección del algoritmo de optimización y en el tratamiento numérico para asegurar resultados precisos y estables.

Para la tarea de aprendizaje a estudiar se propone la siguiente restricción a cumplir para asegurar la solución óptima para el cálculo de la matriz inversa (Fortuna et al., 2022).

Ecuación 2. $$[AC(t) - I] = 0$$

Ecuación 3. $$C(t) = A^{-1}$$

2.1 Método iterativo

Un método permite aproximar las soluciones de manera efectiva, ya que los sistemas no lineales rara vez tienen soluciones analíticas simples. Los métodos numéricos, como los métodos de integración numérica o de iteración, son esenciales para analizar y comprender los sistemas dinámicos no lineales en diversas áreas, como la física, la biología, la economía y la ingeniería (Singh, 2023).

Para resolver un sistema dinámico no lineal de la ecuación (1) se pueden utilizar métodos numéricos para integrar la ecuación. Los métodos de Euler y Runge-Kutta (RK) son dos enfoques comunes para esta tarea.

2.1.1 Método de Euler.

El método de Euler es el más sencillo de los métodos de integración numérica para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Aunque es conceptualmente simple y fácil de implementar, el método de Euler es de orden bajo (primer orden) y puede ser inexacto o inestable, especialmente para pasos de tiempo grandes o sistemas dinámicos que son muy sensibles a las condiciones iniciales (Miles, 2023). Para el sistema dado, el método de Euler actualizaría $C(t)$ de la siguiente forma:

Ecuación 4. $$C(t + \Delta t) = C(t) - \mu \Delta t A T [AC(t) - I]$$

Dónde:

ISSN 2448 – 7945

- Δt es el tamaño de paso en el tiempo (t).

- $C(t+\Delta t)$ es la solución en el instante $t+\Delta t$.

2.1.2 Método de Runge-Kutta.

Los métodos de Runge-Kutta son una familia de métodos iterativos de mayor orden que proporcionan mejores aproximaciones con pasos más grandes en comparación con el método de Euler. El más conocido es el método RK4, que es de cuarto orden. Es mucho más preciso que el método de Euler para un mismo tamaño de paso (Singh, 2023). Para el sistema dado, el método RK4 calcularía varias pendientes intermedias y las combinaría para obtener la actualización de $C(t)$.

En la práctica, el uso de un método de Runge-Kutta, como RK4, sería preferible para resolver la ecuación diferencial dada debido a su mayor precisión y estabilidad numérica. Sería particularmente útil si la matriz A es grande o si el sistema es particularmente sensible a las condiciones iniciales.

El método Runge-Kutta de segundo orden (también conocido como RK2 o método de punto medio) para aproximar la solución de la ecuación (1), mejora la precisión sobre el método de Euler al tomar en cuenta la pendiente a mitad de camino a través del intervalo antes de realizar la actualización completa de la solución siguiendo los siguientes pasos.

1. Calcula la pendiente inicial en el punto de partida $C(t)$.

Ecuación 5. $$k1 = -\mu AT[AC(t) - I]$$

2. Calcula la pendiente a mitad de camino usando para dar un paso medio.

Ecuación 6. $$k2 = -\mu AT[A(C(t) + \frac{1}{2}\Delta tk1) - I]$$

3. Actualiza $C(t)$ utilizando la pendiente k2 que refleja la información sobre la dirección del sistema a mitad del intervalo:

Ecuación 7. $$C(t+\Delta t) = C(t) + \Delta tk2$$

Δt es el tamaño del paso temporal. Este método asume que la pendiente a mitad del paso da una mejor aproximación para la pendiente promedio sobre todo el intervalo que solo la pendiente al principio del intervalo.

ISSN 2448 – 7945

3. Resultados y análisis

A continuación se presentan los resultados principales, empleando como ejemplo dos casos de estudios y siguiendo la metodología propuesta para la solución óptima de los problemas a plantear. Primeramente se elige una matriz A de dimensión (3x3) de la siguiente manera:

Ecuación 8.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -24 & -10 \end{bmatrix}$$

De la ecuación (1) se propone un radio de convergencia igual a 5 teniendo en cuenta que un radio pequeño conlleva a un mayor número de iteraciones para llegar a la solución de la inversa para la matriz A. Se realizaron pruebas tanto con el método de Euler como el KR2

Tabla 1 – Matriz de pruebas para el ejemplo 1.

#	Intervalo t	Pasos
1	0 - 10	1001
2	0 - 10	11
3	0 - 10	3

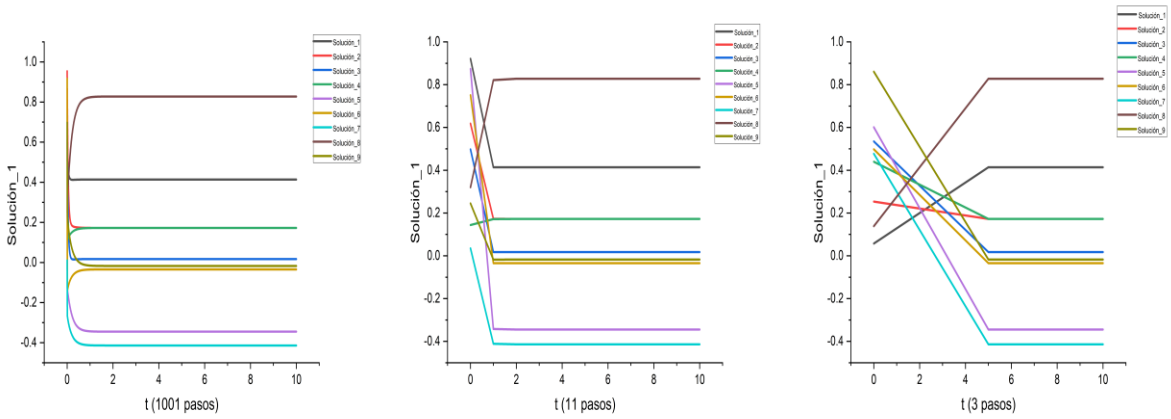


Figura 1. Convergencia de la Ec. (1) con los valores de A [Ec.(7)]

El valor del radio de convergencia puede afectar la convergencia de la solución óptima para el problema planteado. Sin embargo, una forma de analizar la tendencia en el tiempo de la ecuación (1) podría ser modificando los intervalos o pasos del método numérico de integración dentro del intervalo indicado (ver Tabla

ISSN 2448 – 7945

1). La figura 1 muestra que, aunque la convergencia no se ve afectada, la solución tiende de manera más drástica si el paso es grande. Por otro lado, si el paso es pequeño, la solución se comporta de manera más fiel a un sistema de primer orden.

Además, es importante considerar que el tamaño del paso en el método numérico de integración puede influir en la estabilidad y precisión de la solución. Un paso demasiado grande puede causar que se pierdan detalles importantes del comportamiento del sistema, mientras que un paso demasiado pequeño puede aumentar significativamente el costo computacional del cálculo. En consecuencia, encontrar un equilibrio adecuado en la elección del tamaño del paso es crucial para obtener resultados precisos y eficientes.

Para la implementación y solución del caso 1 se empleó Python 3.9x en su versión de Anaconda. Python es una opción popular en la comunidad científica y de ingeniería debido a su naturaleza de código abierto, su amplia gama de bibliotecas y su facilidad de uso. En particular, la librería NumPy es fundamental para este tipo de problemas, ya que proporciona estructuras de datos eficientes para la manipulación de matrices y vectores, así como funciones para realizar operaciones de álgebra lineal y métodos numéricos de manera sencilla y eficiente (Tsukada et al., 2023). Realizando una comparativa con un método dentro de Python para la obtención de la matriz A inversa y calculando la norma del error entre la diferencia de ambas, el resultado se muestra a continuación:

```
Inversa Exacta:
 [[ 0.4137931   0.17241379  0.01724138]
 [ 0.17241379 -0.34482759 -0.03448276]
 [-0.4137931   0.82758621 -0.01724138]]


Inversa Aproximada:
 [[ 0.4137931   0.17241379  0.01724138]
 [ 0.17241379 -0.34482759 -0.03448276]
 [-0.4137931   0.82758621 -0.01724138]]


Diferencia (norma):
 9.97953971764811e-09  %
```

Figura 2. Comparativa entre el método propuesto vs método numérico en Python.

El segundo caso de estudio se consideró con una matriz A de mayor tamaño con valores no estrictamente de tipo entero. Las dimensiones de la matriz A son de (7x7).

ISSN 2448 – 7945

Ecuación 9. $$A = \begin{bmatrix} 0.5377 & 0.3426 & 0.7147 & -1.2075 & 0.2939 & 1.4384 & 0.3192 \\ 1.8339 & 3.5784 & -0.2050 & 0.7172 & -0.7873 & 0.3252 & 0.3129 \\ -2.2588 & 2.7694 & -0.1241 & 1.6302 & 0.8884 & -0.7549 & -0.8649 \\ 0.8622 & -1.3499 & 1.4897 & 0.4889 & -1.1471 & 1.3703 & -0.0301 \\ 0.3188 & 3.0349 & 1.4090 & 1.0347 & -1.0689 & -1.7115 & -0.1649 \\ -1.3077 & 0.7254 & 1.4172 & 0.7269 & -0.8095 & -0.1022 & 0.6277 \\ -0.4336 & -0.0631 & 0.6715 & -0.3034 & -2.9443 & -0.2414 & 1.0933 \end{bmatrix}$$

Comparando la solución de Ec(1) y Python para el caso 2 la norma del error es :

```
Inversa Aproximada:
 [[-0.12358571  0.14534649 -0.27004289  0.05341269  0.11349644 -0.01958178
  -0.18931281]
 [ 0.19104028  0.10014115  0.12996069 -0.08116016  0.05246549 -0.06693117
   0.06248067]
 [ 0.21611527 -0.19197815 -0.11245205  0.11650281  0.29962531  0.22218037
  -0.17627502]
 [-0.54613649  0.26934221 -0.08214863  0.18394305 -0.21328079  0.45399106
  -0.27037803]
 [-0.01662519  0.03106559 -0.23120364 -0.20036996 -0.02923745  0.44727598
  -0.45366253]
 [ 0.20487672  0.15402206  0.24228055  0.24544223 -0.30131944 -0.05701148
   0.08181163]
 [-0.32181807  0.3737494  -0.62247219 -0.48942133 -0.34044413  1.16983892
  -0.32724489]]


Diferencia (norma):
 8.162134886404736e-05  %
```

Figura 3. Comparativa entre el método propuesto vs método numérico en Python.

Del caso 1 se demostró que, independientemente del valor del radio de convergencia, proponer un tamaño de paso grande acelera la tendencia de convergencia del sistema. Sin embargo, este enfoque puede provocar posibles errores si el paso es demasiado grande, ya que se podrían perder detalles importantes del comportamiento del sistema. Para ilustrar este punto, se simuló la matriz A de la Ec. (8) tanto en el método de Euler como en el método RK2 con los mismos intervalos y pasos de la tabla 1. La siguiente figura muestra la simulación con 1001 pasos para visualizar la tendencia del sistema como un sistema de primer orden. Esta representación gráfica permite observar cómo varía la solución en función de t.

ISSN 2448 – 7945

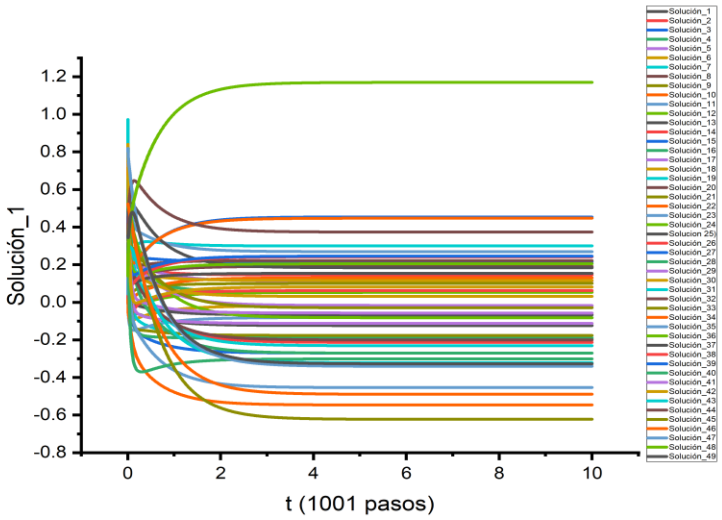


Figura 4. Convergencia de la Ec. (1) con los valores de A [Ec.(8)]

4. Conclusiones

En primera instancia, se reconoce la viabilidad de integrar conocimientos interdisciplinarios para desarrollar una estrategia de resolución más eficiente en problemas relacionados al cálculo de la inversa de matrices, superando la velocidad de los enfoques tradicionales. Esto se logra mediante la aplicación sinérgica de conceptos de diversas disciplinas, como métodos numéricos, investigación de operaciones y optimización aplicada a ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos.

Este trabajo describe un enfoque computacional matricial que propone un método alternativo para la inversión de matrices, empleando optimización en el marco de sistemas dinámicos no lineales, y presenta una mejora en términos de eficiencia para matrices de gran tamaño en comparación con técnicas convencionales, como la eliminación gaussiana agregando conceptos relevantes a considerar para su aplicación.

La metodología propuesta se estructura en cuatro fases estratégicas: la formulación de un modelo de sistema dinámico, la determinación de un radio de convergencia adecuado, el escrutinio de las restricciones y condiciones necesarias, y la aplicación de un procedimiento iterativo para la solución.

Desde nuestra perspectiva como autores, este trabajo resalta la relevancia práctica del método en áreas como el álgebra lineal y la investigación de operaciones, y propone su valor como recurso pedagógico en la enseñanza y el aprendizaje. Enfatizamos a que los estudiantes que exploren métodos alternativos a los métodos clásicos, ampliando así su repertorio de habilidades en sus estudios de

ISSN 2448 – 7945

ingeniería y comprendiendo cómo aplicar distintos conceptos a problemas complejos y multifacéticos.

Indudablemente, esta integración interdisciplinar no solo fomenta un pensamiento analítico más profundo, sino que también prepara a los estudiantes para enfrentar desafíos reales en sus futuras carreras profesionales, donde los problemas rara vez se limitan a un solo campo de conocimiento. Al promover la comprensión de cómo diferentes áreas de estudio convergen en la solución de problemas prácticos, los estudiantes pueden desarrollar habilidades transferibles y una mentalidad de resolución de problemas más versátil y creativa.

Además, al confrontarlos con problemas que requieren el uso de métodos numéricos avanzados y conceptos de optimización, los estudiantes no solo aprenden a aplicar estas técnicas, sino también a apreciar su poder y limitaciones. Tal enfoque didáctico puede resultar en una apreciación más rica de la matemática como una herramienta práctica y potente, en lugar de percibirla solo como una serie de procedimientos abstractos.

Es esencial que los profesores diseñen actividades educativas que fomenten la identificación y aplicación de distintos conceptos a problemas ingenieriles estándar. Además, consideramos la adaptabilidad de esta actividad educativa para abordar otros problemas de naturaleza similar.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo al Tecnológico Nacional de México (TecNM) y al Departamento de Desarrollo Académico del Instituto Tecnológico de Atitalaquia (ITAT) por el apoyo para la realización de este proyecto.

5. Índice de referencias

- Argyros, I. K., y George, S. (2021). Extended domain for fifth convergence order schemes. Cubo (Temuco), 23(1), 97-108.
- Cassel K. (2021). Matrix, Numerical, and Optimization Methods in Science and Engineering. Cambridge University Press.
- Corriu J.P. (2022). Numerical Methods and Optimization: Theory and Practice for Engineers. Springer
- da Costa Campos, L. M. B. (2019). Non-linear differential equations and dynamical systems. CRC Press
- Fortuna, L., Frasca, M., y Buscarino, A. (2021). Optimal and Robust Control: Advanced Topics with MATLAB®. CRC press.
- Grossman, S., y Stanley, I. (2019). Algebra lineal. Mc Graw Hill.

ISSN 2448 – 7945

406 • Jiang, J., Cui, B., y Zhang, C. (2022). Distributed Machine Learning and
407 Gradient Optimization (pp. 1-169). Springer.
408 • McOwen R. (2012). Worldwide Differential Equations with linear algebra.
409 Worldwide Center of Mathematics
410 • Miles, W. (2023). Numerical Methods with Python: for the Sciences. Walter
411 de Gruyter GmbH y Co KG.
412 • Shastri A, Shaw K, Singh M. (2023), Machine Learning and Optimization for
413 Engineering Design. Springer Singapore.
414 • Singh, M. S. (2023). Programming with Python: And Its Applications to
415 Physical Systems. Taylor y Francis.
416 • Taha, H. A. (2012). Investigación de operaciones. Pearson Education.
417 • Thyagarajan, T., y Kalpana, D. (2020). Linear and Non-Linear System
418 Theory. CRC Press.
419 • Tsukada, M., Kobayashi, Y., Kaneko, H., Takahasi, S. E., Shirayanagi, K., y
420 Noguchi, M. (2023). Linear Algebra with Python: Theory and Applications.
421 Springer Nature.

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

DIFICULTADES QUE PRESENTAN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA AL RESOLVER PROBLEMAS DE CÁLCULO MENTAL

Yesica Liliana Islas Arias[1]*, Marcos Campos Nava [2] y Agustín Alfredo Torres Rodríguez [3]
[123]*Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.*

IP-POSM048

Resumen

El cálculo mental, es una de las competencias matemáticas utilizadas con mayor frecuencia en la vida cotidiana, sin importar la actividad laboral de las personas, por lo que cobra especial relevancia, ya que se usa dentro y fuera del contexto escolar. Esta investigación gira en torno a las dificultades que presentan estudiantes de educación secundaria al resolver problemas en los que deben emplear el cálculo mental, este fenómeno se analiza desde la perspectiva del desarrollo del sentido numérico. Desde la perspectiva de algunos investigadores, el desarrollo del sentido numérico, puede dar significado a los conocimientos que los estudiantes elaboran en sus clases de aritmética. Debido a que la investigación está en proceso, los resultados empíricos están pendientes, por lo que en este reporte se presentan el estado del arte en torno al objeto de estudio y el diseño metodológico de la investigación.

Palabras clave: *competencia matemática, cálculo mental, sentido numérico, aritmética.*

1. Introducción

Desarrollar y consolidar habilidades matemáticas, es de suma importancia para todo individuo. Las matemáticas forman parte de muchas situaciones cotidianas importantes para la vida, en este sentido, las personas se enfrentan a la necesidad de desarrollar competencias matemáticas básicas. Leer cantidades, enumerar y agrupar objetos, operar numéricamente son algunos ejemplos de situaciones que viven a diario las personas (Baroody, 2000; citado en Álvarez 2006). Así mismo, fomentan el desarrollo de estructuras cognitivas, es decir, proveen de herramientas que desarrollan una estructura mental lógica permitiendo afrontar diversas circunstancias cotidianas (Gómez y Mireles, 2019). En esta línea de ideas organismos internacionales como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), consideran importante que los estudiantes desarrollen competencias matemáticas (OCDE, 2016).

El Cálculo Mental (en lo sucesivo CM) cobra relevancia en la vida cotidiana por ser una competencia matemática usada dentro y fuera del contexto escolar. Por ejemplo, cuando se realizan compras, al calcular cuotas y distancias, al planificar el gasto familiar, entre otras. En numerosas ocasiones se realizan estos cálculos de manera mental y una forma de hacerlo es descomponer los números originales

[1] **Autor para la correspondencia. E-mail: is477758@uaeh.edu.mx Tel. 775-106-06-12*

ISSN 2448 – 7945

involucrados en el cálculo, para hacer otros más fáciles. Además de resultar funcional e imprescindible el CM impulsa un trabajo intelectual como el analizar y comparar diferentes caminos de solución, encontrar el origen de algunos errores, validar ciertas estrategias, así como anticipar resultados (De Marinis, 2008).

La Secretaria de Educación Pública (2017) menciona que desarrollar habilidades de cálculo mental y escrito, así como utilizarlas de manera flexible en las operaciones con diferentes tipos de números, es uno de los propósitos del estudio de las matemáticas, en educación básica, en México. A pesar de ello, y del frecuente uso del CM, se ha observado resultados poco favorables.

El objetivo general de esta investigación es analizar las dificultades que presentan los estudiantes de tercero de secundaria al resolver problemas de CM. Las preguntas centrales que guían esta investigación son:

- ¿Cuáles son las dificultades que presentan estudiantes de secundaria al resolver problemas de cálculo mental?
- ¿Cómo se clasifican las dificultades que presentan los estudiantes de secundaria al resolver problemas de cálculo mental?

Por tratarse de una investigación didáctica y de tipo cualitativa, el marco que la sustenta es de tipo conceptual. Estos son más convenientes que los teóricos o prácticos para las investigaciones educativas, en virtud que permiten enfoques inclusivos, comprensivos, pertinentes y convenientes a los problemas investigativos resultantes. (Eisenhart, 1991).

El marco de la investigación fue estructurado en tres dimensiones: ontológica, epistemológica y didáctica. Steen (1988) refiere que las matemáticas son la ciencia de los patrones, en donde el matemático busca patrones en los números, en los datos, en el espacio, en la ciencia, y las aplicaciones de las matemáticas utilizan estos patrones, para explicar y predecir fenómenos que a ellas se ajustan. En este sentido, se consideró oportuno adoptar esta perspectiva para la presente investigación, ya que, al enfrentar a un resolutor con problemas de cálculo mental, se hace presente el uso de patrones para generar resultados. Patrones que a través de la práctica los estudiantes irán descubriendo y utilizando. Esta perspectiva guía las tareas planteadas y el quehacer docente. En este aspecto, Pourdavood et al. (2020) señalan que existe una correlación entre la epistemología de los profesores sobre cómo aprenden la disciplina los estudiantes y la manera en que las enseñan.

En lo que respecta a la dimensión epistemológica, la postura adoptada, es de corte constructivista, la cual consiste en que el estudiante afronte ciertos procesos y prácticas propias de la disciplina para que construya aprendizaje por sí mismo (acorde a su nivel), promoviendo el desarrollo de heurísticas y estrategias metacognitivas. (Arce et al. 2019). Lo que permite eliminar el aprendizaje memorístico y tradicional (Cuevas et al. 2015). En esta dimensión, se consideró el aprendizaje significativo por descubrimiento de Ausubel. La principal característica de este tipo de aprendizaje radica en

ISSN 2448 – 7945

que el contenido que se va a aprender no está dado, por lo contrario, debe ser descubierto por el estudiante para después ser interiorizado. El aprendizaje significativo se logra si la nueva tarea de aprendizaje se relaciona de forma no arbitraria ni textual con la experiencia y estructura de conocimientos ya existente en el estudiante.

Finalmente, en la dimensión didáctica, se adopta la resolución de problemas como una aproximación pertinente para aprender y enseñar esta ciencia. Al respecto, la National Council of Teachers of Mathematics refiere a la resolución de problemas como tareas matemáticas que causan desafíos intelectuales que coadyuvan a la comprensión y el desarrollo matemático de los estudiantes. De acuerdo con Shoenfeld (1985) es indispensable que, en el proceso de aprendizaje de la disciplina, el estudiante se desenvuelva en un medio similar al de los matemáticos, ya que el enfoque basado en resolución de problemas se considera propicio para que el estudiante desarrolle estrategias y habilidades propias del quehacer matemático. En otras palabras, aprender matemáticas significa que el estudiante identifique, seleccione y use estrategias comúnmente usadas por los matemáticos al resolver problemas (experimentar, identificar patrones, formular conjeturas, justificar resultados y plantear preguntas, validar estrategias, comunicar ideas).

En la **figura 1** se muestra la relación de estas tres dimensiones.

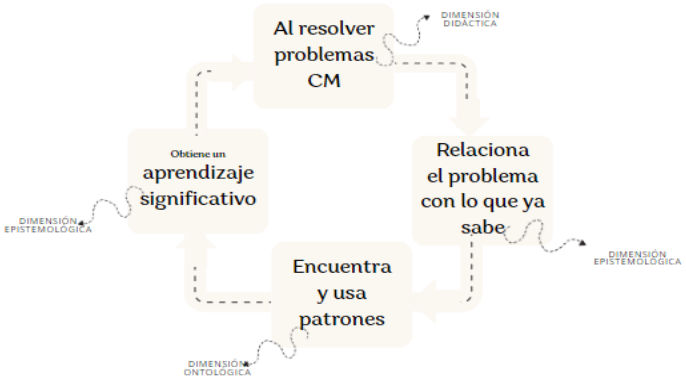


Figura 1. Representación gráfica del marco conceptual.

2. Metodología o desarrollo

La elección de un diseño de investigación involucra la toma de decisiones sobre diversos aspectos, tales como los procedimientos o estrategias de investigación, los métodos de recopilación, análisis e interpretación de datos, del mismo modo, su esbozo se fundamenta en la propia naturaleza del tema de investigación (Creswell, 2009). De acuerdo con Strauss y Corbin (2002), la metodología es una forma de entender y estudiar la realidad social.

Strauss y Corbin (2002) señalan tres componentes primordiales en la investigación cualitativa: (i) los datos, que se pueden obtener a través de distintas fuentes, como entrevistas, observaciones, registros, documentos y películas; (ii) los procedimientos, usados para descifrar y ordenar los datos, algunos de ellos son conceptualizar, reducir y relacionar los datos, y categorizar, a todo lo anterior se le suele llamar codificar y (iii) los informes escritos y verbales que pueden ser artículos, libros o charlas.

ISSN 2448 – 7945

En relación a lo anterior, esta investigación se aborda desde un enfoque cualitativo, porque el interés de la misma es analizar en voz de un grupo de estudiantes las dificultades que presentan al enfrentarse a problemas de cálculo mental. Por otro lado, es de tipo exploratoria, debido a que intrínsecamente el objetivo es descubrir y explorar, además que, la línea de investigación ha sido poco estudiada. En este aspecto, el método seleccionado para llevar a cabo la investigación fue el estudio de caso, dado que permitirá analizar con más detalle a un grupo de estudiantes sobre las dificultades que presentan en la solución de problemas de CM.

Los datos empíricos de esta investigación se recolectan a través de la aplicación de una prueba de CM que consta de 10 ítems, así mismo mediante entrevistas semi-estructuradas a los participantes las cuales serán videograbadas con la finalidad de obtener información más precisa, además de observaciones que se efectuarán en el transcurso de la aplicación de la prueba y de las entrevistas.

Se trabajará con nueve estudiantes de tercer grado de secundaria, cuyas edades oscilan entre los 14-15 años de edad, de una secundaria pública en el estado de Hidalgo, México. Los instrumentos serán aplicados en el segundo semestre del ciclo escolar 2023-2024. Dicha muestra fue seleccionada de forma no probabilística y corresponde a una muestra intencionada.

En relación al sentido numérico (en lo sucesivo SN) éste incluye diferentes elementos de los números, las operaciones y sus relaciones, lo cual ha propiciado diferentes investigaciones y debates entre profesores matemáticos, investigadores y creadores de currículos de la disciplina (Sengül, 2013). En este aspecto, el marco del SN (Tabla 1), utilizado en esta investigación es el propuesto por Almeida et al. (2014) que señalan que los siete componentes corresponden a los esenciales de las propuestas de la NCTM (1989) y la de McIntosh et al. (1992). Este marco será el punto de partida para el análisis sobre del tópico estudiado.

Tabla 1. Componentes del sentido numérico.

Componente	Descripción
1.- Comprender el significado de los números	Implica la comprensión de la organización del sistema de numeración decimal y las numerosas relaciones existentes entre los números. Incluye el manejo del valor posicional en los números naturales y decimales y la comprensión de las diferentes expresiones de los números.
2. Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números	Se refiere a reconocer y estimar el tamaño absoluto o relativo de un número, de una cantidad o de una medida en comparación con otro número, cantidad o medida. Incluye la comparación y el orden de los números y la identificación de números entre otros dos dados.

ISSN 2448 – 7945

3. Usar puntos de referencia	Estos puntos son valores que le resultan cómodos de manejar a un individuo en la realización de cálculos o comparaciones. Este componente incluye la habilidad para usar referentes mentales (matemáticos o reales) para usar números en la resolución de problemas.
4. Utilizar la composición y descomposición de los números	Se refiere a la habilidad de composición y descomposición de los números, de manera equivalente, con el propósito de realizar operaciones con mayor fluidez.
5. Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones	Este componente se manifiesta al utilizar diversas representaciones (gráficas o pictóricas) en la resolución de problemas numéricos de forma práctica y flexible.
6. Comprender el efecto relativo de las operaciones	Es la habilidad para identificar cómo las operaciones afectan al resultado final de problemas numéricos, normalmente se le nombra como “comprender el efecto relativo de las operaciones” y “saber relacionar las operaciones”. Incluye el empleo de propiedades aritméticas (conmutatividad-asociatividad-distributividad) para simplificar expresiones y desarrollar estrategias de solución.
7. Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta	Implica la selección de estrategias apropiadas en función de la tarea (método gráfico, cálculo escrito, estimación, cálculo mental, etc.), así mismo incluye la habilidad para valorar lo razonable de un resultado.

Fuente. Elaboración propia con información de Almeida et at. (2014)

3. Resultados y análisis

Para dar inicio con la presente investigación se llevó a cabo la revisión de la literatura de diferentes países como, México, Japón, Estados Unidos, entre otros, las clasificaciones consideradas para la misma, así como los principales hallazgos se presentan resumidos en la **tabla 2**.

Tabla 2. Concentrado de la revisión de la literatura

Clasificación	Autor/año/País	Principales hallazgos

ISSN 2448 – 7945

Identificación de estrategias empleadas en situaciones de CM.	Mochón y Vázquez 1995 México	los estudiantes en general no tienen a su disposición estrategias variadas del cálculo. sugieren contextualizar los cálculo con situaciones monetarias
	Reys et al. 1995 Japón	Existe una amplia gama del rendimiento del CM. La representación visual produjo resultados más altos. El rendimiento aumentó en medida en que aumentaban los años de escolarización.
	Cortes-Flores et al. 2004 México	En general la prueba resultó difícil para los estudiantes y estos poseían bajas habilidades para resolver problemas mentales.
	Barrera-Mora et al. 2018 México	Los alumnos inventaron las estrategias y el contexto del juego y competencia promovió apoyo por parte de los alumnos más expertos.
	Rodríguez-Quintero et al. 2019 México	La alumna no demostró tener un fuerte apego hacia los métodos enseñados en la escuela.
Enseñanza del CM en el aula.	Ruiz y Balbi 2018 Uruguay	Los resultados no aportaron evidencia de que la intervención del CM haya tenido impacto sobre las habilidades del CM.
	Gómez-Rosales y Mireles-Medina 2019 México	Se obtuvo evidencia de que el entrenamiento en CM les llevó a mejorar.
	Stauffer et al. 2020 México	Les resultó más fácil establecer relaciones en problemas donde solo era diferente el divisor o el dividendo, hubo confusión respecto a las relaciones válidas para las multiplicaciones y las divisiones.
Dificultades sobre CM	Watson et al. 2018 Portugal	El tipo de error más común fue el del cálculo erróneo, el segundo más común fue la falta de reagrupación en suma y resta y otro fue los errores de omisión y procedimiento.

ISSN 2448 – 7945

Relación de CM con otras habilidades.	Pourdavood et al 2020 EUA	Los estudiantes se sintieron cómodos discutiendo sus ideas matemáticas verbalizando sus estrategias y proporcionándose apoyo cuando tenían dificultad. Las estrategias de CM ayudan a desarrollar un pensamiento de orden superior, a razonar, a criticar y a dar sentido a los números y a las operaciones numéricas.

Fuente. Elaboración propia.

Como se trata de una investigación que aún está en proceso, en esta etapa aún no se cuentan con resultados empíricos, sin embargo, se presume que los resultados que se obtendrán de esta investigación pueden servir como guía para el diseño de estrategias de intervención en el aula, que favorezcan el desarrollo de la habilidad del CM y a su vez desarrollar el SN.

4. Conclusiones

Debido a que la investigación está en proceso, aún no se cuentan con resultados empíricos, por lo que en esta propuesta se presentan los principales hallazgos documentales de la revisión de la literatura y el diseño metodológico.

El SN constituye una habilidad para dar significado a los diferentes tipos de números y desarrollar estrategias para resolver problemas numéricos. Así mismo, es una habilidad adquirida desde edad temprana, la cual se desarrolla a través de actividades y experiencias matemáticas significativas, de forma gradual y continua, influyendo en los resultados de aprendizaje y el éxito de las matemáticas escolares (Maghfirah y Mahmudi, 2018)

Desarrollar la habilidad del CM y a su vez la del SN coadyuvará para evitar lo que afirman algunos autores (Riccomini 2005) que, si los estudiantes no obtienen aptitud en las habilidades de cálculo, tendrán dificultades en otras áreas de las matemáticas.

Así mismo, destaca un resultado en la revisión de la literatura, que invita a la reflexión sobre la enseñanza aritmética que reciben los estudiantes durante su escolaridad básica, la cual es dominada por procedimientos algorítmicos más que por usos flexibles de conceptos, números y operaciones, así como la relación entre estos, enfatizando que el aprendizaje numérico basado en reglas o algoritmos no favorecen que el aprendizaje adquiera sentido. (Almeida et.al.,2014; Maghfirah y Mahmudi, 2018).

Agradecimientos

La primera autora agradece el apoyo al Consejo Nacional de Humanidades Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por la beca otorgada para llevar a cabo estudios de posgrado en la Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

ISSN 2448 – 7945

5. Índice de referencias

- Almeida, R., Bruno, A., Perdomo-Díaz, J. (2014). Estrategias de sentido numérico en estudiantes del Grado en Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 32 (2), 9-34.
- Álvarez, Y. (2006). ¡Auxilio. No Puedo Con la Matemática! *Revista Iberoamericana de Educación Matemática Equisangulo*, 2(1), 4-16.
- Arce-Sanchez et al. (2019) Ideas generales sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (pp. 27-47). España: editorial Síntesis, S, A.
- Cuevas, R., Feliciano, A., Miranda, A., & Catalán, A. (2015). Corrientes teóricas sobre aprendizaje combinado en la educación. *Revista Iberoamericana de Ciencias*, 2(1), 2334-2501
- Creswell, J. W. (2009). Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches. 3rd ed.
- De Marinis, S (2008). Cálculo mental con números naturales para docente. Material Auxiliar para la Enseñanza. 1a ed. Buenos Aires: Ministerio de Educación.
- Eisenhart, M. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: ideas from a cultural anthropologist; implications for mathematics education researchers. In R. G. Underhill (Ed.), Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 201-220.
- Gómez-Rosales, M., Mireles-Medina, A (2019). Cálculo mental como estrategia para el aprendizaje de los contenidos matemáticos en la educación primaria. *Revista de Ciencias de la Educación*, 3(10), 8-19.
- Maghfirah, M. y Mahmudi, A. (2018). Number sense: the result of mathematical experience. *J. Phys.: Conf. Ser.* 1097 012141. **DOI** 10.1088/1742-6596/1097/1/012141.
- NCTM. Definition of problem solving. Retrieved January 30, 2024, from http://www.nctm.org.
- OCDE (2016), Panorama de la educación 2016: Indicadores de la OCDE, Publicaciones de la OCDE. doi: 10.1787/eag-2016-es
- Pourdavood, R., McCarthy, K., McCafferty, T (2020). The Impact of Mental Computation on Children's Mathematical Communication, Problem Solving, Reasoning, and Algebraic Thinking. *Athens Journal of Education*, 7(3), 241-254.
- Riccomini, P.J. (2005). Identification and remediation of systematic error patterns in subtraction*, Learning Disability Quarterly*, 28(3), 233-242.
- Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Academic Press. INC
- SEP (2017). Plan y programas de estudio de educación básica. Educación básica. México: Secretaría de Educación Pública.
- Steen, L. A. (1988). The Science of Patterns. *Science*, 240(4852), 611-616.
- Strauss, A. y Corbin, J. (2002). Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada. Editorial Universidad de Antioquia. Colombia.

ISSN 2448 – 7945

TRANSFERENCIA DE CONOCIMIENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL EN UN PROBLEMA DE REDES CRISTALINAS

Rodríguez Chávez Rosalba[1, *], Ávila Becerril Sofía Magdalena [2], Flores Pérez Anahí[3] y Velázquez Torres Juan[4]
[1,2,3 y 4]*División de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNAM, Conjunto Sur Edificio I – PB, Circuito exterior s/n, Ciudad Universitaria. c. p. 04510, Coyoacán, México, D.F.*

EN-POSM049

Resumen

La Ingeniería en México, en la Industria 5.0, se requieren de estudiantes capacitados para la resolución de problemas algebraicos y de Ingeniería. En la Coordinación de Matemáticas de la Facultad de Ingeniería se están realizando esfuerzos para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje en las distintas asignaturas como es Álgebra Lineal debido a que es una asignatura axiomática y abstracta en la que los alumnos no logran vincular los conceptos con la práctica en problemas de Ingeniería.
Se están realizando algunos recursos didácticos como es el diseño y producción de secuencias didácticas con base en los objetivos de aprendizaje del programa educativo de la asignatura, dichos recursos son mediados a través de estrategias pedagógicas y comunicacionales, trabajo colaborativo y tecnología digital.
Las secuencias didácticas favorecen el aprendizaje de conceptos abstractos, así como la transferencia de conocimientos matemáticos a situaciones reales del campo de la ingeniería, entre otros.
En el presente trabajo se da cuenta de las evidencias entregadas por los estudiantes en la transferencia de los conceptos de Álgebra Lineal a un problema contextualizado de química con el uso de redes cristalinas. Así como los resultados obtenidos con base en una intervención educativa dentro del aula con estudiantes de nivel superior de Ingeniería.

Palabras clave: *transferencia de conocimientos, álgebra lineal, redes de Bravais, secuencia didáctica.*

1. Introducción

El desarrollo tecnológico en la Industria 5.0 de nuestro país requiere una sólida formación integral del estudiante de Ingeniería en conocimientos y habilidades científicas, comunicacionales, humanistas y tecnológicas, entre otras que le permitan vincular los conceptos adquiridos durante su formación para la resolución de problemas algebraicos y de ingeniería, también para realizar reingeniería e innovación.
La asignatura de Álgebra Lineal permite que los estudiantes de segundo semestre adquieran pensamiento lógico-matemático y pensamiento crítico. Estos objetivos son promovidos por los docentes desde los distintos ambientes de aprendizaje fomentando, durante la impartición de su clase, razonamientos abstractos y analíticos

[1] *Autor para la correspondencia. E-mail: rorochmx@yahoo.com.mx

ISSN 2448 – 7945

que permiten que el estudiante resuelva problemas algebraicos y de ingeniería. Sin embargo, Álgebra Lineal es una asignatura fundamentalmente axiomática basada en el estudio de espacios vectoriales y transformaciones, entre otros, que el estudiante percibe como abstracta y no comprende su utilidad en la ingeniería práctica.
Así pues, en términos del objetivo de aprendizaje, la integración de algunas prácticas a la asignatura de Álgebra Lineal, incluidas en secuencias didácticas, permite por un lado, la comprensión de los conceptos y por otro lado, favorecen la transferencia de conocimiento a la identificación y la resolución de problemas de la vida real, por lo que se promueve el trabajo colaborativo, el razonamiento crítico y reflexivo de la situación actual y da un marco de referencia hacia los avances científicos y la innovación.

En la UNESCO (2021) se mencionan las propuestas para renovar la educación, una de ellas es que "la pedagogía debería organizarse en torno a los principios de cooperación, colaboración y solidaridad", para promover las capacidades intelectuales, sociales y morales. Además, que la evaluación refleje los objetivos pedagógicos que fomenten un crecimiento y aprendizaje significativo para los estudiantes, procurando un aprendizaje ecológico, intercultural e interdisciplinario que los apoye a tener el conocimiento a su alcance, producir los conocimientos y que desarrollen la capacidad de aplicarlos y criticarlos. Por otro lado, los docentes deben formar redes de colaboración para trabajar de manera conjunta que lleve a la investigación, creación de conocimientos, nuevas prácticas pedagógicas, reflexión, entre otras.
Una corriente pedagógica que promueve que el estudiante vaya construyendo su aprendizaje es el constructivismo.
El concepto de constructivismo según Cervera (2012) menciona que fue acuñado por Vladimir Tatlin, artista ruso, quien mencionó que el arte revolucionario, "vincula a la sociedad y con la sociedad", como parte de la colectividad; también menciona a Jean Piaget y Lev Vygotsky que en 1999 contribuyeron desde la perspectiva de lo cognoscitivo en la pedagogía. En el siglo XX, el constructivismo es reconocido dentro de la psicología como una forma de aprendizaje llamada cognoscitivismo. Para Piaget y Vygotsky, la interacción social y el medio ambiente facilitan el aprendizaje a través de conflictos cognitivos que provocan un cambio conceptual, así como generan habilidades y actitudes distintas. El docente es un acompañante del estudiante que apoya a la construcción de significados.
Paz y Leyva (2022) mencionan desde la perspectiva exógena al constructivismo como la adquisición del conocimiento es a través de las experiencias y representa una reconstrucción del mundo. Desde una vista endógena y dialéctica el aprendizaje necesita de los conocimientos previos y con las interacciones en los distintos ambientes.
Según Cervera (2012) menciona que el aprendizaje se observa como un cambio de lo memorístico a lo comprensivo, en lugar de repetir la información se puede criticar, asimilar y fomentar la creatividad, se da énfasis en la construcción de significados en los procesos de enseñanza-aprendizaje.
Se promueve también el aprendizaje significativo con las prácticas didácticas debido a que hay una praxis entre la asimilación, acomodación de los conceptos

ISSN 2448 – 7945

y la conducción a la transferencia en la resolución de problemas de clase o de Ingeniería. Para la comprensión de los conceptos y desarrollo de habilidades en los estudiantes, así como para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la asignatura de Álgebra Lineal, se busca que los estudiantes sean participantes en el desarrollo de prácticas didácticas cuya aplicación está en la vida cotidiana.

Ramos (2016) menciona que cuando un estudiante se enfrenta a problemas reales que están fuera del salón de clases, propicia que sean significativos y vivenciales, por lo que, si los conceptos abstractos de la asignatura para algunos alumnos son difíciles de asimilar, la cuestión práctica hace que ellos tomen interés y motivación hacia el estudio, ya que podrán observar que sí les servirá de forma transversal en la resolución de problemas de Ingeniería.

Según Ogalde (2008) para el diseño instruccional de recursos didácticos se tienen nueve eventos para el aprendizaje en los estudiantes: 1. Atención, da una inducción del tema. 2. Objetivo donde se menciona de lo que será capaz el estudiante de hacer con la situación de aprendizaje. 3. Relación con los conceptos previos, conceptos que debe conocer para abordar el tema. 4. Presentación del material. 5.- Orientación al aprendizaje, donde se conduzca el aprendizaje a través de estrategias didácticas. 6.- Evocación del desempeño, donde se pueda tener retroalimentación correctiva de su aprendizaje. 7.- Retroalimentación positiva, es cuando ellos reciben resultados de su desempeño. 8.- Evaluación del desempeño, hay una evaluación para detectar si se cumplieron los objetivos. 9. Transferencia y retención. Se involucra al estudiante en ejecución de tareas de forma semejante al ambiente del mundo real. El aprendizaje se da en situaciones distintas. Según Alquézar & Buzeki (2017) la transferencia de conocimientos en la educación se refiere al cómo los estudiantes relacionan lo que aprenden con situaciones del mundo real o realizar nuevas actividades que respondan a si ellos cumplieron los objetivos propuestos, además, revisar si les hace falta estudiar con profundidad.

Como se ha mencionado, los estudiantes en la asignatura de Álgebra Lineal se enfrentan a conceptos abstractos y axiomáticos como son los conceptos de espacios vectoriales y transformaciones lineales, los cuales repercuten en los temas posteriores de la asignatura y de asignaturas consecuentes como son ecuaciones diferenciales y cálculo vectorial.

Por lo anterior, en este trabajo se ha diseñado y producido una secuencia didáctica que considera los conceptos de espacio vectorial y de base del espacio y su relación con la resolución de problemas algebraicos y de ingeniería. Como parte de las actividades de la secuencia didáctica, se eligió el estudio de las redes cristalinas debido a que están integradas en asignaturas de Ingeniería Aplicada como es Mineralogía, Ciencias de materiales y Circuitos eléctricos, entre otras.

Por su parte, la estrategia didáctica elegida para cimentar la secuencia es el Aprendizaje basado en Problemas (ABP) puesto que esta estrategia permite comprender el contexto sociocultural y la aplicación de los conceptos . El ABP facilita la comprensión de conceptos y herramientas matemáticas al mismo tiempo que estimula el proceso de aprendizaje del estudiantado a través de la interacción con situaciones del entorno, al mismo tiempo que permite relacionar distintas

ISSN 2448 – 7945

asignaturas y disciplinas académicas. Guzmán y Espinoza (2022) quienes retoman a Palacios y Barreto (2021), definen al ABP como una estrategia que fomenta el trabajo colaborativo entre pares, estimula las relaciones interpersonales para lograr un objetivo en común y, citando a Margetson (1994), apoya al estudiante a “aprender a aprender”.

Por otro lado, las tendencias de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la educación superior se encuentra en el diseño, producción y uso de las prácticas educativas.

2. Metodología o desarrollo

La metodología utilizada fue con un enfoque mixto, ya que se utilizaron aspectos tanto cuantitativos como cualitativos.

El marco muestral fue la población de estudiantes de segundo semestre de la asignatura de Álgebra Lineal y que cursan las diferentes carreras de la Facultad de Ingeniería.

Las técnicas de investigación fueron encuestas y experimentación a través de cuestionarios y hojas de trabajo para la observación participante.

El propósito de incluir en una secuencia didáctica una actividad para la realización de una práctica que vincule los conceptos de espacios vectoriales y transformaciones lineales con la Química y la Ingeniería de Materiales y que permita a los estudiantes observar en el campo ingenieril las numerosas aplicaciones que se tienen al trabajar con distintos tipos de cristales con estructuras cristalinas y que están integradas como parte de las Redes de Bravais. Por ejemplo, en los semiconductores que se utilizan en la industria de la electrónica.

Como un objetivo paralelo, se busca que los estudiantes tengan competencias en: Lectura, aplicar el método científico experimental, colaborar y cooperar en equipo, también tener un aprendizaje autogestivo y revisar en dónde más se pueden transferir los conceptos y habilidades vistos en clase.

El recurso de aprendizaje que se desarrolló tomó en cuenta desde el diseño instruccional ADDIE por el acrónimo de las siglas Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación y Evaluación, así como los lineamientos de Ogalde (2008) para el diseño instruccional.

Se identificaron los conocimientos previos para el tema de espacios vectoriales, así como los recursos con los que disponen los estudiantes y los docentes, también para comprender los conceptos de dicho tema y así poder abordar los temas de operadores en espacios con producto interno y de asignaturas posteriores como son Cálculo Vectorial, Ecuaciones Diferenciales y de Ingeniería Aplicada.

En el Diseño se realizaron las actividades con base en el objetivo de aprendizaje, se eligió la estrategia de aprendizaje basada en la resolución de problemas (ABP) ya que permite resolver los problemas de forma secuencial y de forma activa, así como estrategias metacognitivas para el análisis de la información.

Dentro de las actividades de la secuencia didáctica se planeó realizar una práctica que pudiera relacionar los conceptos de Álgebra Lineal con otras asignaturas como la Química. Por lo que el tema de red de Bravais tiene conceptos relacionados con el

ISSN 2448 – 7945

tema de espacio vectorial. La red de Bravais tiene tres vectores linealmente independientes que forman cada celda primitiva de la red, además se puede estudiar la simetría de traslación y cómo los vectores se mantienen invariantes, por lo que forman un grupo abeliano. Geométricamente se considera un vector es invariante ante la simetría de traslación, cuando dicho vector se desplaza este mantiene su dirección y magnitud. (Práctica No. 1. Redes de Bravais y estructuras cristalinas). Además, una red cristalina cumple con los axiomas de espacio vectorial.

Se eligió la estructura cristalina de alumbre debido a su sistema cristalino cúbico que se encuentra dentro de las redes de Bravais. En el desarrollo y la implementación se realizaron las actividades que contenía la práctica (Objetivo, introducción, conceptos previos, procedimiento para la realización del cristal en la práctica vivencial de cristalografía, fotografías, infografía o video de dónde más se puede aplicar el concepto de espacio vectorial en la Ingeniería, conclusiones, reflexión o crítica y referencias), finalmente se desarrolló una evaluación para que los estudiantes indicaran sí o no se cumplió el objetivo, además se les realizaron ejercicios algebraicos para identificar si requerían estudiar con profundidad el tema y ver dónde más se puede aplicar en la Ingeniería.

Cabe mencionar que la actividad de la práctica fue extraescolar, por lo que los estudiantes entregaron su reporte y posteriormente se hizo un análisis de los datos recopilados.

3. Resultados y análisis

Los estudiantes entregaron hoja de trabajo. Algunas fotografías que contenía el trabajo de la realización de la práctica de cristalografía fueron las que se muestran en la Figura 1.

ISSN 2448 – 7945



Figura 1. Actividad de sinergia del Álgebra Lineal con la Química Orgánica. Cristal de alumbre. Elaboración propia

Al revisar los trabajos de los estudiantes y retroalimentarlos, se observa que se cumplió el objetivo, al favorecer la comprensión de los conceptos con actividades que pueden ser incorporadas en secuencias didácticas, en esta actividad se vincularon los conceptos del tema de espacios vectoriales con un problema específico de Redes cristalinas (Redes de Bravais). Las situaciones de aprendizaje realizadas a través de la práctica fomentaron en el estudiante la creatividad y su vinculación en situaciones de la vida real y de ingeniería.

Las tendencias de los resultados obtenidos fueron:

- Identificar los conceptos.
  En la importancia de la transversalidad y articulación entre asignaturas. La relación del concepto de grupo abeliano y espacio vectorial con las operaciones de simetría, traslación de una red cristalina donde se ven como propiedades de algunos sólidos.
- Trabajo colaborativo y activo de los estudiantes.
- Aprendizaje vivencial al realizar su práctica
- Reflexión y crítica de su propio aprendizaje
- Identificar lo que han aprendido a la resolución de problemas y a nuevas situaciones de aprendizaje del mundo real
- Investigación y transferencia de conocimiento al resolver problemas algebraicos y de Ingeniería. En particular, se hace énfasis en que el docente de Álgebra Lineal dotó a los estudiantes para que pudieran hacer transferencia de los conocimientos del tema de espacio vectorial a un problema de Ingeniería

ISSN 2448 – 7945

Aplicada como es la Mineralogía o el estudio de semiconductores. Así también, los estudiantes pudieron identificar en donde más se estudian dichos conceptos, por ejemplo, en una de sus infografías se resalta la investigación de Rodríguez y Narváez (2019) que relaciona el Álgebra Lineal con la Química al estudiar la teoría de grafos en la topología molecular en temas de Ingeniería, por lo que la asignatura está integrada en otras asignaturas de Ingeniería y en la vida cotidiana.

4. Conclusiones

La elaboración de la secuencia didáctica que apoya los procesos de enseñanza del Álgebra Lineal en la Facultad de Ingeniería, UNAM favoreció la comprensión de conceptos, así como su vinculación con problemas específicos de Ingeniería. Se promovió también en los estudiantes el análisis, la reflexión al resolver y transferirlo a un problema que relaciona con problemas de Ingeniería. En la elaboración de la secuencia didáctica para cada actividad se buscó realizar una sinergia entre lo teórico y lo práctico.

Es de fundamental importancia en el diseño de recursos o materiales didácticos tomar en cuenta la mediación del aprendizaje con el recurso y la estrategia de aprendizaje para fomentar aprendizajes significativos.

También se promovió la creatividad pues los estudiantes tuvieron un aprendizaje vivencial, algunos estudiantes aprendieron de forma autogestiva y otros con redes de colaboración y cooperación.

Es indudable que el alumno visualiza el universo de las matemáticas ajeno al universo que habita; el acercarlo a través de actividades de una secuencia didáctica a la naturaleza favorece el proceso enseñanza y el proceso de aprendizaje de las matemáticas y en particular del Álgebra Lineal. El alumno descubre que no hay tal abstracción y que, por el contrario, hay una conexión directa entre lo que estudia en el salón de clases y lo que ve saliendo del mismo, además, lo hace reflexionar acerca de la necesidad de entender el mundo a través de las matemáticas.

La necesidad de generar secuencias didácticas que liguen la parte teórica con la parte experimental es prioritaria hoy día.

Por otro lado, el estudio de los conocimientos, habilidades y saber dónde se puede aplicar el Álgebra Lineal es importante para el desarrollo e innovación de tecnologías avanzadas en la industria 5.0, permitiendo las empresas con personal capacitado en conocimientos científicos y tecnológicos mejoren su eficiencia, productividad y competitividad en un entorno cada vez más digitalizado.

Agradecimientos

Los autores agradecemos el apoyo al proyecto PAPIME PE101424.

ISSN 2448 – 7945

5. Índice de referencias

Alquézar, Moira y Buzeki, Mariana. (2017). Saber y hacer: evaluación de la transferencia de conocimientos didácticos a la práctica docente. Praxis pedagógica, 17(20), 63-84. https://doi.org/10.26620/uniminuto.praxis.17.20.2017.63-84

Cervera Abarca, E. (2012). El constructivismo un acercamiento conceptual. Revista Electrónica Multidisciplinaria de Investigación y Docencia. https://revistaic.instcamp.edu.mx/uploads/Ano2012No2/Ano2012No2_6_13.pdf

Guzmán Gómez, V. J., y Espinoza Freire, E. E. (2022). Aprendizaje basado en problemas para el proceso de enseñanza-aprendizaje. *Revista Universidad y Sociedad, 14*(2), 124-131. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2218-36202022000200124&lng=es&tlng=es.

Laboratorio de estado sólido y semiconductores. (s.f.). https://fhuesogonzalez.mgh.harvard.edu/carrera/4o/fes/labfes_p1.pdf

Paz Enrique, L., y Leyva Hernández, M. (2022). El constructivismo como enfoque en la psicología educativa. Revista Digital Internacional de Psicología y Ciencia Social, 8(2). https://cuved.unam.mx/revistas/index.php/rdpcs/article/view/489/937

Ogalde, C. I., y González V. M. (2008). Nuevas Tecnologías y Educación. Diseño, desarrollo, uso y evaluación de materiales didácticos, México, D.F. 1ª. Edición. Ed. Trillas.

Ramos, Carmona, M. (2016). Aprendizaje vivencial. *Revista educarnos*. https://revistaeducarnos.com/aprendizaje-vivencial/

Rodríguez, Marcela., y Narváez, Ana María. (2019). Un acercamiento didáctico entre la Química orgánica y Álgebra Lineal. *Sección 2/ Propuestas para la enseñanza de las matemáticas, 32*(1). http://funes.uniandes.edu.co/14020/1/Rodriguz2019Un.pdf

UNESCO. (2021). *Reimagining our futures together: A new social contract for education. Executive summary.* Francia. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000379381_spa

ISSN 2448 – 7945

PENSAMIENTO CRÍTICO EN UNA SINERGIA DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL Y ÁLGEBRA LINEAL EN INGENIERÍA

Rodríguez Chávez Rosalba[1*], González Sosa Jesús Vicente [2], Ávila Becerril Sofía Magdalena [3], Oshino Ortiz José Jinkichi [4] y Ávila Núñez María del Rocío[5]
[1,3,5] *División de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNAM, Conjunto Sur Edificio I – PB, Circuito exterior s/n, Ciudad Universitaria. c. p. 04510, Coyoacán, México, D.F*
[2] *Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco. Av. San Pablo No. 420 12 Col. Nueva el Rosario C.P. 02128 13 Alcaldía Azcapotzalco, CDMX*
[4] *Tecnológico Nacional de México, Av. Universidad 1200, Col. 11 Xoco, Ciudad de México, Alcaldía Benito Juárez, C.P. 03330, CDMX*

ID-POSM050

Resumen

La formación científica del estudiante en Ingeniería se apoya en la comprensión de los conceptos y la resolución de problemas algebraicos y de ingeniería aplicada.
El reconocimiento de dónde se encuentran los conceptos inmersos en la resolución de un problema desarrolla en el estudiante la capacidad de pensar de forma analítica y crítica.
Actualmente las Tecnologías de la información y la Comunicación junto con la Inteligencia Artificial (IA) están haciendo sinergia de tal forma que con solo dar unas instrucciones se arrojan diversos trabajos escolares en minutos, casi perfectos, tal como los solicitó el profesor. Por lo que algunos estudiantes están tomando estas bondades que se les ofrece a través de Internet, sin embargo, tiene sus limitaciones como son que el estudiante muchas veces no lea y revise lo que entrega, si es confiable o no, o si se apega al objetivo de aprendizaje o bien desarrolle un pensamiento crítico y reflexivo.
Por lo que la educación 4.0 trae consigo el desafío de la IA en la educación exige que los docentes estemos capacitados para afrontar y reconocer cuando los trabajos son entregados con esta tecnología.
En este trabajo se plasman las ideas de cómo el uso de las teorías críticas emancipa al estudiante a investigar, leer y dar sus puntos de vista de manera crítica, analítica y reflexiva y sobre todo a que haya un acercamiento entre seres humanos el cual se debe promover haciendo análisis, crítica, entre otros.
En este trabajo se da cuenta de los resultados obtenidos de los estudiantes que colaboraron y resolvieron un cuestionario, además, de ver el uso de la estrategia didáctica como la elaboración de ensayos para la investigación de la transferencia de conceptos de transformaciones lineales en la resolución de problemas de ingeniería, así como el uso de estrategias de trabajo colaborativo.

Palabras clave: *Inteligencia Artificial, pensamiento crítico, Álgebra Lineal, Educación Superior, Ingeniería, Tecnología*

[1]* *Autor para la correspondencia. E-mail: rorochmx@yahoo.com.mx*

ISSN 2448 – 7945

1. Introducción

La ciudadanía global exige estudiantes que aprendan a aprender, desaprendan algunos preconceptos o ideas, sean creativos, se reformen y reconstruyan su conocimiento, que sean capaces de tomar decisiones por sí mismos, pero con conciencia de que la información es veraz, además que fomenten el pensamiento crítico, que juzguen o evalúen lo que les acontece en su vida estudiantil y cotidiana. Asimismo, se busca que puedan crear su propia tecnología, para adaptarla y contextualizarla. Para esto es necesario una educación centrada en el estudiante donde se fomente la curiosidad, creatividad, colaboración, cooperación, habilidades metacognitivas como la resiliencia, la adaptabilidad, aprender nuevos lenguajes de programación y robótica, entre otros. Cobo (2016) cita a Freire (1986) quien menciona que se debe fomentar el desarrollo del arte de preguntar para que se viva la curiosidad que invita a explorar y buscar conocimientos y que se viva la pedagogía de la respuesta. También se cita a Coll (2013) quien menciona que la ecología del aprendizaje es necesaria para una educación formal y escolar en todos los niveles educativos por lo que los retos a asumir son: a) el aprendizaje se produce y será permanente, b) el aprendizaje seguirá siendo modelado por las Tecnologías de la Información y la Comunicación en distintos contextos, y c) el desarrollo de competencias y habilidades genéricas y transversales para que los estudiantes aprendan en distintos ámbitos. Cebotarev (2003) menciona que, desde la perspectiva del enfoque crítico, el sujeto es un participante activo donde construye y transforma su contexto social e histórico ligado con la teoría con la reflexión, cobrando su importancia en la praxis. Por lo que la pedagogía crítica nace con los postulados de la teoría crítica y el marxismo en la educación. El precursor más reconocido es Paulo Freire, también se tiene a McLaren, Henry Hiroux, Michael Apple, entre otros. Por otro lado, Santamaría-Rodríguez et.al. (2018) basan sus contribuciones en comprender y actuar para influir en la democracia de la participación, la interacción, el leguaje y la comunicación en los ambientes de aprendizaje abiertos. Por su parte, la escuela de Frankfurt proviene de las escuelas naturales, su praxis crítica apoya al análisis crítico y de relectura. Ambas escuelas, emancipan a las personas a la transformación de la sociedad de una lectura crítica. Por otro lado, Freire, menciona que la pedagogía crítica busca que los sujetos se concienticen de su realidad histórica, buscan desarrollar su capacidad crítica y desarrollar su práctica educativa desde la reflexión. Por lo que las condiciones básicas que se aplican desde la pedagogía crítica según Ramírez (2008) son: “1) Ampliación conceptual, 2) la disposición para potenciar las habilidades del pensamiento, 3) Autodeterminación para evaluar una tarea y 4) Disciplina para la evaluación de la tarea”.

Sin embargo, junto con el enfoque y las pedagogías críticas es necesario el apoyo de la teoría del aprendizaje situado y del constructivismo de tal manera que el estudiante pueda resolver cualquier problema.

El docente como investigador-actor es un promotor en sus prácticas educativas innovadoras que permitan facilitar la metacognición, la cooperación, la reflexión y la crítica. Los estudiantes deben aprender para la vida. Varela (2019) menciona que el pensamiento crítico es una habilidad para evaluar productos intelectuales, se puede

ISSN 2448 – 7945

mencionar más que una definición y transferir en distintos contextos como: recopilar información, dar las ideas principales, identificación de significados. También el pensamiento crítico desde el punto de vista mental se cita a Marzano et. al. (1988) quienes mencionan hay una manifestación de “conceptos previos, comprensión, resolución de problemas, toma de decisiones, composición y discurso oral”. Además, un pensador crítico desarrolla criterio con base en los conceptos. Los docentes pueden enseñar dicho pensamiento tomando en cuenta lo siguiente: Involucrar a los estudiantes en tareas que requieren razonamiento, reflexión o evaluación, apoyar a desarrollar materiales para llevar a cabo las tareas, fomentar la participación en discusiones o evaluaciones, así como argumentar con validez.

Según Sulbarán (2023), el reto que enfrentan los estudiantes en la educación 4.0 es cuestionar el sistema educativo tradicional, buscando la adaptación a las demandas de este siglo XXI y que tiene como fundamentos la conectividad, la tecnología y la globalización, es decir, es el hacer uso de la tecnología educativa que tienen a su alcance y producir nuevos recursos didácticos o tecnologías y además que la información a partir de la creación se fomente el pensamiento crítico y reflexivo en la educación superior.

En el contexto expuesto, la inteligencia artificial (AI por sus siglas en inglés) en la educación es un apoyo, pero es necesario que el docente la guíe con estrategias didácticas para la cognición, metacognición, aprendizaje activo, uso de pedagogías críticas, entre otras. La AI se concibe como un desarrollo tecnológico cuya incursión en el campo educativo cada día se vuelve más persistente, puesto que permite buscar entornos más personalizados para el estudiante. Harris et. al. (2022) citan distintas tendencias de la AI en la educación, se mencionan a Ocana-Fernandez, Y; Valenzuela-Fernandez, LA; Garro-Aburto, LL. (2018) en Artificial Intelligence and its Implications in Higher Education que mencionan que la AI trae consigo la personalización del aprendizaje de acuerdo a las necesidades de los estudiantes. Por lo que los docentes deben capacitarse en competencias digitales. Por otro lado, otra tendencia es la de Broo (2022) en la cual se estudian los cambios de paradigma actuales, así como las habilidades de los profesionales ante la quinta revolución industrial. La AI como parte de la tecnología educativa coadyuva, a través de la mediación del aprendizaje, a ampliar los conocimientos y fomentar diversas habilidades en el estudiante, entre ellas desarrollar el pensamiento crítico para que posteriormente, los estudiantes puedan tomar decisiones con criterio y consensuadas en la resolución de problemas escolares y de ingeniería aplicada. Además, como menciona Sánchez (2023) quien cita a (Asthana y Hazela, 2019) la AI aporta a los estudiantes habilidades novedosas, así como transforma el ambiente colaborativo de las instituciones a nivel superior. Además de que hay nuevas maneras de interactuar entre docentes y estudiantes.

Algunas de Las estrategias de aprendizaje sugeridas para fomentar el pensamiento crítico son: Comprensión de conceptos, Aprendizaje Basado en Problemas, Aprendizaje Basado en Proyectos, Aprendizaje basado en casos, entre otras. Como parte de las estrategias para este trabajo se toma en cuenta lo que dicen Guzmán et. al. (2022) quienes citan a (Palacios y Barreto, 2021) que define a la estrategia de Aprendizaje Basada en problemas (ABP) como una estrategia que fomenta el trabajo

ISSN 2448 – 7945

colaborativo entre pares, estimula las relaciones interpersonales para lograr un objetivo.
El propósito de este trabajo es promover y evidenciar la necesidad del pensamiento crítico en los estudiantes de segundo semestre de la asignatura de Álgebra Lineal mediante el uso de la Inteligencia Artificial.

2. Metodología o desarrollo

A continuación, se describe la intervención educativa realizada en el aula con estudiantes de segundo semestre que cursan diversas ingenierías.

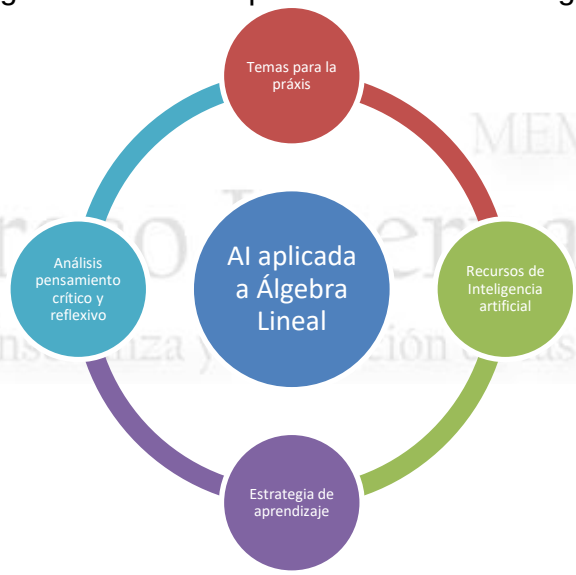


Figura 1. AI para promover el pensamiento crítico y reflexivo.
Elaboración propia

Se buscaron los temas para fomentar la praxis, es decir, se identificaron de la asignatura de Álgebra Lineal que subtemas o temas presentan dificultad y además que tienen numerosas aplicaciones en la Ingeniería, el tema seleccionado fue Transformaciones Lineales, ya que impacta directamente en los temas subsecuentes de la asignatura y en otras asignaturas posteriores como son: Cálculo Vectorial, Ecuaciones Diferenciales y asignaturas de Ingeniería aplicada.
Se realizó la búsqueda en una herramienta de AI por parte de los estudiantes, por lo que se sugirió utilizar la aplicación de inteligencia artificial llamada TALKAI[2] AI. Se sugirió la estrategia didáctica basada en problemas. Por lo que el estudiante utilizó la siguiente instrucción en TALKAI AI. “Realiza un ensayo utilizando la metodología de aprendizaje basado en problemas donde se aplican las transformaciones lineales en la Ingeniería en Computación para la asignatura Álgebra Lineal a nivel superior.” En la instrucción dada a la AI sólo varió la carrera cursada por cada estudiante.
Las estrategias didácticas utilizadas durante la intervención en el aula fueron: Estrategia metacognitiva para promover la comprensión de las transformaciones

[2] https://talkai.info/

ISSN 2448 – 7945

lineales se utilizó un mapa conceptual para extraer los conceptos principales. Posteriormente, se utilizó la estrategia didáctica de colaboración para fomentar el trabajo activo dentro del aula, y así los estudiantes pudieran leer sus trabajos, compartir y criticar en conjunto lo que habían trabajado individualmente. Para fomentar el pensamiento crítico y la reflexión se elaboró un cuestionario con preguntas para recabar datos de la lectura y la praxis realizada con los conceptos y problemas de ingeniería.

3. Resultados y análisis

La investigación llevada fue cualitativa, se tomó un muestreo no probabilístico, la muestra fue por conveniencia de 40 estudiantes. La técnica de evaluación fue la encuesta y el instrumento de evaluación utilizado fue un cuestionario
La estrategia didáctica fue colaborativa, se efectúo dentro del salón de clases, se entregaron las hojas de trabajo y ellos las revisaron en equipo. Asimismo, los estudiantes subieron sus evidencias a la plataforma educativa Classroom.
Algunos comentarios de los estudiantes fueron: “Todo lo que dice la información brindada por la IA es verídica, aunque nunca había podido ver qué aplicaciones podría darle a mi carrera, me agrado muchísimo los temas laborales donde puedo aplicar las transformaciones lineales ya que son áreas a las que me gustaría enfocarme en un futuro como lo es la optimización y planificación de procesos industriales desde lo analítico hasta lo computacional”. “La información obtenida por TALKAI AI es bastante buena, ya que no presenta ningún error, además de dar ejemplos claros. Por otro lado, se tiene que la mayoría de las aplicaciones se dan en la diagonalización de matrices y matrices de transición. Además, el texto entregado utiliza muchas palabras rimbombantes”. En cuanto los conceptos los estudiantes pudieron identificar conceptos como: eigenvectores y eigenvalores, concepto de transformación lineal, mapeo de vectores de un espacio en otro. Como resultado del ejercicio, también se encontró relación transversal de conceptos de otras asignaturas de las distintas ingenierías con el tema de transformaciones lineales, por ejemplo: Estudio de sistemas mecánicos complejos para el estudio de torque y aceleración angular, análisis de estructuras para el estudio de deformación y comportamiento de materiales ante fuerzas y tensiones, diseño de mecanismos donde las matrices de transformación proporcionan rotaciones y traslaciones entre componentes, relación entre las transformaciones lineales y la mecánica de sólidos y fluidos, termodinámica, dinámica de sistemas de partículas y cuerpos rígidos, etc. Uso de las transformaciones lineales en el análisis y diseño de sistemas y mecanismos, modelar sistemas eléctricos, análisis de señales en tiempo discreto, criptografía, procesamiento de señales, inteligencia artificial, diseño de sistemas satélites y naves espaciales. En Geología la representación de deformaciones en una falla geológica, en ingeniería civil el modelado de transporte y redes de distribución.
Las habilidades de pensamiento crítico o desempeño que se buscaron en el estudiante fueron: Lectura crítica, habilidades para comunicarse con sus compañeros y extraer las ideas principales, entre otras. Se mencionan a continuación los hallazgos al usar la IA (Talkai AI) y la estrategia de elaboración de ensayo y con

ISSN 2448 – 7945

el aprendizaje vivencial para promover el pensamiento crítico a través de la investigación, la lectura crítica, el análisis, la crítica con uso de inteligencia artificial: 1.- Promover la lectura crítica con base en la investigación de textos o imágenes elaborados con AI. 2.- Identificar los conceptos clave y la construcción de significados a través de diferentes representaciones pueden ser lúdicas, de nuevos modelos matemáticos, planteamiento y resolución de problemas algebraicos y de ingeniería, oportunidades para la innovación y la reingeniería, entre otros. 3.- Identificación del cumplimiento del objetivo de aprendizaje de esta actividad y las conclusiones. 4.- Interpretación de los resultados con base en la transferencia de aprendizaje a la resolución de problemas o a la resolución de proyectos. 5.- Fomentar el pensamiento crítico y reflexivo con base en los resultados tomando en cuenta las vivencias y experiencias de los estudiantes con base en el entorno sociocultural en que se desenvuelven día con día. 6.- Énfasis en el acercamiento del ser humano con otros humanos al trabajar de forma activa y colaborativa en discusión y reflexión. Los seres humanos les hace falta conocerse para pensar, reflexionar y tener un alfabetismo digital crítico donde la mediación no genere ideas erróneas. La evolución de las tecnologías se está humanizando, por lo que al ser humano le hace falta conocerse, así como tiempo para reflexionar, pensar, un alfabetismo digital crítico, pero esto se hace cuando el ser humano tiene educación y los medios de comunicación no transmiten ideas erróneas. 7.- Fomentar la creatividad y la imaginación al entregar sus figuras que hacían síntesis de lo que investigaron. 8.- Los ensayos que se entregaron fueron todos distintos, no se percibe la copia, sin embargo, los conceptos no cambian, así como las referencias eran similares y las aplicaciones a la ingeniería si se ven diferentes. Además de ser de distintos tamaños. Al discutir los estudiantes sus ensayos, se complementaron los ejemplos por lo que dio una visión más amplia de las investigaciones. 9.- Es útil la AI ya que da idea de dónde comenzar a investigar, así como si se piden las referencias se puede confiar en la información solicitada, y se optimiza el tiempo. 10.- El 100% de los estudiantes estuvieron satisfechos con su investigación. 11.- Se identificaron los procesos que se realiza en la estrategia didáctica llamada ensayo.

Algunas desventajas fueron:

- Se deben contrastar las fuentes de información para que la información sea verídica y confiable.
- Es importante tener criterio propio y colocar las fuentes de información para no cometer plagio. Se debe citar correctamente. La AI influye en las opiniones al personalizar contenido y recomendaciones, crea burbujas de filtro dado dependiendo de su programación. Por lo que el uso excesivo de estas sesgaría las opiniones.
- Es responsabilidad del estudiante evaluar críticamente la información que brinda la IA.
- Se corre el riesgo de perder la individualidad e investigación propia.

ISSN 2448 – 7945

- Las personas han confiado más en la IA y se está perdiendo el análisis de la información y las cosas.
- La redacción muchas veces es confusa. útil y complementaria y exploratoria de un tema.
- Crea dependencia como ser humano. Da información generalizada y si no se solicita, no se desarrollan los ejemplos.
- Debe estar conectada a Internet.
- El pensamiento crítico que proporciona la AI es casi nulo.

4. Conclusiones

La formación científica y tecnológica en la ingeniería requiere de conocimientos, habilidades, actitudes, aptitudes que aprenda a aprender los conceptos desde el punto de vista crítico para llevarlos a la práctica en la resolución de problemas algebraicos y de ingeniería aplicada. Una vez que se tienen aplicados dichos conceptos el ingeniero actual debe hacer uso del pensamiento crítico para fomentar su creatividad, reflexión y crítica de su praxis. Las tendencias educativas con el uso de las tecnologías de la información y la comunicación es la mediación de los procesos de enseñanza y aprendizaje por lo que no sólo es contar con el recurso, sino que el docente debe guiar al estudiante a través de estrategias didácticas para lograr que el alumno aprenda a aprender, trabaje colaborativamente y además desarrolle un pensamiento crítico y reflexivo. La inclusión de la inteligencia artificial actualmente en la educación coadyuva a que tanto el docente como el estudiante puedan apoyarse para diversas actividades como: investigación, resolución de problemas, ideas creativas, elaboración de ensayos, elaboración de instrumentos de evaluación, entre otros.
Como señala Márquez (2019) al estar inmersos con las tecnologías y el Internet, la sociedad debe ser crítica y reflexiva, se debe considerar el cuidado de la privacidad de los datos de los usuarios, pues se desconoce quién está detrás del manejo de dicha información y apoyar a los estudiantes a facilitarles su proceso de aprendizaje a través de la mediación digital ya que constituye un elemento primordial para la comunicación pedagógica y las decisiones didácticas. En definitiva, la contribución de la tecnología (inteligencia artificial) resignifica en la educación para su uso, creación e innovación y las cuales deben ser utilizadas de forma pertinente y con objetividad para el beneficio del aprendizaje de los estudiantes y su inclusión social.

Agradecimientos

Los autores agradecemos el apoyo al proyecto PAPIME PE101424.

5. Índice de referencias

ISSN 2448 – 7945

Broo, D. G., Kaynak, O., & Sait, S. M. (2022). Rethinking engineering education at the age of industry 5.0. *Journal of Industrial Information Integration, 25*. doi:https://doi.org/10.1016/j.jii.2021.100311

Cebotarev, E. A. (2003). El Enfoque Crítico: Una revisión de su historia, naturaleza y algunas aplicaciones. *Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales, Niñez y Juventud, 1*(1), 17-56. Obtenido de http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1692-715X2003000100002&lng=en&tlng=es.

Cobo, C. (2016). *La Innovación Pendiente. Reflexiones (y Provocaciones).* (C. F. Montevideo., Ed.) Obtenido de https://www.aprendevirtual.org/centro-documentacion-pdf/La_innovacion_pendiente.pdf

Guzmán Gómez, V. J., & Espinoza Freire, E. E. (2022). Aprendizaje basado en problemas para el proceso de enseñanza-aprendizaje. *Revista Universidad y Sociedad, 14*(2), 124-131. Obtenido de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2218-36202022000200124&lng=es&tlng=es.

Harris Bonet, P., Romero Romero, G., Harrís Bonet, M., & LLanos Díaz, R. (2022). Análisis de las tendencias educativas con relación al desarrollo de las competencias digitales. . *RiiTE Revista Interuniversitaria de Investigación en Tecnología Educativa, 12*, 158–174. doi:https://doi.org/10.6018/riite.520771

Márquez Zamora, R., & Cobo, C. (2019). Acepto las condiciones: Usos y abusos de las tecnologías digitales. (methaodos, Ed.) *Revista De Ciencias Sociales, 7*(2). doi:https://doi.org/10.17502/m.rcs.v7i2.321

Ramírez Bravo, R. (2008). La pedagogía crítica: Una manera ética de generar procesos educativos. *Folios, 28*(108-119). Obtenido de http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0123-48702008000200009&lng=en&tlng=

Sánchez Osorio, I. A. (2023). Inteligencia Artificial en la educación superior: Un análisis bibliométrico. *Revista Educación Superior y Sociedad, 35*(2), 156-173. doi:https://doi.org/10.54674/ess.v34i2.820

Santamaría-Rodríguez, J. E., Benítez-Saza, C. R., & Sotomayor-Tacur, S. (2018). Pedagogías críticas: Criterios para una formación de docentes en investigación pedagógica. *Redalyc*. https://www.redalyc.org/journal/873/87360193011/

Sulbarán, I. (2023). *TIFFIN UNIVERSITY*. [En línea]. Disponible en: https://global.tiffin.edu/noticias/educacion-4-0-caracteristicas-y-beneficios#:~:text=La%20educaci%C3%B3n%204.0%20consiste%20en%20una%20propuesta%20educativa,en%20el%20entorno%20laboral%20en%20el%20siglo%20XXI.

Varela, M. (2019). El pensamiento crítico en la educación universitaria. *Revista Economía, 66*, 51-59. doi:10.29166/economia.v66i104.1976

ISSN 2448 – 7945

MODELACIÓN DINÁMICA EN ECOLOGÍA, SOFTWARE Y APLICACIONES

Armando Cervantes Sandoval [1,*] Grecia Yareny Pérez Mar[2], y Patricia Rivera García[3]
[1,2,3] Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, UNAM

AP-POSM051

Resumen

La modelación dinámica de sistemas ecológicos, actualmente, enfrenta desafíos importantes en cuanto al proceso de enseñanza-aprendizaje en los cursos de la licenciatura en Biología. La falta de familiaridad con herramientas informáticas y con la comprensión de modelos ya desarrollados representan obstáculos para el dominio y conocimiento de procesos ecológicos complejos. Por lo que se exploran opciones de software para representar la estructura de un sistema ecológico, así como para entender el sustento matemático de un posible modelo. Encontrando que Vensim, un software de uso libre, proporciona capacidades de simulación que permiten evaluar escenarios complejos. El manejo de esta herramienta mejora la capacidad para modelar y proponer opciones para gestionar eficazmente los recursos naturales, sin embargo, hay poco material disponible para su conocimiento y manejo, por lo que se desarrolló una guía basada en ejemplos paso a paso, para que los alumnos del curso de ecología cuantitativa que se imparte en el octavo semestre de la carrera de Biología de la FES-Z tengan un acercamiento más amigable a este tipo de temas. Esta Guía muestra el manejo de los modelos básicos, como el exponencial, logístico y el de la interacción presa-depredador, hasta llegar a los de manejo de sistemas acuáticos, terrestres y ambientales, entre otros. Proponiendo una versión digital vía un Blog que aumente sus posibilidades de difusión y uso, para promover el interés por estos temas.

Palabras clave: *Modelación, Vensim, Simulación*

1. Introducción

La modelación dinámica, actualmente, es una herramienta fundamental en la ecología y las ciencias ambientales, que aplicada a procesos ecológicos permite desarrollar modelos matemáticos que representan el cambio de los sistemas a lo largo del tiempo. Estos modelos se pueden utilizar para comprender cómo cambian los ecosistemas bajo diferentes escenarios y su respuesta a perturbaciones externas, como son las actividades humanas. La dinámica de sistemas, fundamento de la modelación dinámica, es una técnica desarrollada originalmente por Jay W. Forrester del Instituto Tecnológico de Massachusetts a mediados de la década de 1950. Aplicándose ampliamente en diversas áreas, como en economía, finanzas, estudios ambientales, atención médica, tecnología de la información y biología (Hasimah *et al*., 2017).

En ese enfoque, de debe considerar al sistema en estudio como una unidad cuyos elementos interaccionan continuamente, de modo que operan hacia una meta común. Y al concepto de dinámico, como contrario al de estático, con lo que se

[1*] *Autor para la correspondencia. E-mail: arpacer@unam.mx*

ISSN 2448 – 7945

quiere expresar el carácter cambiante de los procesos (De Leo *et al.*, 2020). Por lo que la dinámica de sistemas es una herramienta que se basa en la construcción de modelos que permitan abordar situaciones complejas, aplicando la observación del todo y la relación con cada una de sus partes, es decir, desde un enfoque holístico. Siendo adecuada para modelar sistemas que presentan complejidad dinámica, bucles de retroalimentación, relaciones no lineales, existencia de retrasos en el envío de la información o de los materiales y que describen un comportamiento que, en muchos casos, es diferente del que cabría esperar (Serra, 2016). Aspectos presentes en la mayoría de los sistemas ecológicos.

En estos casos, los stocks y los flujos son los componentes básicos de los modelos de dinámica de sistemas, de forma que las existencias o stocks solo pueden cambiar a través de sus flujos, que son las cantidades agregadas (entradas) o restadas (salidas) a lo largo del tiempo (Duggan, 2016).

En la carrera de Biología de la FES Zaragoza, se imparte el curso de Ecología cuantitativa, en el que se revisan diferentes modelos que permitan estudiar y entender algunos de los problemas ecológicos actuales. Pero, aunque la enseñanza sobre ecosistemas es un tema clave para la comprensión de problemáticas socioambientales, los estudiantes suelen presentar dificultades al integrarse en un mismo sistema lo “vivo” y lo “no vivo” relacionando los componentes bióticos y abióticos. Para superar estas dificultades, distintos autores consideran que es importante que las secuencias de enseñanza aprendizaje ayuden a comprender el carácter multifactorial e interdependiente de las dinámicas ecológicas (Jaen *et al* 2018). Se recomiendan, para esto, ir integrando de forma sucesiva los distintos elementos de los conceptos de ecosistema en forma de modelos progresivamente más complejos desde la identificación de elementos y el papel de las relaciones, hasta las redes interdependencia (García, 1997).

Estas aproximaciones permiten reforzar la idea de dinamismo e interrelación que pueden plasmarse en ecuaciones matemáticas que modelan el comportamiento de las poblaciones y comunidades con base en distintos parámetros ecológicos (Domènech-Casal, 2020). Enriqueciéndola con el uso de software que permita al estudiante concentrarse en la estructura del proceso y dejar la carga de cálculo numérico al programa o programas que se estén utilizando. Uno de estos es Vensim, herramienta de programación visual para crear modelos de simulación que permiten conceptualizar, documentar, simular, analizar y optimizar modelos de dinámica de sistemas (Martín, 2007). Desde una interface de usuario que, mediante un diagrama, con stocks, flujos, conectores y convertidores representa la estructura de un sistema y sus flujos de información. Ayudando a definir su funcionalidad mediante el lenguaje de programación Vensim que cuenta con variables de nivel, rutas de flujo, variables auxiliares, constantes, líneas de información y líneas de información con demora. La conjugación de todos estos elementos ayuda a construir desde modelos elementales hasta modelos muy

ISSN 2448 – 7945

complejos, con el propósito de hacer la descripción de un sistema real en un modelo "imaginario" pero funcional que aporte información para la toma de decisiones (Cadenas y Guaita, 2020).

Por lo que se plantea: desarrollar material de apoyo en el uso de software para la modelación de procesos ecológicos, con el fin de promover la comprensión y aplicación de modelos matemáticos en la investigación ecológica. Apoyando, con esto, la toma de decisiones con base en la simulación de diferentes escenarios posibles.

2. Método o desarrollo

Buscar, seleccionar y sintetizar información para desarrollar una guía sobre modelación dinámica aplicada a la investigación ecológica, uno de los temas centrales del curso de ecología cuantitativa que se imparte en el octavo semestre de la carrera de Biología de la FES Zaragoza. Empezando por revisar los modelos básicos de crecimiento poblacional de mayor aplicación en Biología (exponencial y logístico), para pasar a los modelos de interacción poblacional con énfasis en el modelo presa-depredador de Lotka-Volterra, como paso obligado para entender modelos donde interactúan diferentes componentes y como todos estos cambian de manera conjunta.

El análisis de modelos complejos, para el manejo de recursos naturales requieren conocimiento avanzados de matemáticas o de utilizar software que facilite las rutinas de cálculo partiendo de un conocimiento intermedio de matemáticas. Hay varias opciones, pero una de las herramientas que han dado resultados satisfactorios y es relativamente fácil de manejar es Vensim. Aun así, el manejo de Vensim implica un curso dentro de otro curso, de ahí la pertinencia de realizar una guía, enfocada al estudio de procesos ecológicos.

La guía se elaboró a partir del diseñó de un plan de contenidos estructurados, en el que se abordan los conceptos fundamentales de modelación dinámica y su aplicación con la herramienta Vensim. Se desarrollaron ejemplos que constituyen un material educativo claro y conciso, con ejemplos ilustrativos paso a paso, capturas de pantalla y ejercicios prácticos resueltos.

El uso de la guía, en el curso de ecología cuantitativa permitió ahondar en algunos elementos clave del proceso de enseñanza aprendizaje, como son: a) Utilizar los diagramas causales como un metalenguaje que permita entender las relaciones estructurales de los procesos ecológicos, sin requerir conocimientos profundos de matemáticas; b) Revisar las ecuaciones diferenciales del modelo a partir de los flujos de entrada y salida, como una forma diferente de acercarse a la aplicación de las matemáticas a la ecología; c) Simular diferentes escenarios que promuevan la toma de decisiones con base en los resultados del modelo, combinando los conocimientos de ecología con el potencial del modelado de sistemas dinámicos.

ISSN 2448 – 7945

Como paso final se buscó promover la difusión de la guía, mediante una versión digital desarrollada en un edu-blog.

3. Resultados y análisis

Se elaboró una guía para introducir a los estudiantes en el uso de Vensim. Se comienza con un tutorial del cómo instalarlo, luego se exploran las funciones de la interfaz del software. Posteriormente se abordan los temas de los tipos de modelos, de menor dificultad, como el modelo exponencial, a los de mayor complejidad, como el modelo presa-depredador, para después abordar algunas aplicaciones a sistemas ecológicos.

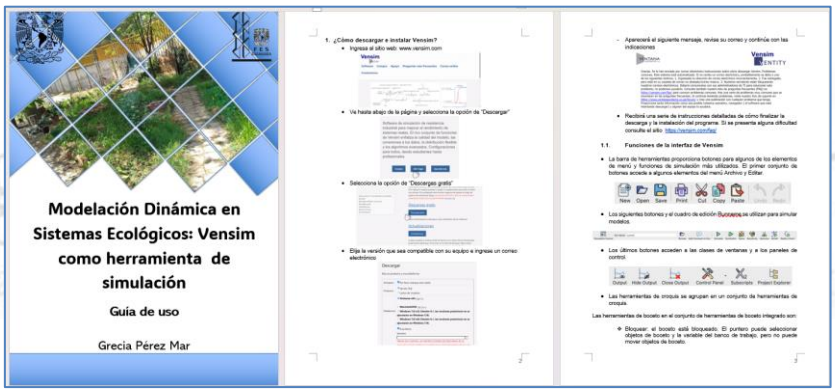


Figura 1. Portada de la guía.

Para el crecimiento exponencial, se modeló a una población de bacterias. Ilustrando cómo aumenta exponencialmente con el tiempo, comportamiento característico de un crecimiento no limitado por factores externos, figura 2. Donde el crecimiento de la población está regulado por los nacimientos menos las muertes (ecuación 1).

$$\frac{d(Población)}{dt} = \text{Población} * \text{Tasa}_{\text{de}_{\text{natalidad}}} - \text{Población} * \text{Vida}_{\text{media}} \qquad \textbf{Ecuación 1.}$$

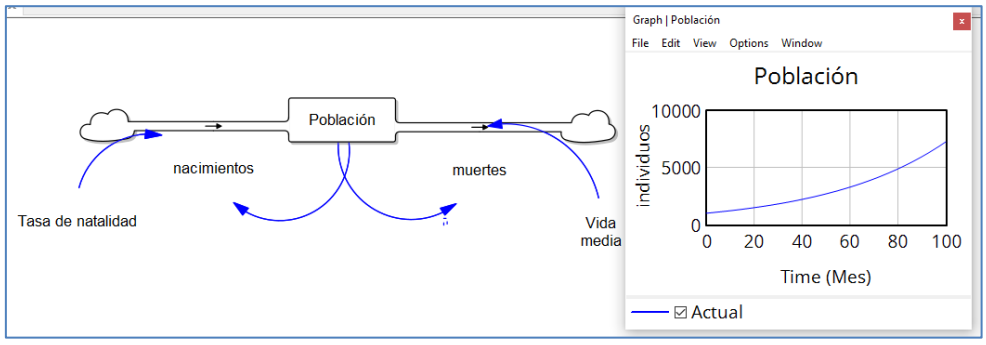


Figura 2. Modelo de crecimiento exponencial, flujo de entrada (+), salida (-).

ISSN 2448 – 7945

Modelo logístico, éste muestra el crecimiento de una población con una capacidad de carga, K, ilustrando cómo la tasa de crecimiento tiende a cero conforme la población se acerca a su capacidad máxima de recursos o de espacio, figura 3.

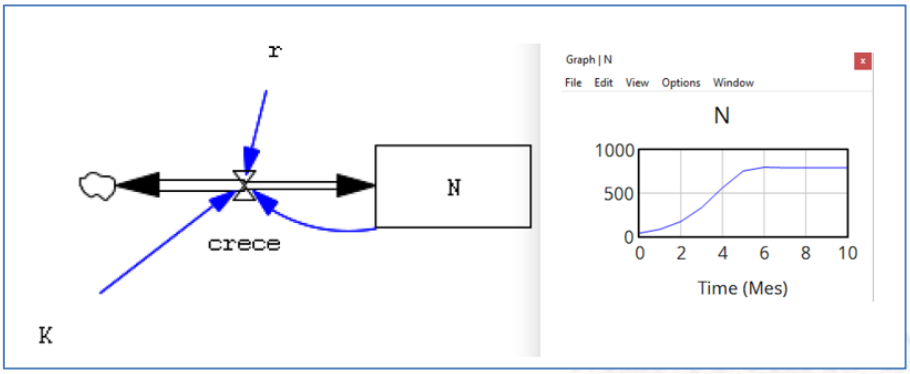


Figura 3. Modelo logístico: N_0=40, K=795 y r=1.18, con $\frac{dN}{dt} = r * N * (\frac{K-N}{K})$.

Para el modelo presa-depredador se utilizaron datos de veintiún tiempos de una población de conejos (presas) y otra de linces (depredadores), manejando tríadas de datos *(t, x(t), y(t))*. Donde *x(t)* corresponde a la población de conejos al tiempo *t*, y *y(t)* a la de linces.

El primer paso consiste en calcular los parámetros del sistema de ecuaciones representado en las ecuaciones 2 y 3. Donde $\bar{x}(t) = \frac{b_1}{b_2}$ y $\bar{y}(t) = \frac{a_1}{a_2}$, estos promedios se obtienen considerando los datos entre dos picos de las respectivas poblaciones. Además, si se considera un crecimiento exponencial, para dos puntos sucesivos $x(1) = x(0) * e^{a_1 * t}$ $y(1) = y(0) * e^{-b_1 * t}$, con *t=1* se pueden obtener los valores de a_1 y b_1, con los que a su vez se pueden calcular los valores de a_2 y b_2, obteniendo así los valores de los cuatro parámetros.

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x - a_2 xy \qquad \text{ecuación 2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -b_1 y + b_2 xy \qquad \text{ecuación 3}$$

Con estos valores calculados en Excel (figura 4a), se procede a realizar el modelo en el software Vensim (figura 4b), donde cada rectángulo representa una ecuación diferencial (en diferencias), los flujos contienen las ecuaciones del modelo (entradas con signo + y salidas con signo -), los convertidores representan los parámetros del modelo y las líneas con flecha indican la conexión entre los componentes. Es importante notar que las líneas que va de Conejos al flujo crecimiento_linces y la que va de Linces a crecimiento_conejos definen el sistema de dos ecuaciones en diferencias que se resuelve numéricamente de manera simultánea, por el método de Euler o de Runge-Kutta de orden 4 según se elija.

ISSN 2448 – 7945

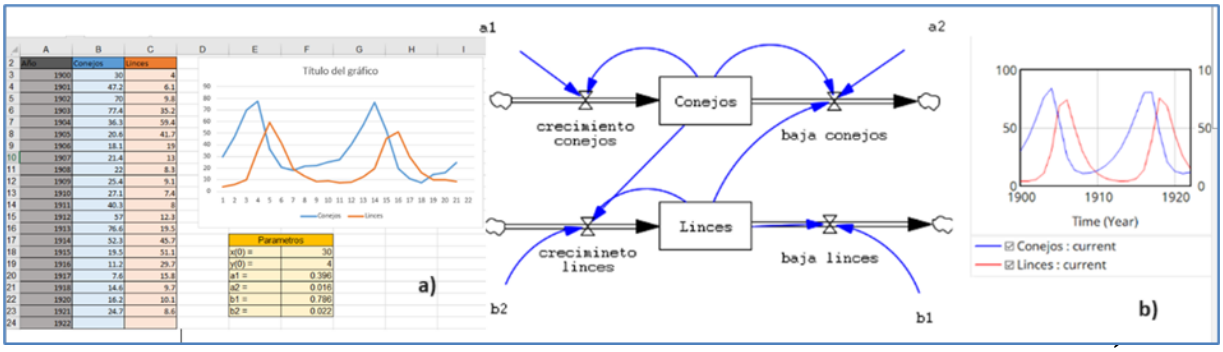
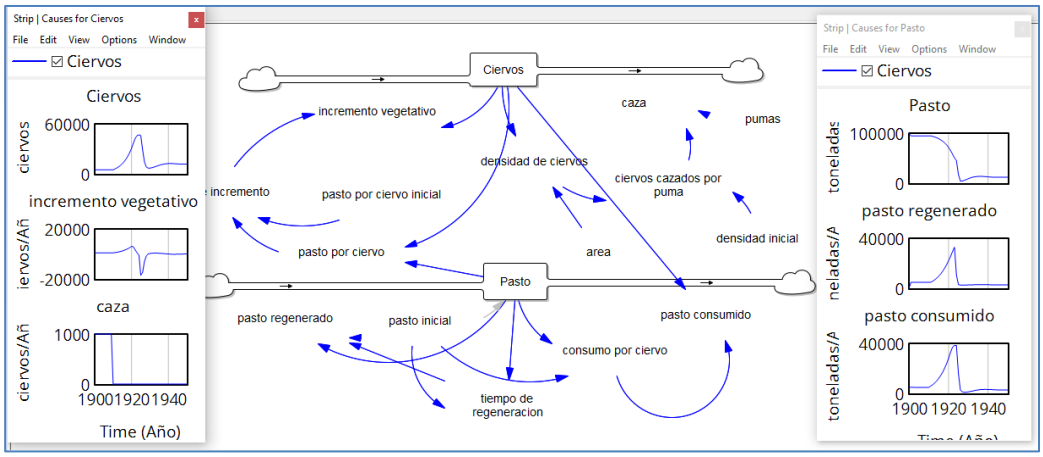


Figura 4. a) Parametrización en Excel y b) modelo en Vensim: a_1=0.396, a_2=0.016, b_1=0.786, b_2=0.020, Linces iniciales = 4, Conejos iniciales = 30.

Con este modelo se pueden realizar simulaciones, cambiando el valor de los parámetros o los valores iniciales de las poblaciones en estudio. Lo que permite considerar diferentes escenarios que proporcionen información valiosa sobre la estabilidad del ecosistema y la importancia de mantener un equilibrio entre las poblaciones de presas y depredadores para su coexistencia y supervivencia a largo plazo.

El desarrollo completo y paso a paso de este ejemplo se puede consultar en la siguiente dirección: Presa exponencial, Depredador exponencial – Modelación dinámica (unam.mx)

Se pretende dar los elementos para desarrollar modelos a partir de una representación visual de la dinámica de los cambios en un ecosistema a lo largo del tiempo, facilitando la comprensión de su funcionamiento y la simulación de diferentes escenarios de gestión y conservación (figura 5). Considerando el manejo de tasas de cambio y como base el modelo presa-depredador, donde las poblaciones de presas o depredadores presentan un crecimiento exponencial, logístico o una combinación de estos. Con sistemas de hasta 10 ecuaciones diferenciales simultaneas.



ISSN 2448 – 7945

Figura 5. Aplicación de los modelos dinámicos en ecología.

La versión digital de la guía está en el blog que corresponde al siguiente link: Modelación dinámica (unam.mx)

Análisis

En el curso de ecología cuantitativa se ha visto la necesidad de contar con material adecuado al enfoque de la carrera de Biología en la FES Zaragoza, en idioma español y con una secuencia de aprendizaje que vaya de lo más simple a lo complejo. Buscando que el estudiante no solo maneje software adecuado, en este caso Vensim, sino que lo utilice como una herramienta de comunicación entre la ecología y las matemáticas, por lo que manejar y entender los diagramas causales, es uno de los puntos clave para lograr un nivel óptimo de comunicación profesor-alumno.

El avance gradual de lo simple a lo complejo permite analizar si el estudiante entiende los procesos complejos y si es capaz de representarlos en un modelo. A la vez que se revisan las matemáticas implicadas en el proceso estudiado, pero sobre todo cambiando el enfoque tradicional de estudio donde se obtenían datos de distribución y abundancia por el de balance de masas y energía, donde las tasas de cambio son la herramienta fundamental.

Una vez que se genera el modelo, se pueden simular diferentes escenarios que permitan generar datos para el estudio, conocimiento y manejo de los recursos naturales.

Este material de apoyo facilita que el estudiante concentre su atención en entender los procesos ecológicos y que al manejar el modelo recupere y resalte el manejo de las conceptos y herramientas matemáticas necesarias para contar con datos que sustenten la toma de decisiones desde el punto de vista ecológico.

4. Conclusiones

La guía ha mostrado su utilidad como material de apoyo didáctico, permitiendo que los estudiantes se enfoquen en los procesos ecológicos, lo que promueve el uso de este tipo de software y la posibilidad de simular, diferentes escenarios que generen información para darle sustento a la toma de decisiones en el estudio y manejo de los recursos naturales.

Las versiones digitales tienen más aceptación que las versiones físicas o los archivos en formato PDF, aún cuando tengan vínculos o hipervínculos, por lo que el edu-blog es un recurso fundamental para promover el uso de este tipo de herramientas.

El uso adecuado de la amplia gama de apoyos digitales, dentro del aula, ha sido y seguirá siendo responsabilidad del docente, considerando que hay que encauzar a los

ISSN 2448 – 7945

estudiantes para que se apropien y se responsabilicen de su aprendizaje. Por lo que no se debe perder de vista que este tipo de herramientas no son para hacer las cosas más fáciles sino para avanzar con paso firme en la transmisión y adquisición del conocimiento.

Agradecimientos

A los proyectos PAPIME PE206022 y PE212024

5. Referencias

- Cadenas, M. y Guaita, W. (2020*). Dinámica de sistemas: una metodología para la construcción de modelos de toma de decisiones en sectores agroindustriales.* Bogotá. Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano.
- De Leo, E., Aranda, D. y Addati, G., (2020). "Introducción a la dinámica de sistemas". *Serie Documentos de Serie*, (739).
- Domènech-Casal J. (2020). "Construyendo un simulador de ecosistemas. Una experiencia STEM de enseñanza de dinámica de los ecosistemas, funciones matemáticas y programación". *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*. 17(3). 3202. Doi: 10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2020.v17.i3.3202
- Duggan, J. (2016). *An Introduction to System Dynamics System Dynamics Modeling with R. Springer International Publishing*. (pp. 1-25). DOI 10.1007/978-3-319-34043-2_1
- García, J. E. (1997). "La formulación de hipótesis de progresión para la construcción del conocimiento escolar: una propuesta de secuenciación en la enseñanza de la Ecología". *Alambique, Didáctica de las Ciencias Experimentales* ,14, 37-48. http://hdl.handle.net/11162/25265
- Hasimah, S., Jafri, Z., Norhaslinda, A., Norazura, A., Narul, H., (2017). *Introduction to system dynamics modelling and Vensim software.* Uum Press, Universiti, Utara Malaysia.
- Jaen M., Esteve P. y Banos I. (2018). "Problemáticas ambientales en las que confluyen ciclos biogeoquímicos. Propuesta para la Educación Secundaria". *Ápice. Revista de Educación Científica,* 2(1), 30-39. DOI: https://doi.org/10.17979/arec.2018.2.1.3162v
- Martin, J. (2007). *Guía del Usuario de Vensim*. Ventana *System Inc.*
- Serra, F. (2016). "El enfoque sistémico y la dinámica de sistemas como metodología de la NTE para el estudio de fenómenos complejos". *Civilizar*. 3(3).

ISSN 2448 – 7945

APLICACIÓN DE ANOVA EN EL ENSAYO DE DUREZA PARA LA CARACTERIZACIÓN DE MATERIALES COMPUESTOS

González Sosa Jesús Vicente[1, *], Flores Aguilar Elizabeth[2]
Pineda Norman Amanda Lolita[3]
[1]*Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco. Av. San Pablo No. 420 Col. Nueva el Rosario C.P, 02128, Alcaldía Azcapotzalco, CDMX.*
[2]*Centro de Actualización del Magisterio en la Ciudad de México. Fresno No. 5, Col. Santa María la Ribera, C.P. 06400, Alcaldía Cuauhtémoc, CDMX*
[3]*Escuela Preparatoria Unidad Condesa de la Universidad La Salle México. Av. Benjamín Franklin No. 45, Col. Condesa, C.P. 06140, Alcaldía Cuauhtémoc, CDMX.*

AP-POSM052

Resumen

El objetivo de este trabajo es analizar la aplicación de ANOVA (Análisis de Varianza) como una técnica estadística en el ensayo de dureza para la caracterización de materiales compuestos, con el fin de identificar las influencias de diferentes variables en la dureza de estos materiales. Se llevó a cabo un ensayo de dureza en muestras de materiales compuestos(plástico-madera), utilizando durómetros Shore A. Se seleccionaron diferentes variables independientes, como la composición del material, la temperatura de curado y el tiempo de procesamiento. Se realizaron múltiples repeticiones de cada ensayo para obtener resultados confiables. Los resultados obtenidos del ensayo de dureza se analizaron mediante ANOVA, permitiendo identificar la influencia de las diferentes variables en la dureza de los materiales compuestos. Se observaron diferencias significativas en la dureza entre diferentes composiciones de materiales y diferentes condiciones de procesamiento. Los resultados indican que la composición del material tiene un efecto significativo en la dureza de los materiales compuestos. Además, se encontró que la temperatura de curado y el tiempo de procesamiento también influyen en la dureza. Estos hallazgos son de gran importancia para la industria de los materiales compuestos, ya que permiten optimizar las propiedades de dureza mediante el control de estas variables. La aplicación de ANOVA en el ensayo de dureza para materiales compuestos ha demostrado ser una herramienta eficaz para identificar las influencias de diferentes variables en la dureza de los composites. Estos hallazgos contribuyen a un mejor entendimiento de las propiedades mecánicas de los materiales compuestos y pueden ser utilizados para optimizar su fabricación y aplicaciones utilizando herramientas computacionales y métodos estadísticos.

Palabras clave: *ANOVA, espécimen, estadística, composites, optimizar.*

1. Introducción

[1] *Autor para la correspondencia. E-mail: jvgs@azc.uam.mx

ISSN 2448 – 7945

La importancia de aplicar el método ANOVA en materiales compuestos para las pruebas experimentales para la obtención de la dureza, son elementos fundamentales para que el alumnado de las instituciones educativas se involucre con casos de estudio analizados con las herramientas de la estadística y ofrecer áreas de oportunidad en esta temática (Alfaro et al., 2023), con lo que se buscará la significancia entre las medidas realizadas en cada uno de los especímenes de prueba.

El análisis de ANOVA es una herramienta con el propósito de obtener el principal factor que afectaba la resistencia a tracción y microdureza en ensayos mecánicos de materiales (Chanakyan et al., 2021), por lo que se coincide con el autor para el uso de esta herramienta.

ANOVA es una de las herramientas más importantes para comparar las medias de tratamiento entre diferentes grupos en mediciones repetidas in embargo, es ineficiente cuando el número de grupos o dimensiones aumenta (Chen et al., 2022), por lo que es necesario considerar el tamaño de la muestra extraída de la población de los especímenes de prueba a utilizar en la experimentación.

De acuerdo con (Camacho et al., 2023) con el proceso de ANOVA requiere de una secuencia de pasos para el buen desempeño de la herramienta en la evaluación correspondiente, entre los pasos se tienen: interacción del diseño experimental con el caso de estudio, pruebas de significancia, interacciones significativas, permitiendo mejorar el análisis de estudio con estos parámetros.

La frecuencia con la que se debe analizar un caso de estudio con la herramienta de ANOVA consiste en el rango de valores, establecidos por la muestra o población de análisis que se desea trabajar, por lo que es necesario contemplar los datos de subregiones que interfieren en el estudio (Thango, 2022).

Existen estudios en diversas áreas de la ciencia en donde la aplicación de ANOVA tiene un gran interés por estudiarse, debido a la adaptabilidad que tiene esta herramienta para ser utilizada en diversos casos de estudio con datos específicos para determinar la significancia entre los rangos de valores que se analizan (Mohamed, et al., 2023).

En este sentido es importante el seleccionar los factores a desarrollar con el método de ANOVA e interpretar los resultados en función de las variables contenidas en cada trabajo o caso de estudio, debido a que de ello dependerá el éxito en cada uno de los análisis que se desarrollen con esta herramienta (Rehor, et al., 2023).

En ANOVA se realizan experimentos para estimar el rendimiento del algoritmo utilizando diferentes clasificadores y algoritmos convencionales, que permiten realizar un conglomerado de estudios con mayor precisión y los experimentos se modifican con mayor facilidad de acuerdo con los resultados que se obtienen con el proceso de análisis de varianza (Tripathy, et al., 2023).

2. Metodología o desarrollo

ISSN 2448 – 7945

La estructura para el desarrollo de ANOVA, como parte de la aplicación en los ensayos de dureza para los materiales compuestos, se lleva a cabo como se muestra en la Fig. (1), identificando cada una de las etapas propuestas para la investigación en cuestión.



Figura 1. Etapas aplicables en la investigación.

En la Fig. (1), se observa cada sección involucrada para aplicar ANOVA como herramienta en la evaluación de los materiales compuestos, utilizando el ensayo de dureza.

La primera sección identificación del caso de estudio para este trabajo se analizará el material compuesto de plástico con madera, en donde se tienen dos subsecciones: (a) necesidades: lo cual indica el análisis de utilizar los materiales compuestos en aplicaciones de ingeniería, con aspectos cualitativos como lo pueden ser, durable, amigable con el ambiente, textura y (b) especificaciones: que son conocidas como elementos cuantitativos que permiten evaluar, la resistencia al impacto, dureza, módulo de elasticidad, flexión y tracción.

La segunda sección describe el ensayo que se utiliza para la evaluación del material compuesto, el cual se trabaja como dureza, que tiene la característica de utilizar un durómetro con características específicas para un material de esta condición, el durómetro a utilizar se observa en la Fig. (2).



Figura 2. Durómetro Shore A y D para materiales plásticos.

Las especificaciones para cada uno de los durómetros se observan en la Tabla (1).

Tabla 1. Especificaciones de durómetros utilizados en los ensayos

Durómetro	Especificaciones	Descripción
Shore D	Rango	0-100 HD

ISSN 2448 – 7945

	Precisión	<1% H
	Carga	0.5 g
	Resolución	0.1 HD
	Peso	150 g
Shore A	Rango	0-100 HA
	Precisión	<1 %H
	Carga	0.5 g
	Resolución	0.1 HA
	Peso	150 g

En la Tabla (1) las especificaciones son similares en ambos durómetros, sin embargo, la diferencia se encuentra en la aplicación, el tipo de material a evaluar, para el Shore A requiere de materiales como caucho, plástico suave, cuero, material elástico y cera, mientras que el Shore D se utiliza para goma dura, resina dura, acrílico, vidrio, termoplásticos, fibras, entre otras; por lo que en el caso de estudio se hace uso del durómetro Shore D, por trabajar con polipropileno combinado con madera y ello se considera como un material termoplástico.

Se ha tomado en cuenta el software de Minitab con el cual se lleva a cabo le evaluación de ANOVA, cuyas características se apegan a las necesidades para evaluar el material compuesto y las mediciones obtenidas con el durómetro. En la Tabla (2) se tienen las mediciones correspondientes a la dureza en el material compuesto con diferentes composiciones.

Tabla 2. Dureza en material compuesto.

Material	Pza.	Evaluador				
		A	B	C	D	E
90%P-10%m	1	55	60	62	63	67
	1	57	60	60	60	59
	1	60	64	62	67	60
	1	56	64	66	61	61
	1	52	66	66	67	59
80%P-20%M	2	62	65	65	61	65
	2	66	65	68	63	66
	2	66	56	66	65	66
	2	61	62	66	61	66
	2	60	66	66	69	64
70%P-30%M	3	56	67	67	66	63
	3	64	53	64	53	64
	3	60	70	57	57	66
	3	65	70	64	61	66
	3	71	68	63	66	70
60%P-40%M	4	63	64	67	67	64
	4	64	66	66	67	69

ISSN 2448 – 7945

	4	63	67	62	69	67
	4	59	69	68	66	68
	4	63	68	66	65	67
50%P-50%M	5	55	67	57	65	64
	5	64	65	62	58	63
	5	67	63	66	64	66
	5	69	68	67	65	64
	5	67	66	69	59	68

En la Tabla (2) se identifican 125 mediciones realizadas a los especímenes de material compuesto, plástico-madera, en sus diferentes composiciones, las mediciones se realizaron por 5 evaluadores para lograr identificar las variables a mejorar por medio del análisis de ANOVA. En la Tabla (3), se muestran los promedios, desviación estándar para realizar el análisis correspondiente.

Tabla 3. Datos estadísticos de los especímenes para aplicar ANOVA.

Material	Evaluador				
	A	B	C	D	E
	Promedio				
90%P-10%m	56	62.8	63.2	63.6	61.2
	Desviación estándar				
	2.91	2.68	2.68	3.28	3.34
	Varianza				
	8.5	7.2	7.2	10.8	11.2
80%P-20%M	**Promedio**				
	63	62.8	66.2	63.8	65.4
	Desviación estándar				
	2.82	4.08	1.09	3.34	0.89
	Varianza				
	8	16.7	1.2	11.2	0.8
70%P-30%M	**Promedio**				
	63.2	65.6	63	60.6	65.8
	Desviación estándar				
	5.63	7.16	3.67	5.68	2.68
	Varianza				
	31.7	51.3	13.5	32.3	7.2
60%P-40%M	**Promedio**				
	62.4	66.8	65.8	66.8	67
	Desviación estándar				
	1.94	1.92	2.28	1.48	1.87
	Varianza				
	3.8	3.7	5.2	2.2	3.5
	Promedio				

ISSN 2448 – 7945

50%P-50%M	64.4	65.8	64.2	62.2	65
	Desviación estándar				
	5.54	1.92	4.76	3.42	2
	Varianza				
	30.8	3.7	22.7	11.7	4

De la Tabla (3), se identifican claramente los especímenes con un mayor índice de estudio para mejorar evaluaciones con estas características, por lo que se debe trabajar en los especímenes de 50-50 y 70-30, son los que estadísticamente deben trabajarse para estar dentro de la muestra compatible en este estudio. Con los datos mostrados en las Tablas (2) y (3), se aplica el estudio ANOVA, el cual ofrece la información en la Fig. (3).

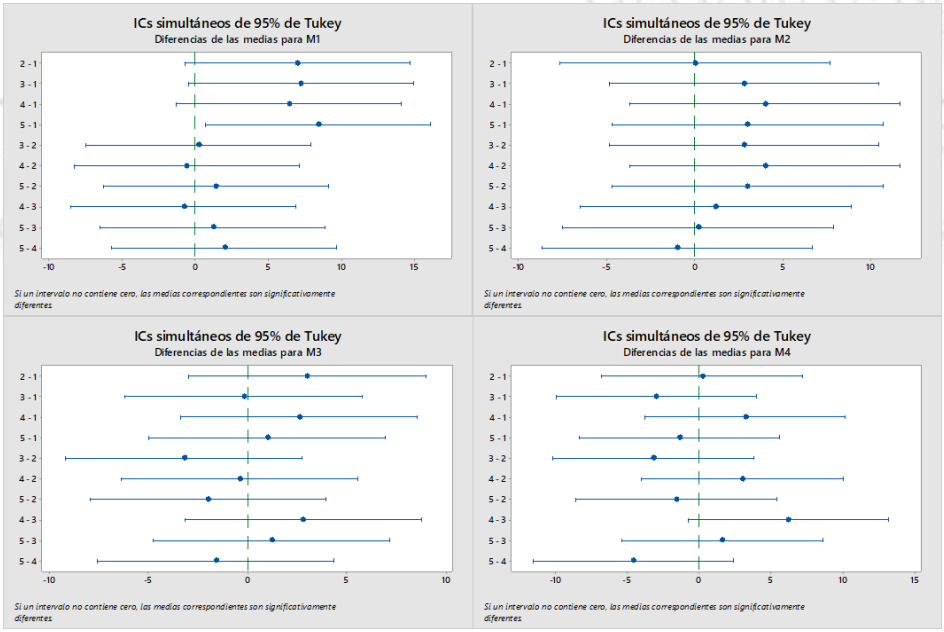


Figura 3. Prueba Tukey correspondiente al análisis ANOVA.

De la Fig. (3), se tiene que la mayor cantidad de las observaciones de los especímenes mantienen una relación satisfactoria con respecto a las mediciones de la dureza en el material compuesto. Es notorio que se debe analizar, con mayor detenimiento el espécimen 2, representado como M2 en las medidas, con el propósito de mejorar el análisis de ANOVA. En los siguientes párrafos se tienen expresados los resultados de la aplicación del método de ANOVA para un caso práctico de Ingeniería.

3. Resultados y análisis

En la Tabla (4) se identifican las relaciones existentes entre cada una de las mediciones de dureza en el material compuesto, después de realizar la prueba Tukey.

Tabla 4. Relaciones Tukey

Medición	90-10 %	80-20 %	70-30 %	60-40%	50-50%

ISSN 2448 – 7945

M1	-----	✓	✓	✓	------
M2	-----	-----	-----	-----	------
M3	----	-----	-----	-----	------
M4	----	------	-----	-----	------
M5		✓	-----	-----	✓

De la Tabla (4), muestra la significancia entre las mediciones, por lo observado se deben realizar otras pruebas para determinar la viabilidad de los ensayos de dureza para los materiales compuestos.

Como parte del resultado se tiene la consideración que la prueba Tukey es comúnmente utilizada en estadística para comparar múltiples medias de diferentes grupos o tratamientos.

Por lo que estas pruebas son especialmente útiles cuando se comparan múltiples tratamientos o materiales en términos de dureza, ya que permiten identificar diferencias significativas entre ellos. Para llevar a cabo la prueba Tukey-Kramer o la prueba de Dunnett en la medición de dureza de materiales compuestos, es importante seguir los pasos adecuados y tener en cuenta la configuración experimental específica.

4. Conclusiones

En conclusión, los resultados obtenidos en el estudio muestran que la mayoría de las observaciones de los especímenes presentan una relación satisfactoria con las mediciones de dureza en el material compuesto. Sin embargo, se destaca la necesidad de realizar un análisis más detallado del espécimen 2 (M2) para mejorar la validez del análisis de ANOVA. Estos hallazgos resaltan la importancia de seguir explorando y perfeccionando los métodos de medición y análisis en la investigación de materiales compuestos.

Es fundamental enfocar los esfuerzos en el estudio y evaluación de los especímenes con un índice de 50-50 y 70-30, ya que son los que presentan mayor relevancia y potencial para mejorar las evaluaciones en este estudio.

Como se mencionó en la sección anterior, resultados, después de realizar el análisis con ANOVA, se deberá considerar realizar un estudio con mayor profundidad para mejorar las condiciones en la medición de la dureza para los especímenes, en donde se deberán tomar en cuenta otros parámetros y variables de estudio, por ejemplo, revisar la calidad de las piezas antes de aplicar ANOVA, verificar que los instrumentos de medición se encuentren calibrados, las personas que realizan las mediciones estén capacitadas para la labor experimental en la medición de la dureza, para los materiales compuestos. Entre otros aspectos más sobre os materiales compuestos para hacer uso de la herramienta de ANOVA, la cantidad de porcentaje del material, el proceso de obtención de los especímenes, equipos utilizados para el proceso de fabricación, cantidad de muestras de la población para tener el rango requerido y aplicar adecuadamente ANOVA.

5. Referencias

ISSN 2448 – 7945

Alfaro Ureña, D., Ortega A., B., & Lozano, B. (2022). Aplicación del análisis de varianza para comparar el aprendizaje de los estudiantes en tres modalidades: virtual sincrónica, virtual asincrónica y presencial. Revista Científica Guacamaya, 7(1), 60–72. Recuperado a partir de https://revistas.up.ac.pa/index.php/guacamaya/article/view/3182

Chanakyan, C., Sivasankar, S., Meignanamoorthy, M., Ravichandran, M., Mohanavel, V., Alfarraj, S., Almoallim, H. S., Manikandan, V., & Isaac JoshuaRamesh Lalvani, J. (2021). Optimization of FSP Process Parameters on AA5052 Employing the S/N Ratio and ANOVA Method. Advances in Materials Science and Engineering, 2021, 1–15. https://doi.org/10.1155/2021/6450251

Chen, T., & Zheng, L. (2023). One-Way High-Dimensional ANOVA. Journal of Mathematics, 2023, 1–11. https://doi.org/10.1155/2023/9350523

Camacho, J., Vitale, R., Morales-Jimenez, D., & Gómez-Llorente, C. (2022). Variable-Selection ANOVA Simultaneous Component Analysis (VASCA). https://doi.org/10.1101/2022.06.13.22276334

Thango, B. A. (2022). Application of the Analysis of Variance (ANOVA) in the Interpretation of Power Transformer Faults. Energies, 15(19), 7224. https://doi.org/10.3390/en15197224

Mohamed, N. A., Alanzi, A. R. A., Azizan, N. A., Azizan, S. A., Samsudin, N., & Jenatabadi, H. S. (2023). Evaluation of depression and obesity indices based on applications of ANOVA, regression, structural equation modeling and Taguchi algorithm process. Frontiers in Psychology, 14. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2023.1060963

Řehoř, J., Fulemová, J., Kutlwašer, J., Gombár, M., Harničárová, M., Kušnerová, M., Vagaská, A., Povolný, M., Valíček, J., & Zatloukal, T. (2023). ANOVA analysis for estimating the accuracy and surface roughness of precisely drilled holes of steel 42CrMo4 QT. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 126(1–2), 675–695. https://doi.org/10.1007/s00170-023-11115-8

Tripathy, G., & Sharaff, A. (2023). AEGA: enhanced feature selection based on ANOVA and extended genetic algorithm for online customer review analysis. The Journal of Supercomputing, 79(12), 13180–13209. https://doi.org/10.1007/s11227-023-05179-2

ISSN 2448 – 7945

ALGORITMO GENÉTICO APLICADO A LA MOVILIDAD HUMANA

García León Omar[1*], Aguilar Marquez Armando[2], León Rodriguez Frida[3], Pineda Becerril Miguel de Nazareth[4], y Rosas Fonseca Rosalba Nancy[5]
[1,2,3,4,5]*Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. A Teoloyucan Km 2.5, San Sebastian Xhala, 54714 Cuautitlán Izcalli, México.*

EN-POSM056

Resumen

El objetivo de este trabajo es analizar la evolución de la Movilidad Humana entre 2011 y 2021 de la población general. Para formar Sistemas Locales de Trabajo (SLT) Se utiliza una metodología de optimización combinatorial llamada Algoritmo Genético que permite diseñar unidades geográficas formadas por códigos postales maximizando la autocontención de los trabajos (número de trabajos ocupados por residentes del área y número de residentes que trabajan en misma área) en las áreas generadas. Con los SLT en los formados para los dos años de la muestra es posible compararlos para examinar su evolución de cada uno resumida en cuatro variables lo que nos permite clasificarlos como áreas que pasan de áreas con excedentes de empleo a áreas deficitarias, o viceversa. La evidencia indica un aumento de la movilidad, la conversión de mercados excedentes en empleo a mercados deficitarios. Estas tendencias dan paso a áreas funcionales más amplias y niveles más bajos de autocontención que se reflejan en la duración del viaje al trabajo. Esto impacta en la calidad de vida, la cohesión social y la sostenibilidad de los territorios.

Palabras clave: *Algoritmo Genético, Movilidad Humana, Empleo*

1. Introducción

Las áreas denominadas Sistemas Locales de Trabajo (SLT) son entidades geográficas definidas para servir como marco territorial para diseñar, implementar y monitorear políticas efectivas del mercado laboral y operaciones estadísticas a niveles subnacionales. El éxito de estas políticas clave depende crucialmente de la idoneidad de la delimitación de las SLT. Según el código de buenas prácticas establecido por Eurostat (Flórez-Revuelta 2009) para guiar la selección de un procedimiento específico, la geografía de los SLT resultantes debe estar conformada por áreas disjuntas que cubran de manera exhaustiva un territorio determinado, caracterizadas por un alto grado de autocontención en términos de viajes al trabajo (es decir, la mayoría de los trabajadores en una SLT específica deben vivir en esa área y la mayoría de los residentes empleados de la SLT también deberían trabajar localmente), y relativamente homogéneo en el tamaño de la población (que excede una restricción de tamaño mínimo, por ejemplo) . El problema es, por tanto, la agrupación de unidades espaciales básicas (UEB) -como distritos, municipios o condados- en áreas funcionales de modo que la proporción de trabajadores que cruzan sus fronteras en su viaje al trabajo sea baja, mientras que el número de áreas

[1*]Autor para la correspondencia. E-mail: CARONTE4509@YAHOO.COM

ISSN 2448 – 7945

definidas sea bajo (Flórez-Revuelta 2008). Este problema es análogo a un problema de partición de gráficos (PPG) donde se desconoce el número óptimo k de particiones y se relaja o elimina el requisito de homogeneidad de tamaño, por lo que se espera que sea al menos tan difícil como el PPG estándar. Por tanto, no es posible una solución exhaustiva del problema. Por lo que se emplea una metodología que no evalúa exhaustivamente todas las combinaciones posibles de municipios, sino que va explorando las combinaciones en base al incremento de la función objetivo y va conservando a lo largo del proceso la solución que va generando esa mejora. Esa metodología se conoce como Algoritmo Genético.

1.1. Algoritmo Genérico

Un algoritmo genético es un modelo computacional de evolución biológica. Los algoritmos genéticos son útiles tanto como métodos de búsqueda para resolver problemas como para modelar sistemas evolutivos. En los algoritmos genéticos, las cadenas binarias se almacenan en la memoria de una computadora y con el tiempo se modifican de manera muy similar a como las poblaciones de individuos evolucionan bajo la selección natural. Aunque el entorno computacional está muy simplificado en comparación con el mundo natural, los algoritmos genéticos son capaces de desarrollar estructuras sorprendentemente complejas e interesantes. Estas estructuras, llamadas individuos, pueden representar soluciones a problemas, estrategias para jugar, imágenes visuales o programas de computadora.

Los algoritmos genéticos se basan libremente en ideas de la genética de poblaciones. Primero, se crea aleatoriamente una población de individuos. En el caso más simple, cada individuo es una cadena de bits y puede considerarse como una solución candidata para algún problema de interés. Las variaciones entre los individuos de la población dan como resultado que algunos individuos sean más aptos que otros (ej., mejores soluciones a los problemas). Estas diferencias se utilizan para sesgar la selección de un nuevo conjunto de soluciones candidatas en el siguiente paso de tiempo, lo que se denomina selección. Durante la selección, se crea una nueva población haciendo copias de los individuos más exitosos y eliminando los menos exitosos. Sin embargo, las copias no son exactas. Existe una probabilidad de mutación (cambios de bits aleatorios), cruce (ex-cambio de subcadenas correspondientes entre dos individuos), u otros cambios en la cadena de bits durante la operación de copia. Al transformar el conjunto anterior de individuos buenos en uno nuevo, las operaciones de mutación y cruce generan un nuevo conjunto de individuos, o muestras, que idealmente tienen una probabilidad mayor que la media de ser también buenos.

2. Metodología o desarrollo

2.1 Datos

Utilizamos como caso de estudio los datos de desplazamiento de los trabajadores de los censos de 2011 y 2021, elaborados por el INE (Instituto Nacional de Estadística).

ISSN 2448 – 7945

Ambos censos permiten examinar en detalle un conjunto de características de los trabajadores (género, ocupación,etc.). También nos permiten abordar la movilidad considerando la desagregación de la población general por lo que es posible enfocarse en el grupo de este estudio. Debido a que el censo se realiza periódicamente (cada 10 años), es posible detectar cambios o evoluciones generales en la información. En este caso de estudio. Los viajeros de cada estrato trazan SLT tanto para 2011 como para 2021, que luego se clasifican en SLT que cambian de áreas excedentes en puestos de trabajo a áreas deficitarias o viceversa, debido a la variación de trabajadores, puestos de trabajo y dos índices de autocontención.

2.2 El Modelo Matemático

Definir las variables:

F_{ij} cantidad de flujo de trabajadores entre los municipios i y j $(i,j = 1,2,\dots,M)$.

C_{ij} costo de traslado de trabajadores entre las ubicaciones (centros de los municipios) i y j $(i,j = 1,2,\dots,M)$.

D_{ij} distancia rectilínea entre las ubicaciones (centros de los municipios) i y j $(i,j = 1,2,\dots,M)$.

Para la ecuación:

$$C = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} F_{ij}C_{ij}D_{ij} \qquad (1)$$

2.3 Operador de cruce (transversal)

La probabilidad de cruce $p(t)$ es la probabilidad de aplicar el operador de cruce a ciertos cromosomas. El resto de los cromosomas producirá cromosomas descendientes, idénticos a sus padres. De lo contrario, los cromosomas seleccionados para cruzar se cruzarán para producir dos cromosomas descendientes utilizando el operador de cruce. Considere un par de cromosomas parentales (P_1,P_2) que se muestran a continuación:

P_1	1	4	7	5	2	8	3	6	9
P_2	4	1	6	7	5	2	9	3	8

Primero, seleccione dos números aleatorios para alinearlos con la cadena de los padres. Suponga que los dos números aleatorios en este ejemplo son el 4to y el 7to. Los genes con bordes de doble línea dentro de la sección de corte, es decir (5,2,8,3) en P_1 y (7,5,2,9) en P_2, se intercambian para que una parte de los códigos genéticos de P_1 se transfiera a P_2, y viceversa. Las estructuras de los cromosomas resultantes se convierten en:

ISSN 2448 – 7945

P_1^-	1	4	7	7	5	2	9	6	9
P_2^-	4	1	6	5	2	8	3	3	8

En esta etapa, se encuentran varios genes en más de una posición en los cromosomas resultantes. (por ejemplo, 7, 9 en P_1^-; y 3, 8 en P_2^-). Esto significaría que un municipio representa más de una posición y tiene más de una ubicación en el plan de diseño. Un procedimiento de reemplazo hacia atrás puede ser implementado para cambiar los valores de esos genes repetidos fuera de la sección de corte de P_1^- pueden reemplazarse cambiando 7 en el tercer gen por 5, ya que el gene 5 en P_1 se produce mediante el intercambio de gen 7 en P_2. El gen 5 está también repetido en P_1^- en la sección de corte. Por lo tanto, este gen cambia de nuevo a 2. El gen 9 en P_1^- también puede ser cambiado por el gen 3 para obtener la descendencia c_1. Los genes repetidos fuera de la sección de corte en P_2^- también pueden ser reemplazados cambiando el gen 8 por el 7 (el resultado combinado de cambiar de 8 a 2, 2 a 5 y 5 a 7) y el gen 3 a 9. Por lo tanto, la descendencia del cromosoma c_1 y c_2 será:

c_1	1	4	8	7	5	2	9	6	3
c_2	4	1	6	5	2	8	3	9	7

La sección de corte en el operador de cruce propuesto se selecciona aleatoriamente por dos genes en la cadena de caracteres. Si el cromosoma tiene genes de gran tamaño, la sección de corte difiere de pequeña a grande, lo que refleja la flexibilidad del enfoque. El algoritmo realiza la verificación después del primer paso de intercambiar la sección de corte en los padres para reemplazar la ubicación repetida fuera de la sección de corte en el cromosoma como se explicó anteriormente y el número de ubicaciones vacías en los cromosomas de la descendencia antes del cruce será el mismo después del cruce.

2.4 Operador Mutación

El operador de mutación se usa para reorganizar la estructura de un cromosoma. En este estudio, se utiliza la mutación de intercambio, que es simplemente seleccionar dos genes al azar e intercambiar sus contenidos. La probabilidad de mutar un solo gen se llama probabilidad de mutación $p_{(m)}$, que generalmente es un número pequeño. La mutación ayuda a aumentar el poder de búsqueda. Para explicar la necesidad de la mutación, considere el caso en que la reproducción o el cruce no pueden producir una buena solución a un problema. Durante la creación de una generación, es posible que a toda la población de cadenas le falte un gen vital de información que sea importante para determinar la solución correcta u óptima (por ejemplo, solo necesita intercambiar un gen con otro gen). Las generaciones futuras que se crearían usando reproducción y cruce no podrían aliviar este problema. Aquí, la mutación se vuelve importante.

ISSN 2448 – 7945

2.4 Criterio de parada

El programa finaliza cuando se alcanza el número máximo de generaciones o hasta que converge la población.

3. Resultados y análisis

Tabla 1. Indices de movilidad por estrato por año

	Censo 2021		Censo 2011	
	Auto-Contención de la Oferta	Auto-Contención de la Demanda	Auto-Contención de la Oferta	Auto-Contención de la Demanda
Estrato:	Promedio	Promedio	Promedio	Promedio
Mujeres	82.1%	83.9%	90.6%	88.7%
Hombres	73.9%	78.1%	86.1%	85.6%

Fuente: Elaboración Propia a partir de Censos de Población 2011 y 2021; Instituto Nacional de Estadística, España.

Encontramos que hay zonas con una importante oferta de empleo que tienen la capacidad de atraer flujos de trabajadores de las zonas aledañas. Las áreas que muestran un déficit de empleos podrían recibir ayuda con políticas y asignación de recursos. El segmento con menor propensión a viajar es el segmento Femenino (Tab. 1). Este comportamiento se evidencia en los niveles de autocontención (tanto de la oferta como de la demanda) de los MLL formados únicamente por trabajadoras, que son superiores a los de los hombres en ambos años, lo que indica que los SLT formados por trabajadoras son más cerrados en términos de salidas y las entradas y que la interacción funcional con otros SLT es menor para las mujeres que para los hombres. Esto indica que un mayor porcentaje de trabajadoras residen dentro de la misma MLL que los trabajadores varones. Una posible explicación es que el viaje al trabajo está más influenciado por las preferencias profesionales de las mujeres que de los hombres, lo que respalda hallazgos previos sobre este tema en la literatura (Hansen 2015). Hansen (2015) señala que existen diferencias de género en cuanto a la elección del lugar de trabajo, debido a que las mujeres están más influenciadas por las preferencias profesionales; el contenido del trabajo es importante y motiva la movilidad de la mano de obra altamente calificada.

Se muestra aumento de los flujos intermunicipales en todo el territorio, lo que apunta a un aumento global de la movilidad, dando paso a áreas funcionales más amplias (Fig. 1) y menores niveles de autocontención reflejados en la duración del viaje al

ISSN 2448 – 7945

trabajo. Esto impacta en la calidad de vida, la cohesión social y la sostenibilidad de los territorios.

Figura 1.- Comportamiento de los SLT_i in 2011-2021 (Segmento Femenino)



Fuente: Elaboración Propia a partir de Censos de Población 2001 y 2011; Instituto Nacional de Estadística, España.

4. Conclusiones

Por ello, es necesario incentivar la formación de asociaciones intermunicipales para gobernar estos espacios funcionales plurimunicipales a través de la coordinación de los gobiernos locales (Zoltners 1983). Para potenciar dicha coordinación son necesarios programas y fondos especiales, así como la continuación de los fondos y programas existentes que apuntan a resolver problemáticas conjuntas. En este esfuerzo, las delimitaciones funcionales solo son útiles para la formulación de políticas si superan claramente a las delimitaciones administrativas, y deben exhibir similitudes funcionales y ser coherentes con medidas particulares relacionadas con la economía y el mercado laboral.

El creciente problema del aumento de la movilidad se puede abordar mediante políticas que se centren en varias áreas. Por ejemplo, la movilidad puede abordarse a través de políticas enfocadas en ubicar las viviendas y los lugares de trabajo a distancias fácilmente recorridas por medios de transporte alternativos como la bicicleta o el transporte público, limitando la posterior urbanización de las zonas rurales. Concentrar geográficamente las funciones de vivienda y trabajo a través de la

ISSN 2448 – 7945

promoción del Desarrollo Orientado al Tránsito (TOD) que significa construir edificios de viviendas de alta densidad, lugares de trabajo, servicios y tiendas cerca de las estaciones del sistema de transporte masivo (Plane 2003).

También es importante la construcción de instalaciones y servicios de transporte adecuados (Farmer 2011), la flexibilidad del tiempo de trabajo y la disponibilidad de servicios complementarios como el cuidado de los niños (Forrest 1996). Además, las condiciones favorables del mercado de la vivienda representan un factor importante en la reducción de la movilidad. Finalmente, la expansión del teletrabajo puede considerarse una innovación tecnológica y organizativa para disminuir la movilidad.

En general, se observa un aumento de la movilidad como consecuencia de la disminución de la autocontención entre 2011 y 2021, como se muestra en la disminución de los índices de oferta y demanda de las trabajadoras.

Además, debido a la desagregación de la base de datos utilizada en nuestra investigación, podemos ver cuál de los subgrupos y en qué regiones se necesita más ayuda, lo que permite soluciones políticas enfocadas que podrían tener implicaciones por subgrupo y región. Por ejemplo, en grupos más susceptibles al desempleo (como trabajadores no calificados y trabajadores más jóvenes), este documento ayuda a explicar la estructura de sus SLT.

5. Índice de referencias

Farmer & Fotheringham 2011 Network-Based Functional Regions. Environment and Planning A: Economy and Space

Forrest, S. (1996). Genetic algorithms. ACM computing surveys (CSUR), 28(1), 77-80.

Flórez-Revuelta, F., Casado-Díaz, J. M., & Martínez-Bernabeu, L. (2009, May). Adaptive evolutionary algorithms for the delineation of local labour markets. In 2009 IEEE Congress on Evolutionary Computation (pp. 2354-2360). IEEE.

Flórez-Revuelta, F., Casado-Díaz, J. M., Martínez-Bernabeu, L., & Gómez-Hernández, R. (2008). A memetic algorithm for the delineation of local labour markets. In Parallel Problem Solving from Nature–PPSN X: 10th International Conference, Dortmund, Germany, September 13-17, 2008. Proceedings 10 (pp. 1011-1020). Springer Berlin Heidelberg

Hansen, K. E. H. (2015). Labour mobility in the public sector: The impact of job opportunities. Geografisk Tidsskrift-Danish Journal of Geography, 115(2), 133–141. doi: 10.1080/00167223.2015.1080623

ISSN 2448 – 7945

Plane & Heins 2003 Age articulation of U.S. inter-metropolitan migration flows. The Annals of Regional Science, 37(1), 107–130. doi: 10.1007/s001680200114

Zoltners, A. A., & Sinha, P. (1983). Sales Territory Alignment: A Review and Model. Management Science, 29(11), 1237–1256. doi: 10.1287/mnsc.29.11.1237

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

INTRODUCCIÓN SOBRE DIFERENTES ENFOQUES DE REDES NEURONALES ARTIFICIALES

García León Omar[1*], Pineda Becerril Miguel de Nazareth[2], López Salazar Leonel Gualberto[3], Ramírez Montes Pedro Ívan[4] y Flores Pérez Judith Mayte[5]
[1,2,3,4,5]*Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. A Teoloyucan Km 2.5, San Sebastian Xhala, 54714 Cuautitlán Izcalli, México.*

EN-POSM057

Resumen

Una Red Neuronal Artificial (RNA) es un modelo matemático que intenta simular la estructura y funcionalidades de redes neuronales biológicas. El componente básico de toda red neuronal artificial es la neurona artificial, es decir, un modelo matemático simple (función). Este modelo tiene tres conjuntos simples de reglas: multiplicación, suma y activación. En la entrada de la neurona artificial, las entradas se ponderan, lo que significa que cada valor de entrada se multiplica por un peso individual. En la sección central de la neurona artificial se encuentra la función de suma que suma todas las entradas ponderadas y los sesgos. A la salida de la neurona artificial, la suma de las entradas y el sesgo previamente ponderados pasa a través de una función de activación que también se denomina función de transferencia.

Palabras clave: *Redes Neuronales, Perceptron, Inteligencia Artificial*

1. Introducción

El aprendizaje de maquina han surgido de las Red Neural Artificial (RNA). Este nuevo campo del aprendizaje automatizado ha crecido rápidamente y ha sido aplicado a la mayoría de los dominios de aplicaciones tradicionales, así como a algunas áreas nuevas que presentan más oportunidades. Estos modelos de pueden superar con creces el rendimiento de formas anteriores de inteligencia artificial en tareas comunes de aprendizaje de máquina. Los resultados muestran un rendimiento de vanguardia utilizando el aprendizaje profundo en comparación con los enfoques tradicionales de aprendizaje automático en los campos del procesamiento de imágenes, visión por computadora, reconocimiento de voz, traducción automática, arte, imágenes médicas, procesamiento de información médica, robótica y control, bioinformática, procesamiento del lenguaje natural, ciberseguridad, etc. Una de las formas de arquitectura RNA es la de la red neuronal convolucional (RNC) (Bottou 2012). Las RNC se utilizan principalmente para resolver tareas de reconocimiento de patrones basadas en imágenes y ofrecen un método simplificado para comenzar con las RNA. Esta es una introducción los fundamentos de las RNA y el aprendizaje automático.

En 1943, McCulloch y Pitts modelaron una neurona como un interruptor que recibe información de otras neuronas y, dependiendo de la información ponderada total, se

[1] *Autor para la correspondencia. E-mail: CARONTE4509@YAHOO.COM

ISSN 2448 – 7945

activa o permanece inactiva. El peso por el que se multiplica una entrada de otra célula corresponde a la fuerza de una sinapsis: los contactos neuronales entre las células nerviosas. Estos pesos pueden ser tanto positivos (excitadores) como negativos (inhibidores). En la década de 1960, se demostró que las redes de tales neuronas modelo tienen propiedades similares a las del cerebro: pueden realizar patrones sofisticados reconocimiento de términos, y pueden funcionar incluso si algunas de las neuronas están destruidas. La demostración, en particular por parte de Rosenblatt, de que redes simples de tales neuronas modelo llamadas 'perceptrones' podían aprender de ejemplos estimuló el interés en el campo, pero después de que Minsky y Papert1 demostraran que los perceptrones simples sólo podían resolver la clase muy limitada de problemas linealmente separables. problemas (ver más abajo), la actividad en el campo disminuyó. No obstante, el método de retropropagación de errores, que puede hacer que redes bastante complejas de neuronas simples aprendan de ejemplos, demostró que estas redes podían resolver problemas que no eran separables linealmente. NETtalk, una aplicación de una red neuronal artificial para la lectura automática de texto, fue una de las primeras aplicaciones ampliamente conocidas3, y muchas le siguieron poco después. En el campo de la biología, también se aplicó exactamente el mismo tipo de red que en NETtalk para la predicción de la estructura secundaria de proteínas; de hecho, algunos de los mejores predictores siguen utilizando esencialmente el mismo método. Comenzó otra gran ola de interés en las redes neuronales artificiales, que generó un gran revuelo sobre las máquinas mágicas de aprendizaje y pensamiento (Arulkumaran 2017).

2. Metodología o desarrollo

2.1 Redes neuronales artificiales de retroalimentación

La red neuronal artificial con topología de retroalimentación se denomina red neuronal artificial Feed-Forward y, como tal, solo tiene una condición: la información debe fluir de la entrada a la salida en una sola dirección, sin bucles de retroceso. No hay limitaciones en cuanto al número de capas, el tipo de función de transferencia utilizada en cada neurona artificial o el número de conexiones entre neuronas artificiales individuales (Hornik 1989). La red neuronal artificial de retroalimentación más simple es un perceptrón único que solo es capaz de aprender problemas lineales separables. La red neuronal artificial de retroalimentación simple puede conducir a descripciones matemáticas relativamente largas donde los parámetros de las redes neuronales artificiales se optimizan y se resuelven problemas mediante mano no es práctico. Aunque la descripción analítica se puede utilizar en cualquier red neuronal artificial compleja, en la práctica utilizamos computadoras y software especializado que pueden ayudarnos a construir, describir matemáticamente y optimizar cualquier tipo de red neuronal artificial.

2.2 Redes neuronales artificiales recurrentes

ISSN 2448 – 7945

La red neuronal artificial con topología recurrente se denomina red neuronal artificial recurrente. Es similar a la red neuronal de retroalimentación sin limitaciones en cuanto a los bucles de retroceso. En estos casos la información ya no se transmite sólo en una dirección sino que también se transmite hacia atrás. Esto crea un estado interno de la red que le permite exhibir un comportamiento temporal dinámico. Las redes neuronales artificiales recurrentes pueden utilizar su memoria interna para procesar cualquier secuencia de entradas.

La topología más básica de una red neuronal artificial recurrente es una red artificial completamente recurrente donde cada bloque de construcción básico (neurona artificial) está conectado directamente a todos los demás bloques de construcción básicos en todas las direcciones. Otras redes neuronales artificiales recurrentes como Hopfield, Elman, Jordan, bidireccionales y otras redes son solo casos especiales de redes neuronales artificiales recurrentes.

2.3 Red neuronal artificial de Hopfield

Una red neuronal artificial Hopfield es un tipo de red neuronal artificial recurrente que se utiliza para almacenar uno o más vectores objetivo estables. Estos vectores estables pueden verse como memorias que la red recuerda cuando se le proporcionan vectores similares que actúan como una señal para la memoria de la red. Estas unidades binarias solo toman dos valores diferentes para sus estados que están determinados por si la entrada de las unidades excede o no su umbral. Las unidades binarias pueden tomar valores de 1 o -1, o valores de 1 o 0. En consecuencia, existen dos definiciones posibles para la activación de unidades binarias.

Al hablar de conexiones, debemos mencionar que existen dos restricciones típicas: ninguna unidad tiene una conexión consigo misma y que las conexiones son simétricas.

Normalmente se utiliza el requisito de que los pesos deben ser simétricos, ya que garantizará que la función de energía disminuya monótonamente mientras se siguen las reglas de activación. Si se utilizan pesos no simétricos, la red puede exhibir algún comportamiento periódico o caótico. Entrenar una red neuronal artificial de Hopfield implica reducir la energía de los estados que la red neuronal artificial debe recordar.

2.4 Redes neuronales artificiales de Elman y Jordan

La red de Elman, también conocida como red recurrente simple, es un caso especial de redes neuronales artificiales recurrentes. Se diferencia de las redes convencionales de dos capas en que la primera capa tiene una conexión recurrente. Es una red neuronal artificial simple de tres capas que tiene un bucle inverso desde la capa oculta hasta la capa de entrada a través de la llamada unidad de contexto (Specht 1988) . Este tipo de red neuronal artificial tiene memoria que le permite detectar y generar patrones que varían en el tiempo.

ISSN 2448 – 7945

La red neuronal artificial de Elman tiene neuronas artificiales típicamente sigmoideas en su capa oculta y neuronas artificiales lineales en su capa de salida. Esta combinación de funciones de transferencia de neuronas artificiales puede aproximarse a cualquier función con precisión arbitraria si solo hay suficientes neuronas artificiales en la capa oculta. Al ser capaz de almacenar información, la red neuronal artificial de Elman es capaz de generar patrones temporales así como patrones espaciales y respondiendo sobre ellos. La red Jordan es similar a la red Elman. La única diferencia es que las unidades de contexto se alimentan desde la capa de salida en lugar de la capa oculta.

2.5 Memoria a largo plazo

La memoria a corto plazo es una de las topologías recurrentes de las redes neuronales artificiales. A diferencia de las redes neuronales artificiales recurrentes básicas, puede aprender de su experiencia para procesar, clasificar y predecir series temporales con desfases muy largos de tamaño desconocido entre eventos importantes. Esto hace que la memoria a largo plazo supere a otras redes neuronales artificiales recurrentes, modelos ocultos de Markov y otros métodos de aprendizaje de secuencias. La red neuronal artificial de memoria a corto plazo se construye a partir de bloques de memoria a corto plazo que son capaces de recordar valores durante cualquier período de tiempo (Specht 1990). Esto se logra con puertas que determinan cuándo la entrada es lo suficientemente significativa como para recordarla, cuándo continuar recordándola u olvidándola y cuándo generar el valor.
La arquitectura del bloque de memoria a largo plazo, donde la capa de entrada consta de unidades sigmoideas. La neurona superior en la capa de entrada procesa el valor de entrada que podría ser enviado a una unidad de memoria depende del valor calculado de la segunda neurona desde la parte superior de la capa de entrada. La tercera neurona desde arriba en la capa de entrada decide cuánto tiempo la unidad de memoria mantendrá (recordará) su valor y la neurona más inferior determina cuándo el valor de la memoria debe liberarse a la salida. Las neuronas en la primera capa oculta y en la capa de salida realizan una multiplicación simple de sus entradas y una neurona en la segunda capa oculta calcula una función lineal simple de sus entradas. La salida de la segunda capa oculta se retroalimenta a la entrada y a la primera capa oculta para ayudar a tomar decisiones.

2.6 Redes neuronales artificiales bidireccionales (Bi-RNA)

Las redes neuronales artificiales bidireccionales están diseñadas para predecir series temporales complejas. Consisten en dos (sub)redes neuronales artificiales individuales interconectadas que realizan una transformación directa e inversa (bidireccional). La interconexión de subredes neuronales artificiales se realiza a través de dos neuronas artificiales dinámicas que son capaces de recordar sus estados internos. Este tipo de interconexión entre valores pasados y futuros de las señales procesadas aumenta las capacidades de predicción de series temporales. Como tales, estas redes neuronales

ISSN 2448 – 7945

artificiales no sólo predicen valores futuros de los datos de entrada sino también valores pasados. Eso trae la necesidad de un aprendizaje en dos fases; en la primera fase enseñamos una subred neuronal artificial para predecir el futuro y en la segunda fase enseñamos una segunda subred neuronal artificial para predecir.

3. Resultados y análisis

Operacionalmente, la ventaja más importante de la red neuronal probabilística es que el entrenamiento es fácil e instantáneo, puede usarse en tiempo real porque tan pronto como se ha observado un patrón que representa cada categoría, la red puede comenzar a generalizarse. a nuevos patrones. A medida que se observen y almacenen patrones adicionales en la red, la generalización mejorará y el límite de decisión puede volverse más complejo.

Otra ventaja práctica de la red propuesta es que, a diferencia de muchas redes, funciona completamente en paralelo sin necesidad de retroalimentación de las neuronas individuales a las entradas. Para sistemas que involucran miles de neuronas (demasiadas para caber en un solo chip semiconductor), dichas rutas de retroalimentación excederían rápidamente la cantidad de pines disponibles en un chip. Sin embargo, con la red, se podría conectar cualquier número de chips en paralelo a las mismas entradas si solo se ejecutan fuera del chip las sumas parciales de las unidades de suma. Sólo habría dos sumas parciales por cada bit de salida.

Se ha demostrado que la forma exacta de la función de activación no es crítica para la efectividad de la red. Este hecho será importante en el diseño de redes neuronales analógicas o híbridas en las que la función de activación se implemente con componentes analógicos.

La red neuronal probabilística propuesta aquí puede, con variaciones, usarse para mapeo, clasificación, memoria asociativa o para estimar directamente probabilidades a posteriori.

Otras características de esta red son: 1) La forma de las superficies de decisión se puede hacer tan compleja como sea necesario, o tan simple como se desee, mediante la elección adecuada del parámetro de suavizado U. 2) Las superficies de decisión pueden acercarse al óptimo de Bayes. 3) Tolera muestras erróneas. 4) Funciona para muestras escasas. 5) Es posible hacer que U sea más pequeño a medida que n crece sin necesidad de volver a entrenar. 6) Para estadísticas que varían en el tiempo, los patrones antiguos se pueden sobrescribir con patrones nuevos.

4. Conclusiones

El descenso de gradiente estocástico y sus variantes son técnicas versátiles que han demostrado ser invaluables como algoritmos de aprendizaje para grandes conjuntos de datos. El mejor consejo para una aplicación exitosa de estas técnicas es (i) realizar

ISSN 2448 – 7945

experimentos a pequeña escala con subconjuntos de datos de entrenamiento y (ii) prestar una atención implacable a la exactitud del cálculo del gradiente.

A pesar de los éxitos de las redes neuronales artificiales, es necesario abordar muchos problemas antes de que estas técnicas puedan aplicarse a una amplia gama de problemas complejos del mundo real. Aunque las redes neuronales artificiales ya se ha combinado con técnicas de IA, como la búsqueda y la planificación, una integración más profunda con otros enfoques tradicionales de IA promete beneficios como una mejor complejidad. Con el tiempo, también esperamos que nuestra comprensión teórica de las propiedades de las redes neuronales mejorará, ya que actualmente está muy por detrás de la práctica.

Para concluir, vale la pena revisar el objetivo general de toda esta investigación: la creación de sistemas de IA de propósito general que puedan interactuar con el mundo que los rodea y aprender de él. La interacción con el medio ambiente es al mismo tiempo la ventaja y la desventaja. Si bien existen muchos desafíos al tratar de comprender nuestro mundo complejo y en constante cambio, nos permite elegir cómo lo exploramos. De hecho, dota a los agentes de la capacidad de realizar experimentos para comprender mejor su entorno.

5. Índice de referencias

Arulkumaran, K., Deisenroth, M. P., Brundage, M., & Bharath, A. A. (2017). A brief survey of deep reinforcement learning. arXiv preprint arXiv:1708.05866.

Bottou, L. (2012). Stochastic gradient descent tricks. In Neural Networks: Tricks of the Trade: Second Edition (pp. 421-436). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Hornik, K., Stinchcombe, M., & White, H. (1989). Multilayer feedforward networks are universal approximators. Neural networks, 2(5), 359-366.

Specht, D. F. (1988, July). Probabilistic neural networks for classification, mapping, or associative memory. In ICNN (pp. 525-532).

Specht, D. F. (1990). Probabilistic neural networks. Neural networks, 3(1), 109-118

ISSN 2448 – 7945

LA RAÍZ CUADRADA Y SU UTILIDAD "FINAL"

Gaitán Lozano Ricardo[1] y Rivera Rebolledo José Manuel[2]

[1] *Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, Campo 1, Universidad Nacional Autónoma de México.*

[2] *Instituto Politécnico Nacional. Edificio 9, Unidad Profesional "Adolfo López Mateos", 07738, Ciudad de México, México.*

EN-POSM062

Resumen

En los diferentes desarrollos que involucran operaciones con la raíz cuadrada (rc), la mayoría de los libros de texto acostumbran a mantener su símbolo durante varios pasos matemáticos consecutivos, y sólo hasta el final aquél desaparece al extraer la raíz cuadrada como tal. El objetivo es lograr que los estudiantes vean que las rc se pueden aplicar sólo al final de desarrollos, en la metodología de funciones algebraicas, derivación, integración y operadores de subida y de bajada de momento angular, de lo cual concluimos que con el uso indiscriminado de las rc se desvía la atención de lo esencial, recomendándose un uso más moderado y "racional" de las mismas. El símbolo resulta en ocasiones incluso extendido, tanto en lo largo como en lo "ancho", con numeradores y denominadores un tanto complicados que incluyen diversas unidades, lo cual embroma la tarea. En este trabajo se muestran algunas operaciones donde se evita el uso de la raíz cuadrada, y sólo al final es cuando se aplica.

Palabras clave: *Raíz_1, utilidad_2.*

1. Introducción

Un ejemplo muy sencillo y de la vida diaria de la aplicación de la rc raíz cuadrada es por ejemplo el de una habitación o local con una superficie de 16 m^2, que equivale a un cuadrado de $4\,m$ de lado, pero si la superficie ahora es de $20\,m^2$, entonces se impone la extracción de la raíz cuadrada (rc); análogamente en el caso de una piscina circular de $A = 64m^2 \approx 3r^2$, $r^2 \approx 20\,m^2$, o $r \approx 4.5\,m$, lo que nos da un diámetro aproximado para la piscina de $9\,m$, y para ello es necesario extraer la rc. De lo anterior vemos que es posible encontrar ejemplos sencillos que nos muestran la utilidad práctica de la rc, de la cual no es raro que se nos cuestione en dónde se puede aplicar, y no pocas veces damos respuestas más complejas que lo que hacen es confundir.

En este trabajo nuestro objetivo principal es el de lograr que los lectores, en particular los estudiantes, adquieran un panorama general de diversas situaciones en las que la

[1] * *José Manuel Rivera Rebolledo. E-mail: riverareb7@gmail.com, jriverare@ipn.mx Tel: 19-19-28-47 Fax: 72-9 5-50-15*

ISSN 2448 – 7945

rc juega un papel preponderante más bien hasta el final de los desarrollos, e incluso ahí es posible evitarla calculando directamente su valor ya que se avanzó en los cálculos esenciales, como en los ejemplos de arriba. Los autores agradecen el apoyo al Sistema Nacional de Investigadores, SNI, México; el primer autor agradece al "Programa de Cátedras de Investigación de la FES Cuautitlán CI2208"; asimismo, el segundo autor agradece apoyo del Proyecto SIP: 20232671: Extensiones del Modelo Estándar con simetría entre familias.

2. Metodología o desarrollo

Los siguientes son algunos ejemplos que muestran cómo se usa normalmente la raíz cuadrada, y la forma en que se pueden ser reescritos sin necesidad de su uso repetido;

1. En (Resnick, 2007, pag. 189) ejemplo 4.5 de tiro parabólico, la velocidad final del objeto justo antes de chocar contra el suelo, con velocidades finales en x y y de

$$\textbf{Ecuación 1}.\ (v_{xf}, v_{yf}) = (17.3, -31.4)\,\frac{m}{s},$$

resulta ser

$$\textbf{Ecuación 2}.\ v_f = \sqrt{{v_{xf}}^2 + {v_{yf}}^2} = \sqrt{(17.3)^2 + (-31.4)^2}\,\frac{m}{s} = 35.5\,\frac{m}{s},$$

ahora expresadas como

$$\textbf{Ecuación 3}.\ {v_f}^2 = {v_{xf}}^2 + {v_{yf}}^2 = [(17.3)^2 + (-31.4)^2]\,\frac{m^2}{s^2},$$

$${v_f}^2\,\frac{s}{m^2}^2 \approx 300 + 986 = 1{,}286$$

$$\textbf{Ecuación 4}.\ \therefore {v_f}^2 = 1{,}286\,\frac{m^2}{s^2}\ \ y\ \ v_f = 35.8\,\frac{m}{s},$$

cf. ec. (2).

2. También, en ejemplo 14.8 de (Resnick, 2007, pg. 442), se calcula la velocidad de escape de la Tierra T como a continuación se detalla:

$$\textbf{Ecuación 5}.\ v_{esc} = \sqrt{\frac{2}{R_T}GM_T} = \sqrt{\frac{2}{6.37x10^6 m}(6{,}67\ x\ 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2})(5.98x10^{24}kg)}$$
$$= 1.12x10^4\,\frac{m}{s},$$

que rescatamos como:

ISSN 2448 – 7945

$$\textbf{Ecuación 6}.\ v_{esc}^2 = \frac{2}{R_T} GM_T \approx \frac{2}{6.4x10^6 m}\left[\left(6.7x10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\right)6x10^{24}kg\right]$$

$$\approx 10^{-17}\frac{Nm^2}{kg}x12\ x\ 10^{24} \approx 10^{+8}\frac{m^2}{s^2},$$

esto es

$$\textbf{Ecuación 7}.\ v_{esc}^2 \approx 10^{+8}\frac{m^2}{s^2},\ \therefore\ v_{esc} \approx 10^4\frac{m}{s},$$

donde queda evidente que la rc se aplica en la parte final del cálculo, además de que se trabaja esencialmente con los órdenes de magnitud, y los resultados de las ecs. (6) y (7) no difieren mayormente.

3. En (Resnick, 2007, pag. 920) el ejemplo 29.7, pide obtener la velocidad que adquiere un electrón de un haz de electrones cuando éste es acelerado desde $v_0 = 0$ por medio de una diferencia de potencial de

$$\textbf{Ecuación 8}.\ \Delta V = 350\ V,$$

De la ec. (8), la energía cinética T proporcionada por el trabajo ΔW es:

$$\textbf{Ecuación 9}.\ T = \Delta W,\ \ \frac{1}{2}m_{0e}v^2 = |e|\Delta V,$$

$$\textbf{Ecuación 10}.\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m_{0e}}|e|\Delta V} = \sqrt{\frac{2(1.6x10^{-19}C)}{9.11x10^{-31}k}(350\ V)} = 1.11\ x10^7\frac{m}{s},$$

confrontado con

$$\textbf{Ecuación 11}.\ v^2 = \frac{2}{m_{0e}}|e|\Delta V \approx \frac{2}{10^{-30}k}(1.6x10^{-19}C)(350\ V) = 1{,}120\ x\ 10^{+11}\frac{J}{k}$$

$$\textbf{Ecuación 12}.\ v^2 \approx\ 10^{14}\frac{N.m}{k}=10^{14}\frac{m^2}{s^2},\ \ v^2 \approx 10^{14}\frac{m^2}{s^2}\ \ v\ \approx 10^7\frac{m}{s},$$

donde se han agregado explícitamente las unidades.

4. En (Gutraeu & Savin, 2001, pag. 6) problema 7.4, dadas las velocidades relativistas

$$\textbf{Ecuación 13}.\ (u_x, u_y) = (0.6, 0.64)c,$$

la velocidad resultante es

$$\textbf{Ecuación 14}.\ u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{(0.6c)^2 + (0.64c)^2} = 0.85c,$$

que tiene la forma alternativa:

MEMORIAS DEL Congreso Internacional Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

Ecuación 15. $u^2 = u_x^2 + u_y^2 = (0.6c)^2 + (0.64c)^2,$

$$\frac{u^2}{c^2} = 0.36 + 0.4 = 0.76, \therefore\ u = 0.87c,$$

5. Otra aplicación de cómo se puede evitar la rc es el que comúnmente se encuentra en los libros de texto en la derivación de r^2, dada por

Ecuación 16. $r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$

y de aquí, con

Ecuación 17. $\partial_i = \frac{\partial}{x_i},$

Ecuación 18. $(\partial_i)r^2 = 2r\,[(\partial_i)r], i = 1,2,3,$

y **Ecuación 19.** $(\partial_i)r^2 = 2(x_i), \quad \therefore\ (\partial_i)r = \frac{x_i}{r},$

confrontado con la forma más usual:

Ecuación 20. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \partial_x r = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$

Ecuación 21. $\partial_y r = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \partial_z r = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$

6. De (Borowitz, 1973, pags. 258-259), en la normalización de las funciones de onda u_n del oscilador armónico lineal, manteniendo los pasos más esenciales, se tiene:

Ecuación 22. $1 = C_n^2 \int u_n^2\, dx = C_n^2 \sqrt{\frac{h}{mw}} \int u_n^2\, dQ = C_n^2 \sqrt{\frac{h}{mw}} \int \ldots dQ$

$$= \cdots \textbf{5 veces}\ C_n^2 \sqrt{\frac{h}{mw}} \int' \ldots dQ = C_n^2 \sqrt{\frac{h}{mw}}\, 2^n n! \sqrt{\pi},$$

de donde se despeja a C_n, después de llevar ocho veces al factor de rc; desde luego, la forma evidente de abreviar esta ecuación es haciendo

Ecuación 23. $\alpha^2 = \frac{h}{mw},$

y después:

Ecuación 24. $1 = C_n^2 \int u_n^2\, dx, \qquad \frac{1}{\alpha C_n^2} = \int u_n^2\, dQ = \cdots = 2^n n! \sqrt{\pi},$

ISSN 2448 – 7945

de donde se obtiene nuevamente C_n, y la rc aparece hasta el final a través de α, cf. la ec. (22).

7. En (Borowitz, 1973, pag. 205), cuando se trata la función de onda WKB en la región clásica II, dada por

$$\textbf{Ecuación 25}.\ \varphi_{II} = 2\sqrt{\lambda}\cos\left(\int \frac{dx}{\lambda} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{\lambda}\cos'(\dots)\ \textbf{5 veces},$$

con la alternativa obvia de pasar la rc $2\sqrt{\lambda}$ diviciendo a φ_{II} y ya no reinsertarla cinco veces como se señala.

8. En (Merzbacher, 1961, pag. 417), en el tratamiento de los operadores de subida y de bajada del momento angular J, esto es, $J_{\pm}$, con magnitud generada por el número cuántico j, se pueden introducir las definiciones:

$$\textbf{Ecuación 26}.\ (j^{+})^2 = j + m,\ \ (j^{-})^2 = j - m,\ \ (j^{-+})^2 = (j - m) + 1,$$

$$\textbf{Ecuación 27}.\ (j^{++})^2 = (j + m) + 1,$$

siendo m el número cuántico asociado a la componente z de J, y con ello se ajusta la forma de la rc, tal que

$$\textbf{Ecuación 28}.\ \sqrt{(j+m)[(j-m)+1]} = j^{+}j^{-+},$$

9. De (Merzbacher, 1961, pag. 361, se tiene la siguiente relación para los operadores mencionados, donde $|\lambda m>$ son estados propios de $J_{\pm}$:

$$\textbf{Ecuación 29}.\ J_{+}\left|\lambda m\right> = \sqrt{(j-m)[(j+m)+1]}\,\left|\lambda, m+1\right>,$$

que se puede reescribir utilizado (31) y (33) como

$$\textbf{Ecuación 30}.\ J_{+}|\lambda m> = j^{-}j^{++}|\lambda, m+1>,$$

sin necesidad de la rc explícita.

Similarmente:

$$\textbf{Ecuación 31}.\ J_{-}\left|\lambda m\right> = \sqrt{(j+m)[(j-m)+1]}\,\left|\lambda, m-1\right> \rightarrow j^{+}j^{-+}|\lambda, m-1>,$$

con la misma ventaja mencionada.

10. Finalmente, en (Arfken, 2005, pag. 655), las conocidas funciones $P_n^m(cos\theta)$ y $Y_n^m(\theta,\varphi)$, quedan expresadas en la notación de este trabajo como:

$$\textbf{Ecuación 32}.\ [P_n^m(cos\theta), Y_n^m(\theta,\varphi)] = A_{nm}\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ (-1)^m\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{im\varphi}\right]P_n^m,$$

ISSN 2448 – 7945

donde

$$\textbf{Ecuación 33}.\ A_{nm}^2 = (2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}, -n \le m \le n,$$

nuevamente evitando la rc que iría de manera explícita en el factor A_{nm} de la ec. (32).

11. También de (Arfken & Weber, 2005, pag. 656), Tabla 12.4, los valores para los primeros armónicos esféricos Y_n^m resultan ser:

n	0	1	1	1	2	2
m	0	1	0	-1	2	1
Y_n^m	α	$-\beta$	$\sqrt{2}\beta$	β	$\frac{\gamma}{2}$	$-\gamma$

si se utilizan las siguientes definiciones que nos ahorran varias rc:

$$\textbf{Ecuación 34}.\ \alpha^2 = \frac{1}{4\pi}, \quad \beta^2 = \frac{3}{8\pi} \text{ y } \gamma^2 = \frac{5}{24\pi}$$

3. Conclusiones

Lo anteriormente expuesto nos permite hacer las siguientes conclusiones: 1) por medio de las sugerencias emitidas en este trabajo, es a todas luces conveniente el evitar en lo posible las rc que en la mayoría de los casos no nos aporta conocimiento y por el contrario ocupa espacios con los símbolos inherentes. 2) El uso indiscriminado de las rc, es decir, con un cúmulo de repeticiones innecesarias, da como consecuencia que se pueda perder entendimiento o desviar la atención de lo realmente primordial en los tratamientos llevados a cabo. 3) Se recomienda por lo tanto un uso más moderado y "racional" de las rc, además del de algunas definiciones cuadráticas que las absorban o las incluyan de manera implícita, dejando su aplicación definitiva, y por lo tanto su utilidad efectiva, para el final de los cálculos.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo al Sistema Nacional de Investigadores, SNI, México; el primer autor agradece al "Programa de Cátedras de Investigación de la FES Cuautitlán CI2208"; asimismo, el segundo autor agradece apoyo del Proyecto SIP: 20232671: Extensiones del Modelo Estándar con simetría entre familias.

4. Referencias

- Halliday, D. & Resnick, R. (2007). *Fundamentals of Physics*. New York: John Wiley.

ISSN 2448 – 7945

- Gautreau, R. & Savin, W. (2001). *Física Moderna*. Ciudad de México: McGraw Hill
- Borowitz, S. (1973). *Fundamentos de Mecánica Cuántica.* Ciudad de México: Reverté.
- Merzbacher, E. (1961). *Quantum Mechanics*. New York: John Wiley.
- Arfken, G. & Weber, H. (2005). *Mathematical Methods for Physicists.* San Diego: Elsevier Academic Press.

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

TRANSFORMACIONES SEMIÓTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN LINEAL EN SECUNDARIA

José Gustavo Mote Ordoñez [1 *]
[1]*Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México. Ex Rancho Los Uribe, Santa Cruz Atzcapotzaltongo, C.P. 50290, Toluca, Estado de México.*

IP-POSM065

Resumen

El objetivo de la ponencia es analizar las transformaciones semióticas en la enseñanza de la función lineal en primer grado de secundaria, desde la Teoría de Registros de Representación Semiótica (Duval, 2004). Para ello, se realizó un estudio de caso con cuatro profesores del Estado de México, durante el ciclo escolar 2022-2023. Se realizaron grabaciones de las sesiones donde se enseñó el objeto matemático en cuestión, se transcribieron diálogos de los profesores y sus alumnos, haciendo énfasis en sus acciones al realizar transformaciones semióticas sobre la función lineal. Además, se implementó un cuestionario de conocimientos y una entrevista semiestructurada. De lo anterior, se han destacado diferentes tipos de secuencias de conversiones y tratamientos empleados por los profesores de matemáticas para coordinar diferentes representaciones del objeto matemático y permitir la identificación de sus elementos. Así mismo, de que no siempre se hace énfasis en los elementos del objeto. El análisis de la información reveló que las transformaciones semióticas en la enseñanza de la función lineal en primer grado de secundaria pueden ser enriquecidas desde la teoría de las representaciones semióticas para favorecer la coordinación de registros semióticos mediante la identificación de unidades significativas al interior de cada representación al momento de generar secuencias de conversión y favorecer la comprensión de dicho objeto matemático.

Palabras clave: *Función, lineal, transformaciones, semiótica, enseñanza, secundaria.*

1. Introducción

Cuando se enseña un objeto matemático se hace desde sus representaciones, más no desde los objetos mismos. Esta idea es compartida por autores como Duval (1994), Hitt (1998), National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000), Godino et al., (2003), D'Amore et al., (2013), quienes convergen en que los objetos matemáticos solo son accesibles a través de sus representaciones.

El NCTM (2000) menciona que "el término representación se refiere tanto al proceso como al producto; en otras palabras, al acto de capturar un concepto o relación matemática de alguna forma y a la forma misma" (p. 67). Tamayo Alzate (2006) expresa que las representaciones semióticas "hacen referencia a todas aquellas construcciones de sistemas de expresión y representación que pueden incluir diferentes sistemas de escritura, como números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas redes, diagramas, esquemas, etc. Cumplen funciones de comunicación, expresión, objetivación y tratamiento" (p. 41).

[1]**Autor para la correspondencia. E-mail: jose.mote@isceem.edu.mx*

ISSN 2448 – 7945

Duval (1998) expresa que “las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento” (p. 175). Hitt (1996), menciona que para comprender un objeto matemático como el de función, los sujetos deben acceder a múltiples representaciones de este, mediante la articulación de sus sistemas semióticos de representación, lo cual, según este autor, es difícil aun para algunos profesores de educación media superior. Por otro lado, Duval denomina comprensión integrativa a la capacidad de un sujeto para articular más de dos representaciones semióticas que provienen de diferentes registros de representación. Sin embargo, ambos autores concuerdan en que la comprensión de un objeto matemático se logra cuando el sujeto es capaz de realizar diversas transformaciones semióticas, lo cual implica el uso de múltiples representaciones de manera articulada y congruente.

Además, como mencionan algunos investigadores en Matemática Educativa, el estudio de las representaciones es inherente en cada objeto matemático, pues es a través de ellas que podemos posibilitar el acceso a sus tratamientos y comprensión (Duval, 2004; Hitt, 1996; Azcárate y Deulofeu, 1990; D’Amore et al., 2013). En ese sentido al enseñar la función lineal se hace uso de representaciones como la algebraica o simbólica, tabular o numérica, gráfica cartesiana y enunciados. De tal manera que, a partir de estas, se pueda estudiar la relación dada en un fenómeno o situación, sea de la vida cotidiana o meramente abstracto para la comprensión del objeto matemático en cuestión.

También, después de una revisión de la literatura centrada en la enseñanza y aprendizaje de la función lineal, se ha identificado que son más las investigaciones realizadas hacia el diseño de propuestas didácticas y hacia el estudio de las dificultades en el aprendizaje que las centradas en el proceso cotidiano de su enseñanza (Meneces Hernández, 2001; Hitt, 1998; Ursini y Trigueros, 2006; Rubio et al., 2020). Por consiguiente, esta investigación tuvo como objetivo general analizar las transformaciones semióticas en la enseñanza de la función lineal en primer grado de secundaria. Para ello, una de las teorías que ayudo a profundizar este análisis es la teoría de registros de representación semiótica, cuyo autor es Raymond Duval. En ella, se considera que, para desarrollar una mejor comprensión de los objetos matemáticos, se debe tener acceso a una gran cantidad de representaciones semióticas, es decir a mayor producción de representaciones ligadas a un objeto mayor será la comprensión de este. Además, de que lo anterior, puede llegar a superar el confundir al objeto representado con sus representaciones. Por lo que, desde esta teoría se pudo analizar la actividad matemática (Duval, 2006) desarrollada por los profesores de matemáticas en cuanto a las transformaciones semióticas empleadas durante su enseñanza de la función lineal.

Lo anterior se suma a que es mediante tales representaciones que se puede evocar e interactuar con los objetos matemáticos. Por lo que describimos las transformaciones semióticas que se desprenden de su teoría. Cada representación está delimitada por

ISSN 2448 – 7945

las reglas de conformidad al registro que pertenecen. Un registro de representación semiótica es un sistema de signos. Estos sistemas, Según Duval (1999), deben permitir tres actividades cognitivas: 1) formar una representación, 2) transformación de tratamiento y 3) transformación de conversión.

La "transformación de tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido transformada" (Duval, 1998, p. 177). Por ejemplo, si se solicita despejar la variable dependiente y de la representación ***ecuación 1.*** $3x+y-8=0$ se obtiene que ***ecuación 2.*** $3x+y=8$ y después que ***ecuación 3.*** $y=-3x+8$; es decir, la representación de inicial está dada en la forma general de las funciones lineales, mientras que el tratamiento aplicado permite representar la información en su forma explícita, expresando de una manera más clara la relación entre la variable independiente y la variable dependiente.

La transformación de conversión "es, al contrario, una transformación que hace pasar de un registro a otro; requiere pues de una coordinación por parte del sujeto que la efectúa" (Duval, 2017, p. 64). Implica transformar la representación inicial en otra representación en un registro de representación diferente al de la primera. Por ejemplo, convertir a la representación algebraica ***ecuación 4.*** $y=-3x+2$ en una representación gráfica cartesiana. Para ello, no solo basta identificar las unidades simbólicas de la representación algebraica como lo son ***ecuación 5.*** $m=-3$ y ***ecuación 6.*** $b=+2$, que son los valores paramétricos de la función lineal. También es necesario hacer énfasis en las unidades visuales de la representación gráfica como son el sentido del trazo, corte de la recta sobre el eje de las ordenadas (Duval, 1988).

En ese sentido, al analizar las transformaciones usadas en la enseñanza de la función lineal en primer grado de secundaria se encontró que los profesores de matemáticas emplean lo que se ha denominado secuencias de conversiones. Estas secuencias son el conjunto de conversiones realizadas por los profesores de matemáticas al enseñar el objeto matemático en cuestión. La mayoría de estas secuencias presentan el orden representación algebraica → representacion tabular → representación gráfica cartesiana. Además, de que no siempre se reconocen las unidades significantes para articular los diversos registros de representación y por consiguiente las representaciones empleadas.

A través de los cuestionarios se encontró que los profesores de matemáticas presentan dificultades para convertir una representación en lenguaje natural, es decir, mediante enunciados a una representación algebraica. Al solicitar las características de las funciones lineales tanto de proporcionalidad como afín la mayoría expreso solo unidades simbólicas relacionadas a la pendiente y a la ordenada al origen.

2. Metodología o desarrollo

La investigación realizada es de corte cualitativo mediante un estudio de caso desde el enfoque estudio de caso dirigido por la teoría, en el cual "se trata de determinar una teoría especifica del programa que sirva de guía en la recolección de datos del caso"

ISSN 2448 – 7945

(Simons, 2011, p. 43). Para la selección de la población se consideró que los profesores de matemáticas impartieran el tema de función lineal en primer grado de secundaria, que permitieran la grabación de sus clases, resolver un cuestionario de conocimientos y atender una entrevista, por lo que se contó con la participación de cuatro profesores de secundaria. La profesora Daniela, quien cuenta con dos años de servicio, el profesor Miguel y Juan, quienes cuentan con 6 años de experiencia, y el profesor Adrián, con 20 años de servicio. Se utilizan seudónimos para respetar la confidencialidad de su información. Los profesores comparten una preocupación sobre el aprendizaje del objeto matemático en cuestión y dados los resultados de las pruebas nacionales del Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizaje (2017) (PLANEA por sus siglas) y de la Comisión Nacional para la Mejora de la Educación (MEJOREDU por sus siglas) (2022) también sobre sus formas de enseñanza respecto al objeto. Lo cual permitió establecer su colaboración en esta investigación.

De las grabaciones solo se seleccionaron aquellas en las que el profesor se encuentra realizando transformaciones semióticas en el pizarrón.

El cuestionario de conocimientos se diseñó considerando situaciones que impliquen funciones lineales de proporcionalidad y funciones lineales afín; cuatro de las diez tareas son contextualizadas y el resto son no contextualizadas. Lo anterior con la finalidad de poder analizar transformaciones semióticas en diversas direcciones de conversión y tratamientos. Sin embargo, dada la extensión del presente documento solo nos centraremos en los resultados de las grabaciones de las sesiones.

Las entrevistas que se realizaron fueron semiestructuras. Se consideraron así debido a que se buscaba obtener información sobre el uso de las representaciones usadas durante la enseñanza de la función lineal; también sobre los procesos empleados por los profesores de matemáticas al resolver las tareas.

Para analizar la información de manera conjunto se diseñaron las siguientes categorías: transformaciones de conversión; transformaciones de tratamiento.

3. Resultados y análisis.

Para realizar el análisis primero se realizó una codificación (Figura 1) con relación a las categorías mencionadas anteriormente.

Código	Categoría
Representación algebraica Representación tabular Representación verbal Representación gráfica cartesiana	Transformación de conversión.
Tabulación Sustitución Vía del punteo Extensión del trazo Interpretación global	Transformación de tratamiento

Figura 1. Sistema de codificación.

ISSN 2448 – 7945

3.1 Resultados

Los resultados obtenidos sobre la transformación de conversión muestran que los profesores de matemáticas consideran como finalidad la construcción de la representación gráfica cartesiana.

Por ejemplo, en la figura 2 se observa la profesora Daniela realizó la siguiente secuencia (Figura 2) de conversiones. De la figura 2, se observa que la profesora comienza con una representación algebraica, se auxilia de la representación tabular y concluye convirtiendo esa información en una representación gráfica cartesiana

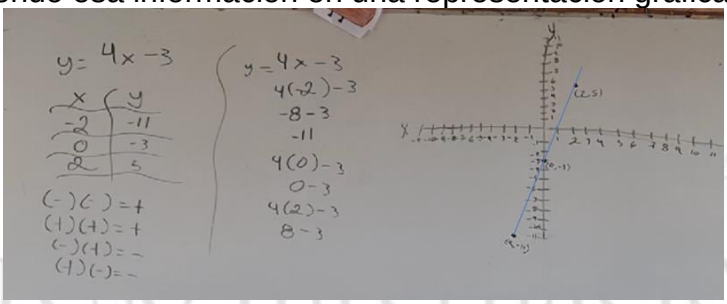


Figura 2. Secuencia de conversiones de la Profesora Daniela.

Por otro lado, el profesor Adrián emplea una secuencia de conversiones incorporando cuatro representaciones de la función lineal. En la figura 3, podemos observar que el profesor Adrián, inicia con una representación en lenguaje material, la primera conversión es hacia una representación tabular, la segunda conversión es de representación tabular a representación algebraica y la tercera conversión es de la representación algebraica a la representación gráfica cartesiana.

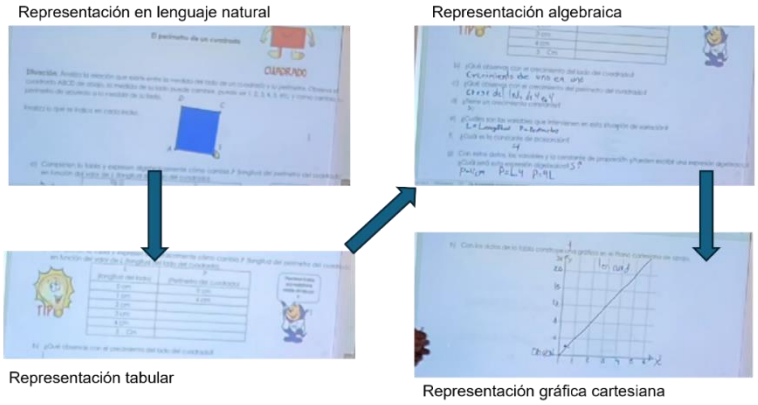


Figura 3. Secuencia de conversiones del profesor Adrián.

Los resultados sobre la transformación de tratamientos se desarrollan en relación con los procesos de tabulación y graficación.

En la secuencia de conversión de la profesora Daniela, el primer tratamiento es numérico, pues emplea el proceso de sustitución de valores designados para la variable independiente empleando un dominio con valores en ***ecuación 7. {****-2, 0 y 2****}***.

El segundo tratamiento empleado corresponde a lo que Duval (1988) denomina la vía del punteo. Este tratamiento hace referencia a la ubicación punto a punto de los pares

ISSN 2448 – 7945

ordenados obtenidos en la tabulación, en el plano cartesiano, finalizando con el trazo de la línea que une tales puntos dando lugar a la representación gráfica cartesiana.
En la secuencia del profesor Adrián, se pudo observar el primer tratamiento se realizo empleando el calculo mental, pues los estudiantes observaron que el incremento era constante de cuatro en cuatro, por lo que multiplicaban dicho valor por la medida del lado del cuadrado indicado en la tabla. Establecer esta relación permitió que los alumnos determinaran la representación algebraica respecto a la relación que se establece entre la medida del lado de un cuadrado y su perímetro. El tercer tratamiento empleado es el de la vía del punteo: para ello el profesor Adrián, retoma los pares ordenados obtenidos en la representación tabular, para ubicarlos uno a uno en la representación gráfica cartesiana.
Los resultados obtenidos de los otros dos profesores de matemáticas son muy parecidos a los de la profesora Daniela, por ello, solo se presenta información empírica tanto del profesor Adrián y la profesora Daniela. Sin embargo, en el siguiente análisis se realiza considerando a los cuatro profesores.

3.2 Análisis de los resultados.

La representación tabular como auxiliar. D'Amore et al., (2013) consideran que la representación tabular, es usada como un auxiliar para la conversión entre la representación algebraica y la representación grafica cartesiana. Lo cual fue evidente en las secuencias de conversiones de los profesores de matemáticas, pues como se ha mencionado los profesores ubicaban mediante el tratamiento visual de vía del punteo los pares ordenados obtenidos en la tabulación.
La construcción de la representación grafica cartesiana es el fin ultimo de las secuencias de conversión. Leinhardt et al, (1990) considerar esta actividad como una acción para desarrollar el proceso de graficación. Sin embargo, limitar el estudio de la función lineal a este fin, dificultaría la comprensión del objeto y su distinción respecto a sus representaciones.
En las secuencias de conversión no es muy común la representación gráfica cartesiana como representación de salida. Duval (1999) y Leinhardt et al, (1990) consideran a esta conversión como una de las más complejas para los estudiantes. Es posible que esto se origine debido a que esta transformación semiótica es poco empleada por los profesores de matemáticas, al menos en esta investigación, pues como ya mencionamos, la representación de salida suele ser tabular, algebraica o verbal.

4. Conclusiones

El análisis de las transformaciones semióticas en la enseñanza de la función lineal, para la población de esta investigación, permitió identificar el uso de diferentes representaciones semióticas. Sin embargo, se destaca que aún existe una tendencia a reconocer únicamente los valores paramétricos de la función lineal en términos de pendiente y ordenada al origen, pero no a su reconocimiento cualitativo para reconocer unidades visuales en una representación grafica cartesiana. Lo anterior puede

ISSN 2448 – 7945

desarrollar una significación pobre sobre el reconocimiento de unidas simbólicas a partir de unidades visuales y facilitar la conversión entre una representación grafica cartesiana a una representación algebraica de la función lineal.

Así mismo, el análisis de las transformaciones semióticas en la enseñanza de la función lineal en primer grado de secundaria, muestran que el fin de las secuencias de conversión se centra la construcción de la representación gráfica cartesiana (aspecto cuantitativo) más que en el análisis de las correspondencias específicas que caracterizan a una función lineal (aspecto cualitativo).

Las transformaciones de tratamiento empleadas por los profesores de matemáticas al enseñar la función lineal pocas veces enfatizan en resaltar y relacionar las unidades significativas de la función lineal en cada una de las representaciones semióticas.

5. Índice de referencias

Libros

- Azcárate Giménez, C., & Deulofeu Piquet, J. (1990). Funciones y gráficas. Madrid: Síntesis, 1990Rubinsten, S. (2004). *El pensamiento y los caminos de su investigación.* México: Grijalbo.
- D´Amore, B., Fandiño, M.I., Iori, M. (2013). La Semiótica en la Didáctica de la Matemática. Bogotá: Magisterio.
- Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.
- Duval, R. (2017). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: Author
- Simons, H. (2011). El estudio de caso: Teoría y práctica. Ediciones Morata.

Tesis

- Menenses Hernández, R. M. (2001) Análisis de la enseñanza del tema de función en el Nivel Medio Superior: Un estudio de casos. Tesis de Maestría. CINVESTAV-IPN, México.

Revistas

- Duval, R. (1988). Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En E. Sánchez (Ed), Antología en Educación Matemática, (pp. 125-139). México: Cinvestav-IPN.

ISSN 2448 – 7945

- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Hitt F. (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II, 173–201. México. Cinvestav.
- Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Traducción de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática
- Raymond A.M. & Leinenbach, M. (2000). Building a versatile understanding of algebraic variables with a graphic calculator. *EducationalStudies in Mathematics 41*(3), 283 – 307.
- Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. Investigaciones en matemática Educativa, 1, 245-264.
- Hitt, F. (1998). Difficulties in articulating different representations linked to the concept of function. The Journal of Mathematical Behavior, 17(1), 123-134.

Información en línea

- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9(1), 143-168. Disponible en https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546
- PLANEA. (2017). MEJOREDU. Disponible en INEE: https://historico.mejoredu.gob.mx/evaluaciones/planea/resultados-planea/
- Tamayo Alzate, Ó. E. (2006). Tamayo2006Representaciones. In *Educación y Pedagogía: Vol. XVIII* (Issue 45, pp. 39–48). Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/10963/1/Tamayo2006Representaciones.pdf
- Ursini & Trigueros, S. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? Educación Matemática, 18, 5–38. Disponible en http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40518302
- Juan d. Godino, Carmen Batanero, V. F. (2003). *Fundamentos De La Enseñanza Y El Aprendizaje De Las Matemáticas Para Maestros*. Disponible en http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/123456789/4829
- Rubio, N., Gonzales, C., & Campos, M. (2020). Conocimiento de los profesores de educación secundaria puesto en juego en tareas asociadas a las representaciones de la función lineal. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 33(April), 632–642. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/22445/1/Rubio2020Conocimientos.pdf
- Leinhardt, G., Stein, M. & Zaslavsky, O. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching Review of Educational Research, 60(1), 1-64. Disponible en https://www.math.ksu.edu/~bennett/onlinehw/qcenter/lzs.pdf

ISSN 2448 – 7945

PRIMER CICLO DEL CÍRCULO DE LECTURA "DESCIFRANDO LAS MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE LA LECTURA"

Cecilia Crespo Crespo [1,*], Iván Núñez Consuelos [2] y Carlos Oropeza Legorreta[3]
[1]*Instututo Nacional Superior del Profesorado Técnico. Triunvirato 3174. Buenos Aires*
[2,3]*Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM. Carr. Cuautitlán – Teoloyucan Km. 2.5, San Sebastián Xhala, 54714 Cuautitlán Izcalli, Edo. de México.*

AP-POSM066

Resumen

En este trabajo se reporta una experiencia del Círculo de Lectura "Descifrando las matemáticas a través de la lectura" llevada a cabo durante el segundo semestre 2023. Su objetivo fue: Extender el valor de las matemáticas en la vida cotidiana explorando y analizando obras literarias relacionadas con esta disciplina. Con una frecuencia quincenal, se propuso un artículo o fragmento de un libro congregando a interesados a una reunión virtual. Inicialmente, los encuentros se realizaron únicamente por Zoom. Gracias al apoyo institucional, se realizó posteriormente la transmisión simultánea a través del canal oficial de YouTube de la FES Cuautitlán.

Cada encuentro fue abierto a la participación de quienes se interesasen, la única condición pedida fue la lectura previa de la publicación propuesta. Para cada encuentro, se organizó la coordinación compartida entre varios de los participantes, previendo la posibilidad de algún inconveniente tecnológico debido a la virtualidad. Un coordinador planteaba, al inicio del encuentro, un interrogante relacionado con la lectura como disparador de respuestas, ideas, opiniones y puntos de vista. Los participantes iban pidiendo la palabra sucesivamente generando un espacio de intercambio y debate. Las ideas surgidas eran recogidas y analizadas por los coordinadores de esa reunión. Los roles de coordinación de cada encuentro fueron rotativos.

La cantidad de participantes de los encuentros ha sido entre dieciséis y veinte por encuentro, participando profesores y estudiantes no solo del área de matemáticas sino de otras disciplinas como diseño gráfico, comunicación e informática, provenientes de distintas instituciones de México y Argentina.

Palabras clave: *Lectura, virtual, matemáticas*

1. Introducción

A mediados del 2023, surgió la idea de organizar un espacio de encuentro virtual entre profesores, investigadores, alumnos o profesionales destinado a compartir y comentar ideas matemáticas de diversa índole surgidas a partir de la lectura. De esta manera se dio origen al Círculo de Lectura "Descifrando las matemáticas a través de la lectura", con el objetivo de compartir a partir de la lectura de publicaciones, reflexiones acerca de la presencia de la matemática más allá de las aulas.

[1] *Cecilia Crespo Crespo, crccrespo@gmail.com, Tel:+5491122726500*

ISSN 2448 – 7945

Partiendo de la premisa de que “los clubes de lectura que afloran en la cotidianeidad del lector contemporáneo, se construyan sobre elementos tan esenciales de la actividad humana como el leer y el conversar” (Carreño Montero, 2015, p. 41), consideramos que crear un círculo de lectura acerca de la matemática, consiste en una manera de democratizar la matemática (Cantoral, 2013), pues ofrece la posibilidad de reconocer el uso del conocimiento matemático por diversos grupos humanos cuando aprenden, abordan y enfrentan situaciones que involucran el conocimiento matemático en igualdad con el poder de saber, representar, y validar, la forma de construir conocimiento por la comunidad matemática.

2. Metodología o desarrollo

El Primer Ciclo del Círculo de Lectura fue planificado para el segundo semestre del 2023, contando con siete encuentros. Se decidió que tendría una regularidad quincenal para permitir que los participantes tuvieran tiempo suficiente para la lectura de la publicación propuesta para el encuentro correspondiente, pero sin perder la cercanía temporal entre encuentros. En sus encuentros iniciales, las reuniones se realizaron únicamente por Zoom, posteriormente y gracias al apoyo institucional, se realizó la transmisión simultánea a través del canal oficial de YouTube de la FES Cuautitlán. (Figura 1).



Figura 1. Cartel de difusión del Círculo de Lectura. Fuente propia.

ISSN 2448 – 7945

Una semana antes de cada encuentro se compartió con los interesados en participar una publicación: artículo o capítulo de libro.

Cada encuentro estuvo abierto a la participación de quienes se interesasen, siendo la única condición pedida, la lectura previa de la publicación propuesta. Como es natural algunos participantes incrementaron el número de asistentes, así como la profundidad de sus comentarios pues prevaleció la idea de plasmar contenidos matemáticos desde de área de especialización.

Para cada encuentro, se organizó la coordinación compartida entre varios de los participantes, para prever la posibilidad de algún inconveniente tecnológico que pudiera surgir de la virtualidad. En ese encuentro inicialmente un coordinador planteó un interrogante relacionado con la lectura como disparador de respuestas, ideas, opiniones y puntos de vista. Los participantes que desearan participar iban pidiendo la palabra sucesivamente generando un espacio de intercambio y debate. Las ideas surgidas eran recogidas y analizadas por los coordinadores de esa reunión, comentando las respuestas recibidas, relacionándolas con otras anteriores, ampliando conceptos relacionados y abriendo nuevos interrogantes. Los roles de coordinación de cada encuentro fueron rotativos.
Cara encuentro tuvo una duración de aproximadamente una hora, cerrándose con la recapitulación de las ideas principales surgidas y de reflexiones acerca de las mismas realizada por los coordinadores del encuentro y en algunas oportunidades, dejando a los participantes, orientaciones para seguir pensando.

3. Resultados y análisis

Los participantes de los encuentros que formaron este Primer Ciclo del Círculo de Lectura han sido entre dieciséis y veinte por encuentro. Han participado profesores y estudiantes no solo del área de matemática sino de otras disciplinas como diseño gráfico, comunicación e informática, provenientes de distintas instituciones de México y Argentina. La mayoría de los participantes mantuvieron su constancia de participación activa en los distintos encuentros y realizaron aportes y comentarios en cada instancia.
Después de realizar el proceso administrativo y con el apoyo de diversos departamentos se logró la transmisión simultánea por YouTube y la permanencia posterior de los encuentros grabados permite también el acceso a las reuniones de mayor cantidad de participantes que pueden hacerlo de manera sincrónica y asincrónica.

Algunas de las temáticas abordadas han sido: aportes e influencia de algunos matemáticos a través de la historia, origen de la teoría de probabilidades, presencia del número de oro en la naturaleza y en las artes, modelos matemáticos predictivos de carácter epidemiológico, orden geométrico y proporción en obras de distintos escenarios socioculturales y matemática y música.

ISSN 2448 – 7945

Los participantes realizaron comentarios desde sus distintas formaciones y experiencias, enriqueciendo el espacio. Algunos llevaron las temáticas a contribuciones de sus realidades y entornos, reflejándolas en propuestas didácticas, relaciones con sus campos laborales o aportes profesionales (Figuras 2 y 3).

La estructura cooperativa ha permitido compartir y comparar puntos de vista sobre fragmentos concretos de la publicación seleccionada o sobre cualquier aspecto que pueda generar un debate. Se ha logrado una comprensión profunda y multidisciplinar de las temáticas abordadas, en las que cada uno de los participantes mostró desde su visión la manera en la que las lecturas son comprendidas y relacionadas con su acervo disciplinar.



Figura 2. Transmisión en vivo, círculo de lectura. YouTube FESCUNAMoficial. (03 de octubre de 2023)



Figura 3. Transmisión en vivo, círculo de lectura. YouTube FESCUNAMoficial. (28 de noviembre de 2023)

Las participaciones se han realizado en un clima de seriedad, valoración y respeto tanto de los participantes entre sí como hacia el conocimiento matemático. Los

ISSN 2448 – 7945

comentarios recibidos demuestran que los participantes quedaron satisfechos y que lograron aprendizajes a partir de cada encuentro.

Entre los comentarios que surgieron, cabe destacar que algunos de los participantes, cuya formación no es de base matemática, resaltaron que en un comienzo se acercaron motivados por saber cómo sería un círculo de lectura de matemática, convencidos de que quizá no les resultase atractivo, pero sin embargo, descubrieron que se trataba de un espacio que podía despertar su interés y les permitió entender la presencia de la matemática en diversos aspectos de su entorno y cómo profesionales de distintas formaciones pueden aportar visiones complementarias y confluyentes de un mismo tema.

Es importante destacar que, durante la Escuela de Invierno en Matemática Educativa celebrada en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango, fue presentado el cartel (Oropeza Legorreta, Crespo Crespo y Contreras Espinosa, 2023) con un primer reporte de la experiencia del Círculo de Lectura, aún en curso en ese momento (Figura 4). Esta presentación despertó entre los asistentes al evento interés y varios se unieron a los últimos encuentros que fueron posteriores.



Figura 4. Constancia de exposición del cartel (Oropeza Legorreta, Crespo Crespo y Contreras Espinosa, 2023)

Por otra parte, la comunidad UNAM Cuautitlán, publicó acerca de la experiencia (Elizondo Alvarado, 2023), mostrando la integración de los temas abordados en uno de los encuentros del Círculo de Lectura desde el área del diseño gráfico (Figura 5).

ISSN 2448 – 7945



ESCENARIOS

La Alhambra, tema de interés en círculo de lectura

María Dolores Elizondo Alvarado

Como parte de una iniciativa quincenal y virtual, los departamentos de Matemáticas y de Difusión Cultural presentaron la actividad *Descifrando las matemáticas a través de la lectura*, con el objetivo de extender el valor de esta ciencia en la vida cotidiana, a partir del análisis de diferentes obras literarias.

Al iniciar la charla, Sharon Aline Mondragón Martínez, egresada de la licenciatura en Diseño y Comunicación Visual (DCV) y moderadora, comentó que la sesión se dividiría en dos bloques, uno histórico y otro enfocado en el diseño, abordando el texto "Un matemático pasea por la Alhambra", de Rafael Pérez Gómez, profesor de Matemática Aplicada en la Universidad de Granada (UGR), quien dedicó cuatro años de investigación a esta obra.

Para contextualizar, explicó que esta edificación es un conjunto de antiguos palacios, jardines y fortalezas, que además fue una ciudad palatina, una casa real cristiana y, más tarde, una fortaleza militar que en 1870 fue declarada como monumento nacional.

En el primer bloque, los participantes se cuestionaron sobre ¿Cómo concebían las matemáticas los pueblos árabes? Una de las intervenciones comentó que éstos eran grandes ordenadores y lógicos, lo que les permitió reunir una gran cantidad de conocimientos que hasta la fecha estaban aislados en un sistema coherente y útil que permitió perfeccionar un lenguaje matemático y el desarrollo del álgebra y la trigonometría.

Además, debatieron sobre el proceso que llevaron a cabo para estructurar los 17 grupos cristalográficos planos que conforman este complejo monumental. Los participantes destacaron que los creadores se basaron en figuras regulares que permiten ver la suma de los ángulos desde la implementación de rotaciones. En este punto, Karina Simón Farfán, también moderadora, habló sobre las teselas, un concepto abordado en el manuscrito que se refiere a las configuraciones individuales que forman nuevas composiciones.

En el segundo bloque dialogaron sobre las características que poseen los diseños de los mosaicos de la Alhambra, descritos como universos geométricos que van más allá de lo estético para integrarse en formas y fórmulas matemáticas. "Sus paredes hablan sobre historia, religión, sociología, ciencia y tecnología escritas, haciendo uso de la poesía y geometría como herramientas de la arquitectura", citó al autor una de las lectoras.

Posteriormente, Sharon y Karina cuestionaron al público sobre la importancia de la geometría en el diseño, aunque las opiniones fueron diversas, coincidieron en que esta rama de las matemáticas, encargada de las líneas, ángulos, formas y distancias, ofrece orden y fuerza a quien sabe aprovecharla, brinda simetría en resistencias claras que pueden crear fractales de colores y belleza.

Sigue la transmisión por https://www.youtube.com/@fescunamoficial9877 y en https://www.cuautitlan.unam.mx/difusion_cultural/

www.cuautitlan.unam.mx | 23

Figura 5. Copia de la publicación (Elizondo Alvarado, 2023)

4. Conclusiones

La participación activa y sostenida en los encuentros llevados a cabo en el Primer Ciclo del Círculo de Lectura y el interés demostrado ante esta convocatoria permite vislumbrar que el proyecto se sostendrá en el tiempo y se acrecentará permitiendo acercar esta modalidad de lectura y reflexión acerca de temáticas matemáticas a colegas y estudiantes que participan con interés.

A partir de esta experiencia, es posible afirmar que gracias a la selección de las publicaciones con distintas temáticas y de la participación de asistentes con distintas formaciones, cada sesión se convirtió, en un reto diferente en el que la lectura y la matemática son el centro de la reflexión.

En 2024 se continúa con la experiencia y se ha organizado el Segundo Ciclo, en el que se abordarán otros temas y se retomarán algunas temáticas en los que los participantes demostraron mayor interés, mediante lecturas que profundicen y amplíen lo trabajado en el ciclo anterior.

Agradecimientos

Los autores agradecen al Secretario General de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, el Dr. Benjamín Velasco Bejarano y la Lic. Claudia Vanessa Joachin Bolaños, responsable de la Coordinación de Extensión y Difusión Universitaria por el apoyo en el desarrollo y difusión del proyecto en la página institucional y a través del canal oficial de YouTube de la FES Cuautitlán; en este mismo sentido agradecemos al Lic. Iván Núñez Consuelos, responsable de la Unidad de Superación y Asuntos del personal Académico de la FES Cuautitlán, por su apoyo y participación en la gestión del proyecto.

ISSN 2448 – 7945

5. Índice de referencias

- Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa: estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.
- Carreño, O. (2015). *El eco de las lecturas. Introducción a los clubes de lectura*. Santiago de Chile: Dirección de Bibliotecas, Archivos y Museos.
- Elizondo Alvarado, M. (2023). La Alambra, tema de interés en círculo de lectura. *Gaceta UNAM Comunidad, 20*, p.23
- FESCUNAMoficial. (03 de octubre de 2023). Circulo de lectura "Descifrando las matemáticas a través de la lectura". [Archivo de Video]. https://www.youtube.com/watch?v=F3dR2nn8Cio
- FESCUNAMoficial. (28 de noviembre de 2023). Circulo de lectura "Descifrando las matemáticas a través de la lectura". [Archivo de Video]. https://www.youtube.com/watch?v=AdkpypcDzCc
- Oropeza Legorreta, C., Crespo Crespo, C. y Contreras Espinosa, J. (2023). *Círculo de lectura: un encuentro virtual para compartir ideas matemáticas*. Cartel presentado en la XXVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa. Durango, México.

ISSN 2448 – 7945

RED NEURONAL CONVOLUCIONAL PARA EL RECONOCIMIENTO DE PERSONAS.

Flores Pérez Judith Mayte[1, *], Contreras Espinosa José Juan[2], Pineda Becerril Miguel de Nazareth[3], García León Omar[4] y Rosas Fonseca Rosalba Nancy[5]
[1,2,3,4,5]*Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, Campo 4. Carretera Cuautitlán-Teoloyucan km 2.5, San Sebastián Xhala, 54714 Cuautitlán Izcalli, Estado de México.*

AP-POSM067

Resumen

El reconocimiento facial es una tecnología que permite identificar o verificar la identidad de una persona mediante el análisis de sus características faciales únicas. Este proceso implica la captura, análisis y comparación de patrones faciales con el objetivo de identificar a individuos o verificar si una persona es quien dice ser. Este proceso se divide principalmente en dos tareas: detección y reconocimiento.
En esta tecnología se suelen utilizar algoritmos de aprendizaje matemático, en particular redes neuronales y técnicas de aprendizaje profundo, para entrenar modelos que pueden reconocer patrones dentro de las plantillas faciales. Las redes neuronales más utilizadas en esta área son de tipo convolucional (CNN), cuya arquitectura de red está diseñada específicamente para el procesamiento de datos con imágenes. Para su aprendizaje, se realiza un proceso iterativo de entrenamiento, donde se les suministra una cantidad de imágenes para que sea capaz de identificar características específicas de cada una, con la finalidad de realizar alguna clasificación o predicción.
Este trabajo tiene como objetivo mostrar el entrenar una red neuronal convolucional utilizando el software Python, que sea capaz de reconocer rostros de personas específicas dentro de una base de datos creada previamente.

Palabras clave: *Inteligencia artificial, red neuronal convolucional, detección*

1. Introducción

En los últimos años, la implementación de tecnología en diversas áreas ha experimentado un gran impulso, tal es el caso de los sistemas de detección de datos biométricos, que son utilizados principalmente para seguridad y acceso, gestión de identidades, control de fraude, entre otras aplicaciones. La detección de datos biométricos puede incluir desde escáneres de huellas dactilares, hasta el reconocimiento facial (Martínez &Linares, 2012).

El reconocimiento facial permite identificar o verificar la identidad de una persona mediante el análisis de sus características faciales únicas. Este proceso implica la

[1] **Autor para la correspondencia. E-mail: mayte_fp@cuautitlan.unam.mx*

ISSN 2448 – 7945

captura, análisis y comparación de patrones faciales con el objetivo de identificar a individuos o verificar si una persona es quien dice ser. Este proceso se divide principalmente en dos tareas: detección (implica la localización de una o varias caras dentro de una imagen) y reconocimiento (se trata de comparar la cara detectada, con otras almacenadas en una base de datos) (Chellappa, Phillips & Rosenfeld, 2003). Esta tecnología suele utilizar algoritmos de aprendizaje matemático, en particular redes neuronales y técnicas de aprendizaje profundo, para entrenar modelos que pueden reconocer patrones dentro de las plantillas faciales.

Las redes neuronales convolucionales (CNN), están diseñadas específicamente para el procesamiento de datos con imágenes y han demostrado ser muy efectivas en tareas de visión artificial, en este tipo de redes se lleva a cabo un proceso iterativo de entrenamiento que les permite aprender acerca de las características específicas de las imágenes que le son suministradas, con la finalidad de realizar alguna clasificación o predicción (Soria & Blanco, 2001).
Este trabajo tiene como objetivo mostrar el entrenamiento de una red neuronal convolucional que sea capaz de reconocer rostros de personas específicas dentro de una base de datos creada previamente e implementar una interfaz gráfica para mostrar los resultados, utilizando Python.

2. Metodología o desarrollo

Un sistema de reconocimiento facial automatizado funciona mediante la captura de una imagen facial y el análisis de sus características distintivas, como la disposición de los ojos, la nariz, la boca y otras características únicas. Para la elaboración de este trabajo se desarrollaron varias etapas:

2.1. Etapa1. Requisitos específicos del sistema

Dentro de esta etapa se definieron los requisitos específicos del sistema a desarrollar como: el lenguaje de programación a implementar y el entorno de desarrollo a utilizar.

Para la elaboración de este trabajo se utilizó el entorno de desarrollo para programación en Python, llamado The Scientific Python Development EnviRonmennt (Spyder), que fue creado por Pierre Raybaut en 2009, es multiplataforma y se utiliza para desarrollar software científico (Córdoba, 2015, p. 4). Proporciona una interfaz de desarrollo de usuario amigable, proporciona herramientas integradas para procesar datos y permite organizar el código en proyectos.
Dentro de este entorno de desarrollo se implementaron varias librerías como:

- OpenCv que es una librería de tratamiento de imágenes (Díaz, 2023).
- numpy, propone un potente conjunto de funciones para trabajar con matrices y arreglos multidimensionales (NumPy User Guide, s.f.).

ISSN 2448 – 7945

- math, proporciona funciones matemáticas y constantes para realizar operaciones matemáticas comunes (Becerril et al., 2013).
- PIL, proporciona herramientas para abrir, manipular y guardar imágenes en varios formatos de archivo (Shipman, 2013).

2.2. Etapa2. Recopilación de datos

Esta fase consiste en recopilar una buena cantidad de imágenes faciales de diferentes personas, que permitan la construcción de un conjunto de datos representativo y posteriormente etiquetar dichas imágenes. Para ello, se creó un algoritmo llamado crearDatosRostros.py en Spyder que permite capturar imágenes con la cámara de la computadora, y almacenar dichas imágenes en una carpeta. Dentro de este código se implementó el algoritmo de clasificación de cascada “CascadeClassifier” que es una técnica eficiente para detección de objetos, una vez cargado el clasificador, se aplica a una imagen utilizando el método “detectMultiScale”, que desliza una ventana sobre la imagen, si encuentra un objeto (rostro) en una regios determinada, devuelve un rectángulo delimitador que rodea el objeto.

Cuando se ejecuta el archivo crearDatosRostros.py, se enciende la cámara de la computadora y se comienzan a capturar 350 imágenes de la persona en cuestión y al mismo tiempo se van almacenando en una carpeta con el nombre de rostro y un número consecutivo. Cuando se capturan las 350 imágenes, el programa se detiene y ya se puede abrir la carpeta creada para observar las imágenes almacenadas (ver Figura 1). Esto se hace para la captura de otros rostros (Ver Figura 2).

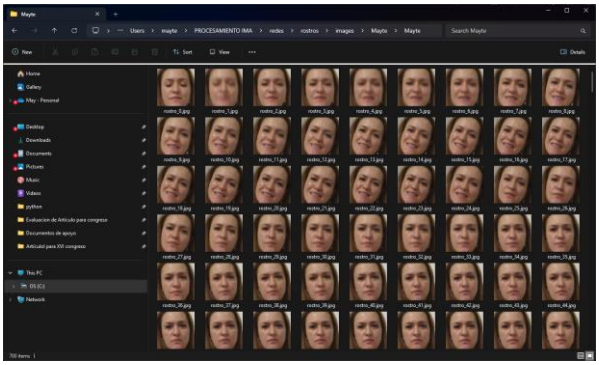


Figura 1. Imágenes capturadas.

ISSN 2448 – 7945

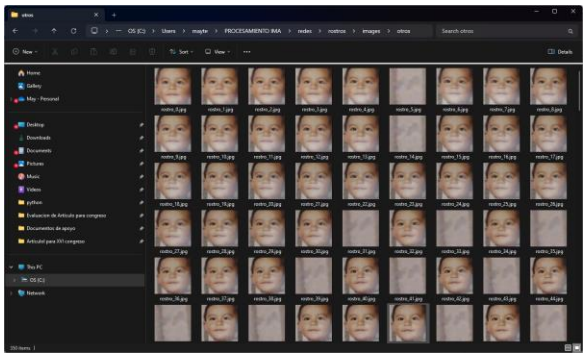


Figura 2. Imágenes de rostros de otra persona.

2.3. Etapa3. Procesamiento de imágenes.

El procesamiento digital de imágenes (PDI) es una disciplina que utiliza algoritmos y técnicas computacionales para procesar y mejorar la calidad de las imágenes (Domínguez Torres, 1996, p.1).

Para realizar esta etapa, se creó una lista con el conjunto de datos de ambas carpetas de las Figuras 1 y 2 y se les colocó una etiqueta haciendo referencia a la clase a la que pertenecen, para el primer conjunto de datos se le colocó la clase “0” y para el segundo la clase “1”. Posteriormente fueron redimensionadas a un tamaño de 32x32 con sus tres canales RGB, con la finalidad de dejarlas listas para las siguientes etapas.

2.4. Selección y estructura del modelo de red convolucional.

Esta fase consiste en la investigación y selección de los algoritmos más adecuados para el reconocimiento facial, dentro de los más comunes se encuentran: Eigenfaces, Local Binary Patterns (LBP), Historam of Oriented Gradients (HOG) y Redes Neuronales Convolucionales (Jiménez, 2018, p.12), sin embargo, se optó por utilizar una red neuronal convolucional, ya que representan una herramienta muy potente, capaz de aprender automáticamente características importantes de los datos de entrada en múltiples niveles de abstracción y están diseñadas específicamente para manejar datos de imágenes.

Se creó un archivo llamado entrenamiento.py y dentro se construyó un modelo de red neuronal convolucional de tipo secuencial que tiene as siguientes capas (ver figura 3):

- Una capa convolucional: Esta capa aplica una operación de convolución bidimensional a la entrada, para extraer características especiales relevantes de una imagen. Utiliza un conjunto de filtros 2D, donde cada uno produce un mapa de características y se ajustan automáticamente para aprender de esas características. Esta capa del modelo contiene 200 filtros, una función de activación ReLu (devuelve x si s es positivo y cero en caso contrario) y que recibe las imágenes creadas y redimensionadas de la etapa 3.
- Una capa MaxPooling2D: Esta capa se utiliza después de una capa convolucional para reducir el tamaño espacial (ancho y alto) de las

ISSN 2448 – 7945

representaciones de las características, manteniendo la información importante y permite controlar el sobreajuste.

- Una capa convolucional 2d: se coloca nuevamente una capa convolucional2d, debido a que a pesar de que la capa anterior reduce la resolución espacial, la profundidad (los canales RGB) se mantiene, por lo que, al aplicar esta capa, la red puede continuar refinando y extrayendo características
- Capa MaxPooling2D, para seguir extrayendo y refinando características de los mapas resultantes de cada imagen.
- Capa Flatten, para transformar los mapas de características generados por las capas convolucionales y de agrupación, en un formato unidimensional.
- Dropout con una tasa del 50%: esta técnica ayuda a prevenir el sobreajuste del modelo y ayuda a que la red aprenda representaciones más robustas.
- Capa densa con 50 neuronas y función de activación ReLu. Después de las capas convolucionales y de agrupación, la red ha extraído y refinado características de las imágenes de entrada, por lo que agregar una capa densa con 50 neuronas proporciona mayor capacidad de representación.
- Capa densa con 2 neuronas y función de activación softmax. Agregar esta capa al final de la red, es comúnmente utilizado en tareas de clasificación, donde se busca asignar un etiquetado o clase a una imagen, en este caso se busca clasificar la clase “0” y la “1”.

```
#modelo
modelo=Sequential()
modelo.add(Conv2D(filters=200, kernel_size=(3,3), activation='relu', input_shape=(32,32,3)))
#modelo.add(Conv2D(200,(3,3), input_shape=X.shape[1,:]))
modelo.add(MaxPooling2D(pool_size=(2,2)))
modelo.add(Conv2D(filters=100, kernel_size=(3,3), activation='relu', input_shape=(32,32,3)))
modelo.add(MaxPooling2D(pool_size=(2,2)))

modelo.add(Flatten())
modelo.add(Dropout(0.5))
modelo.add(Dense(50, activation='relu'))
modelo.add(Dense(2, activation='softmax'))
```

Figura 3. Arquitectura de la red neuronal convolucional.

2.5. Entrenamiento y ajuste de parámetros

Teniendo listo el modelo de red neuronal de la etapa anterior, se procede a compilarlo, para lo cuál se deben de configurar algunos aspectos como la función de pérdida, el optimizador y las métricas para saber la precisión del modelo.

Se seleccionó como función de pérdida “Categorical Crossentropy”, debido que el problema planteado es de clasificación y esta función se utiliza para calcular la discrepancia entre la distribución de probabilidad predicha por el modelo y la distribución real de las etiquetas de las clases (Pérez-Planells, Delegido, Rivera-Caicedo & Verrelst, 2015).

Se seleccionó el optimizador Adaptative Moment Estimation (Adam) ya que es ampliamente utilizado para problemas de aprendizaje profundo, pues combina los métodos del descenso de gradiente estocástico y el de propagación de la raíz

ISSN 2448 – 7945

cuadrada de la media, para proporcionar una forma efectiva de ajustar los pesos de una red.

Y finalmente la métrica que se seleccionó para evaluar la precisión del modelo es “accuracy”, puesto que permite evaluar el rendimiento de un modelo de aprendizaje automática para clasificación (ver Figura 4).

Después de compilar el modelo, se realizó el proceso de entrenamiento con 20 épocas y se dividió el conjunto de datos en entrenamiento, prueba y validación. Además, se fue monitoreando el error en cada iteración y la precisión (ver figuras 5 y 6).



Figura 5. Algoritmo de entrenamiento del modelo.

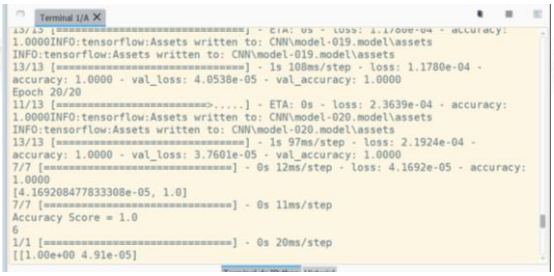
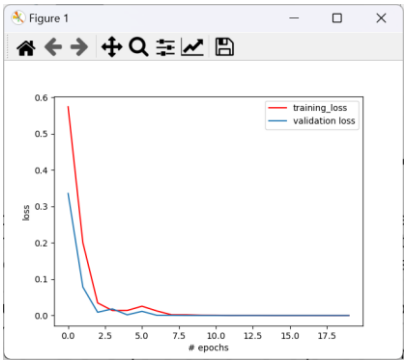


Figura 6. Resultados del entrenamiento.

En la Figura 7se observa la medición de las pérdidas durante el entrenamiento y validación. La primera, es la medida de error que se calcula utilizando los datos de entrenamiento y representa que tan bien se están ajustando los pesos del modelo a los datos del entrenamiento y la segunda, es la medida de error que se calcula utilizando el conjunto de datos de validación, proporcionando una evaluación del rendimiento del modelo para datos nuevos. En la Figura 7 se muestran estas mediciones y se ve como en la época 10 ambos son prácticamente cero.



ISSN 2448 – 7945

Figura 7. Medición de pérdidas.

En la Figura 8, se muestra la precisión del modelo en el entrenamiento y en la validación, observando que llegan a 1.

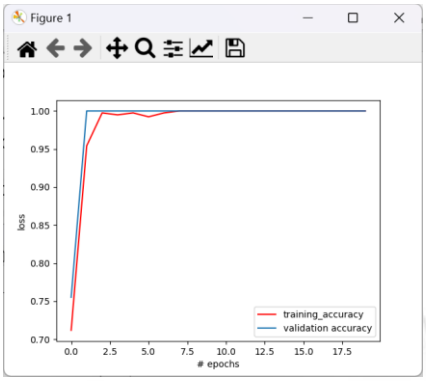


Figura 9. Precisión del modelo.

2.6. Utilización del sistema

Se creó un nuevo archivo llamado reconocimientoRostros.py, el cuál utiliza el modelo de red neuronal convolucional ya entrenado y permite capturar a través de video a la persona que se desea reconocer (que pertenece a la clase “0”) colocando una etiqujeta verde con su nombre y si es otra persona (que pertenece a la clase 1), le coloca una etiqueta en rojo que dice desconocido (ver Figuras 10 y 11).

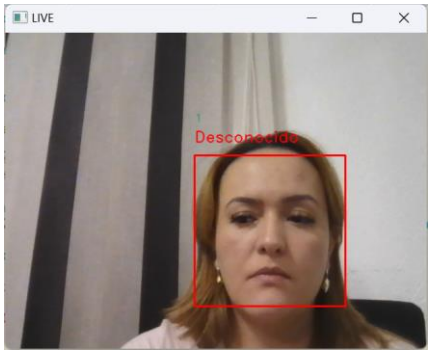


Figura 10. Persona desconocida.

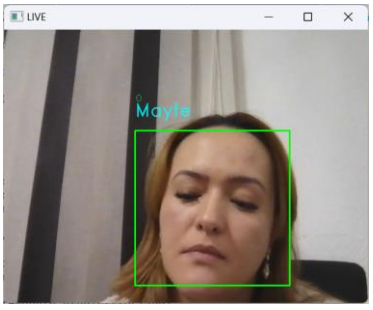


Figura 11. Persona detectada.

ISSN 2448 – 7945

4. Conclusiones

La detección de rostros basados en redes neuronales convolucionales (CNN) han demostrado una alta eficacia en la identificación precisa de rostros en imágenes digitales. Gracias a su capacidad para aprender patrones complejos en los datos de entrada, las CNN pueden distinguir características faciales únicas y realizar tareas de detección con una precisión notable, en este trabajo se demostró su gran potencial, sin embargo, existen factores externos como la pose, la iluminación, la expresión facial, el ángulo de visión, etc. Que pueden dificultar el trabajo de detección ya que como vemos en las figuras 10 y 11, es la misma persona y la clasificó diferente.

Para abordar estas dificultades se requiere el desarrollo de algoritmos robustos y sofisticados, así como la recopilación de conjuntos de datos de entrenamiento representativos y diversificados que abarquen una amplia gama de condiciones y características demográficas.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo al proyecto PAPIME PE 101623.

5. Índice de referencias

Becerril et al. (2013). Taller de matemáticas. Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco.

Córdoba, C. (2015). Spyder: Un IDE diseñado para científicos. SciPy Latin America Posadas, Arnetina.

Chellappa, R., Phillips, P. J. & Rosenfeld, A. (2003). Face Recognition: A literature survey.: ACM Computing Surveys, vol. 35.

Díaz, O. (2023). Tutorial OpenCV. Fundación Universitaria Antonio Gargallo.

Domínguez Torres, A. (1996). Procesamiento digital de imágenes. Perfiles Educativos, (72).

Jiménez, I. (2018). Reconocimiento facial basado en redes neuronales convolucionales. [Trabajo de fin de grado en Ingeniería se Tecnologías de Telecomunicación]. Universidad de Sevilla.

Pérez-Planells, L., Delegido, J., Rivera-Caicedo, J. P. and Verrelst, J. ((2012). “Análisis de métodos de validación cruzada para la obtención robusta de parámetros biofísicos,” Revista de Teledetección, no. 44, p. 55, dec 2015.Martínez, J. & Linares, J. Sistemas de reconocimiento facial y realidad aumentada para dispositivos móviles. Revista de investigación Ciencias.

NumPy User Guide, section I/O with NumPy.

Shipman, J. (2013). Python Imaging Library (PIL). New Mexico Tech.

SORIA, E. & BLANCO, A. (2001). Redes neuronales artificiales, Autores científico-técnicos y académicos. págs. 25-33, disponible en: https://www.acta.es/medios/articulos/informatica_y_computacion/019023.pdf

ISSN 2448 – 7945

MÉTODOS MATEMÁTICOS APLICADOS A LA INGENIERÍA DE SOFTWARE

Espinosa Avila Eduardo[1,*] y Arteaga Ricci Tanya I.[2]
[1,2]*Universidad Nacional Autónoma de México, Av. Universidad 3000, Ciudad Universitaria, Coyoacán, Cd. Mx., CP 04510*

AP-POSM068

Resumen

"Deberíamos reestructurar nuestro campo de la programación de tal manera que los métodos matemáticos sean igualmente aplicables a nuestros problemas de programación, porque no existe otra manera de hacerlo" (Dijkstra, s.f.). La anterior frase es una solicitud realizada hace varias décadas por Edsger Wybe Dijkstra quién buscaba dar mayor formalismo al desarrollo de programas. Todas las personas que en algún momento han tenido la oportunidad de programar, han conocido la necesidad de tener un pensamiento más estructurado sin importar la forma de ser o la propia personalidad; es bien sabido que la programación es un arte y la esencia del artista se queda en cada una de sus obras. Sin embargo, no siempre resulta fácil el poder llevar a cabo de principio a fin una creación artística como lo es el desarrollo de software. Por este motivo, en este artículo se presentan los porqués del desarrollo de software y su ciclo de vida con ayuda de un ejemplo que parecería ser muy sencillo, el cual abarca desde la abstracción de lo que se va a construir pasando por el diseño, desarrollo hasta llegar a la implementación y la validación, mostrando además la aplicación de métodos matemáticos en diversas etapas del mismo, haciendo explícita la relación existente entre las matemáticas y el área de la ingeniería de software.

Palabras clave: *Aplicación, matemáticas, ingeniería, software, relación, integración.*

1. Introducción

"El objetivo del PC (*Pensamiento Computacional*) es desarrollar sistemáticamente las habilidades del pensamiento de orden superior, como el razonamiento abstracto, el pensamiento crítico y la resolución de problemas, con base en los conceptos de la computación." (Zapotecatl, 2018, p. 5).

El párrafo anterior pone en evidencia la importancia de incluir conceptos, métodos y herramientas matemáticas, vía el pensamiento computacional, en prácticamente todas las áreas del conocimiento humano. Sin embargo, existe un área dentro de la misma Ciencia Computacional en la que parece que no se ha integrado: La Ingeniería de Software. Esperamos que esta contribución ayude a generar mayor inclusión en la relación entre estas áreas.

2. Metodología o desarrollo

[1] *Autor para la correspondencia. E-mail: eduardo.espinosa@ingenieria.unam.edu Tel. 55-18-31-19-26*

ISSN 2448 – 7945

2.1 Proceso de desarrollo de software

Una posible definición de proceso es “un conjunto de actividades, acciones y tareas que se ejecutan cuando va a crearse algún producto del trabajo” (Pressman y Maxim, 2014, p. 14). En la misma obra describe un proceso de software como “un conjunto de actividades relacionadas que conducen a la producción de un sistema de software” (p. 44).

Si bien es cierto que existen diversos procesos de software, existen actividades fundamentales que son comunes a todos, (Sommerville, 2016, p 23):

- Especificación: debe definirse la funcionalidad del sistema así como las restricciones de su operación.
- Diseño e implementación: se produce el software que satisface la especificación.
- Verificación y validación: Se verifica que el sistema cumple con los requisitos especificados y se certifica que realiza lo que el cliente desea.
- Evolución: El software se modifica para cumplir las necesidades de cambio del cliente.

2.1.1 Ciclo de vida del desarrollo de software

Boyd L. Summers (2011) define el ciclo de vida del software como “un periodo de tiempo que inicia cuando un producto de software es concebido y termina cuando el producto de software deja de usarse” (pp. 4-6). En su modelo incluye las fases de *requerimientos*, *diseño*, *implementación*, *pruebas*, *instalación y salida*, así como la de *mantenimiento*.

Por su parte, Christian W. Dawson (2009), menciona que “el ciclo de vida del desarrollo de software es un modelo genérico para desarrollar software y consiste de cierto número de etapas” (pp. 115-118). En este caso las etapas son: *captura de requerimientos*, *diseño*, *construcción*, *pruebas* e *implementación*.

Resulta notable que ambos son muy similares, consultando otras fuentes se obtienen etapas o fases que corresponden con estos dos modelos con variantes menores.

2.2 Ejemplo de aplicación de métodos matemáticos a la ingeniería de software

En esta sección mostramos la aplicación de herramientas para analizar el proceso de solución de un problema sencillo durante todo el ciclo de vida.

2.2.1 Captura de requerimientos

"Realizar un programa que encuentre un valor dentro de una lista ordenada".

ISSN 2448 – 7945

De la solicitud original, se obtiene el requerimiento funcional: se debe realizar una función que recibirá como parámetros: una lista ordenada y el valor a buscar; y regresará el índice de la posición que ocupa el valor dentro de la lista.

2.2.2 Diseño

Con base en la experiencia y tomando en cuenta la complejidad algorítmica, como la lista se recibe ya ordenada, se recomienda utilizar búsqueda binaria, dado que se ejecuta en tiempo $O(log_2(n))$, mientras que la búsqueda secuencial requiere $O(n)$. El algoritmo es sencillo:

- Comparar el valor buscado con el elemento central:
  - Si es mayor, buscar en la mitad superior con el mismo algoritmo
  - Si es menor, buscar en la mitad inferior con el mismo algoritmo
  - Si es igual, devolver el índice de dicho elemento central

Como lo ilustra la figura 1.

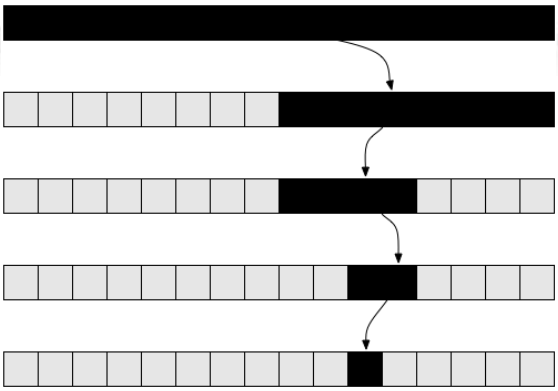


Figura 1. Ilustración de la búsqueda binaria, en negro se resalta la zona de búsqueda en el paso actual (imagen de https://bit.ly/3Oa4MYV).

función busqueda_binaria:
    recibe:
        lista, una lista ordenada valor, el elemento a buscar dentro de la lista
    devuelve:
        el índice que ocupa el valor dentro de la lista, -1 si el valor no se encuentra en la lista

De lo anterior se obtiene el pseudocódigo de la figura 2.

```
busqueda_binaria(lista, valor)
  ini <- 0
  fin <- tamaño(lista)
  mientras ini<=fin
    med <- truncar((ini+fin)/2)
    val_med <- lista[med]
```

ISSN 2448 – 7945

```
    si val_med<valor
      ini <- med+1
    otro si val_med>valor
      fin <- med-1
    si no
      regresar med
  regresar -1
```

Figura 2. Pseudocódigo obtenido en el diseño.

Podemos preguntarnos si es posible demostrar la correctitud del pseudocódigo presentado. La respuesta es afirmativa y justamente se puede utilizar un método matemático conocido como inducción, en este caso es una inducción sobre la configuración en cierto paso de la ejecución, esta configuración se da en términos de la lista accesible y los valores de los índices: *ini*, *fin* y *med*, como se observa en la figura 3.

```
En el paso i-ésimo, la lista accesible y las variables de acceso tienen la forma:
           ...   |                              m                                |   …
                 ^                              ^                                ^
              ini        med        fin

Se          revisan          los          tres          posibles          casos:
1. val_med < valor, indica que hay que buscar en la parte superior de la lista; la
nueva     configuración     de     la     lista     y     las     variables     es:
           ...   |                              m                                |   …
                           ^                                                     ^
                         ini                                                    fin
  Garantizando que ya no hay acceso a los índices menores que med y conservando
verdadera la condición del ciclo: ini<=fin

2. val_med > valor, es decir, hay que buscar en la parte inferior de la lista; la
nueva     configuración     de     la     lista     y     las     variables     es:
           ...     |                              m                                |   …
                ^                                                                  ^
              ini                                                                 fin
  Garantizando que ya no hay acceso a los índices mayores que med y conservando
verdadera la condición del ciclo: ini<=fin

3. val_med = valor, en este caso la configuración se mantiene sin cambios y la función
devuelve el valor actual de med, que es el índice buscado
```

Figura 3. Demostración de la correctitud del algoritmo.

En el caso extremo en que *ini*, *fin* y *med* tienen el mismo valor, se vuelven a revisar las tres condiciones, para las dos primeras, se cumplirá que *ini* > *fin*, provocando que el ciclo termine devolviendo -1 que indica que el valor buscado no se encuentra dentro de la lista.

2.2.3 Construcción

En esta etapa del ciclo de vida, se realiza la escritura del código en el lenguaje de programación elegido, para los fines de este trabajo, se eligió Python (figura 4).

ISSN 2448 – 7945

```python
def busqueda_binaria(lista, valor):
 """ recibe:
 lista, una lista ordenada
 valor, el elemento a buscar dentro de la lista
 devuelve:
 el índice que ocupa el valor dentro de la lista,
 -1 si el valor no se encuentra en la lista
 Pruebas con doctest:
 >>> busqueda_binaria([10, 33, 35, 49, 55, 59, 67, 68, 77, 96], 68)
 7
 >>> busqueda_binaria([10, 33, 35, 49, 55, 59, 67, 68, 77, 96], 33)
 1
 >>> busqueda_binaria([10, 33, 35, 49, 55, 59, 67, 68, 77, 96], 12)
 -1 """
 ini = 0
 fin = len(lista)
 while ini<=fin:
   med = (ini+fin)//2 # En Python 3 '//' indica división entera
   val_med = lista[med]
   if val_med < valor:
     ini = med+1
   elif val_med > valor:
     fin = med-1
   else:
     return med
 return -1
```

Figura 4. Código implementado usando Python.

En el código anterior, las primeras líneas corresponden a la documentación de la función; incluyen pruebas automáticas con una herramienta llamada *doctest* para poder verificar que nuestro programa cumple estas especificaciones.

2.2.4 Pruebas

En este paso, se ejecutan las pruebas automáticas definidas dentro del programa, al ejecutar las instrucciones de la figura 5, el resultado muestra que no hubo errores.

```python
import doctest
doctest.run_docstring_examples(busqueda_binaria, globals(), verbose=False)
```

Figura 5. Ejecución de las pruebas automáticas.

2.2.5 Implementación

La etapa de implementación, a su vez incluye el cierre y gestión de cambios. El código presentado hasta este punto cumple con el requerimiento, pero después de un tiempo se puede presentar un error en su funcionamiento. No es evidente cual es el problema, la figura 6 presenta la línea del código que se encarga de la obtención del valor medio (Bloch, 2016).

```python
(ini+fin)//2
```

Figura 6. Instrucción que puede generar un error.

ISSN 2448 – 7945

Para notarlo hay que recordar que los números en las computadoras se representan como cadenas de bits, supongamos una representación hipotética de cuatro bits sin signo. Con 4 bits, hay 16 combinaciones posibles de ceros y unos y los números que se pueden representar están en el rango [0, 15]. Si nos encontramos en el segundo paso de ejecución y el número buscado es mayor al central, entonces los valores de los índices son: *ini*=8 y *fin*=15. Para el cálculo del nuevo valor central se realizará la operación a nivel de bits tal como se muestra en la figura 7.

```
  1000   ini
 +1111   fin
  ----
1|0111   suma => ¡Sobreflujo! (overflow)
```

Figura 7. Ejemplo del error que puede generarse.

Este error de sobreflujo provoca que tengamos acceso a una sección equivocada de la lista, al dividir entre 2, obtenemos como resultado 3 debido a que no se utiliza el bit que indica el sobreflujo. Para evitar este comportamiento se debe cambiar la forma de obtener el valor medio evitando que la suma sobrepase el valor máximo que se puede almacenar. Para hacerlo exitosamente recurrimos nuevamente a un método matemático: realizamos un poco álgebra como se presenta en las ecuaciones 1 a 3.

$$ini+fin$$

Ecuación 1. Forma original de obtener el elemento medio

Sumando un cero $ini+fin+(ini-ini)$ y reagrupando:

$$ini+fin-ini$$

Ecuación 2.

Separando, finalmente:

$$fin-ini$$

Ecuación 3. Nueva manera de obtener el elemento medio

En la figura 8 se observa la sección del pseudocódigo que se modificó.

```
busqueda_binaria(lista, valor)
  ...
  med <- ini+truncar((fin-ini)/2)
  ...
```

Figura 8. Pseudocódigo actualizado.

ISSN 2448 – 7945

Con este cambio, se garantiza que no se presentará sobreflujo en el cálculo del valor medio. Al incorporarlo al programa, se obtiene la versión final, se presenta sin las líneas de documentación en la figura 9.

```python
def busqueda_binaria(lista, valor):
 ini = 0
 fin = len(lista)
 while ini<=fin:
   med = ini+((fin-ini)>>1) # En Python '>>' indica corrimiento a la derecha con lo
                            # que se obtiene también una división entre 2 a nivel de bits
   val_med = lista[med]
   if val_med < valor:
     ini = med+1
   elif val_med > valor:
     fin = med-1
   else:
     return med
 return -1
```

Figura 9. Código actualizado usando Python.

3. Resultados y análisis

Esta última versión resuelve los problemas mencionados no solamente para la búsqueda binaria sino para todos los códigos que dependen de la obtención del valor medio (como *mergesort*) y otros que lo pudieran requerir, aún más, lo realiza de forma eficiente debido a la sustitución de la división por el corrimiento.

Además la experiencia puede usarse en otros escenarios, el método de bisección para obtener las raíces de una expresión algebraica también funciona sobre el cálculo del valor medio, en este caso de punto flotante, pero debe implementarse de forma que se prevenga el sobreflujo: el algoritmo que obtuvimos aquí.

4. Conclusiones

A lo largo del artículo hemos podido ser reactivos a la forma en la que la programación se lleva a cabo, hemos mencionado algunas de las herramientas que se utilizan para el desarrollo del software, así como de algunas de las metodologías más implementadas en proyectos de software, sin embargo, también hemos podido incluir conceptos y técnicas matemáticas que si son bien adaptadas durante las primeras etapas del ciclo de vida e incluso durante todo su desarrollo, resultan beneficiosas para lograr resultados efectivos y eficientes.

Cuando llegamos a la etapa final queda plasmada la importancia que se tiene en el buen manejo de los conceptos iniciales, en donde la Ingeniería de Software tiene mucho campo para la investigación y que la inclusión de métodos matemáticos puede lograr grandes cambios justo en el ciclo de vida del software.

ISSN 2448 – 7945

"A pesar de que la idea básica de búsqueda binaria es relativamente sencilla, los detalles pueden ser sorprendentemente complicados... — Donald Knuth" [wikipedia].

5. Índice de referencias

Libros

- Zapotecatl-López, J.L. (2018). *Introducción al pensamiento computacional: conceptos básicos para todos*. Primera edición. Academia Mexicana de Computación, A. C.
- Pressman, R. S., Maxim, B. R. (2014): *Software engineering, a practitioner's approach*, Eighth Edition. New York: McGraw Hill Higher Education.
- Sommerville, I. (2016): *Software engineering*. Tenth Edition. New York: Pearson Education.
- Summers, B. L. (2011): *Software engineering reviews and audits*. Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Dawson, C. W. (2009): *Projects in computing and information systems, a student's guide*, Second Edition. Boston, Massachusetts: Addison Wesley.

Información en línea

- Dijkstra E. W. (s.f.) *On a methodology of design*. [versión electrónica]. Recuperado en febrero de 2024 de la dirección: https://www.cs.utexas.edu/users/EWD/transcriptions/EWD03xx/EWD317.html
- Bloch, J. (2006). *Extra, Extra - Read All About It: Nearly All Binary Searches and Mergesorts are Broken*. [versión electrónica]. Recuperado en febrero de 2024 de la dirección: https://blog.research.google/2006/06/extra-extra-read-all-about-it-nearly.html
- *Búsqueda binaria*. [En *Wikipedia*] Obtenido en febrero de 2024 de la dirección: https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=B%C3%BAsqueda_binaria&oldid=157088265

ISSN 2448 – 7945

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICAS CON ESTUDIANTES DE TERCER GRADO DE SECUNDARIA

Ibarra Rodríguez Juan Luis[1, *], Soto Campos Carlos Arturo [2]
[1 y 2]*Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.* Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, Carboneras, 42184 El Álamo, Hgo.

IP-POSM070

Resumen

El actual modelo educativo considera la resolución de problemas como una estrategia de aprendizaje para la enseñanza de contenidos y fomentar actitudes positivas en el estudio de las Matemáticas. En esta investigación se busca caracterizar e identificar las estrategias utilizadas por un grupo de 10 estudiantes de tercer grado de secundaria, en la modalidad de telesecundaria, con edades de 14 y 15 años, los cuales participaron de forma voluntaria en un taller de 20 sesiones con duración de 90 minutos, en donde se examinaron problemas de geometría aplicados en pruebas de la olimpiada de matemáticas del estado de Hidalgo. Este estudio tiene como objeto responder a la pregunta, ¿Cuáles son las estrategias que usan los estudiantes de tercer grado de telesecundaria al resolver problemas de matemáticas? Cabe señalar que durante el taller se utilizó el software GeoGebra como una herramienta de apoyo en donde los estudiantes interactúan con los objetos geométricos durante la representación de la información, la reflexión e identificación de regularidades, lo cual permite el diseño de una solución. El análisis de la información se basa en el marco de resolución de problemas, principalmente de las ideas de George Pólya, Santos Trigo y Alan Schoenfeld, centrando la atención en los procesos cognitivos puestos en práctica por los estudiantes en el planteamiento de problemas matemáticos, el uso de recursos y heurísticas, que permitan obtener una solución apropiada. La investigación desarrolló una metodología cualitativa para analizar las respuestas planteadas a los problemas propuestos. En este estudio se identifican los resultados obtenidos sobre la práctica educativa docente respecto a la resolución de problemas en el aula escolar, lo cual permite mejorar el desempeño y el aprendizaje de los alumnos al estudiar matemáticas en el nivel de secundaria.

Palabras clave: *Secundaria, análisis, estrategias, dificultades, problemas, aprendizaje*.

1. Introducción

El análisis de las estrategias de resolución de problemas (RP) es importante en términos didácticos, porque ofrece al docente medios para entender cómo piensan los estudiantes, conocer cuáles son las dificultades de aprendizaje e implementar acciones didácticas que le permitan afrontar estas dificultades.

[1] *Autor para la correspondencia. E-mail: ib156211@edu.mx Tel. 77-21-22-79-21*

ISSN 2448 – 7945

El implementar en el aula una enseñanza basada en la resolución de problemas, requiere al docente proveer a los estudiantes de una concepción de la matemática y una aproximación al hacer matemático, de acuerdo a sus posibilidades. La enseñanza debe ser vista como una comprensión conceptual más que el desarrollo mecánico de habilidades, fomentar en los estudiantes la habilidad de aplicar los contenidos que han aprendido con flexibilidad y criterio. El docente también debe proveer un amplio contenido de problemas, que vayan desde los ejercicios tradicionales, hasta los problemas abiertos y de exploración, ayudando a desarrollar "un punto de vista matemático" (Schoenfeld, 1992), caracterizado por la habilidad de analizar y comprender, de expresarse oralmente y por escrito con argumentos claros y coherentes. Por lo tanto, el docente debe preparar a los estudiantes para convertirse en aprendices independientes, intérpretes y usuarios de la matemática.

1.1. Antecedentes

En esta sección haremos una revisión de artículos de investigación basados en la resolución de problemas, como propuesta didáctica en la enseñanza de las matemáticas, los cuales se distinguen en diferentes líneas de interés, por ejemplo, el conocer las estrategias y dificultades, como puede verse en Shinariko et al. (2020), en donde se menciona que los errores ocurren porque las personas tienen diferencias de comprensión, conocimiento y otros aspectos. Esta investigación tuvo como objetivo identificar los errores cometidos por estudiantes al resolver problemas de la olimpiada de matemáticas. El marco teórico de este trabajo se basó en los tipos de errores identificados por Newman (1983, como se citó en White, 2010): (1) error de lectura, (2) error de comprensión, (3) error de transformación, (4) error de habilidad del proceso, y (5) error de codificación. Por otra parte, Flores-Mora (2012), menciona que el análisis de las estrategias de resolución de problemas es importante en términos didácticos, para entender cómo piensan sus estudiantes, conocer cuáles son las dificultades de aprendizaje e implementar acciones didácticas que les permitan afrontar esas dificultades. Se identificó que las estrategias más comunes utilizadas por los estudiantes son: la elaboración de una lista, tabla o diagrama, estrategias algebraicas, semi-algebraicas, operaciones aritméticas, ensayo y error, conteo, resolución de casos particulares y dibujar figuras; las menos utilizadas son la simplificación del problema, identificación de patrones y el uso de aritmética modular. En otro trabajo orientado a la investigación de la geometría Haryanti, Herman y Prabawanto (2019), identificaron algunos errores de los estudiantes al resolver los problemas de geometría. En dicho artículo, el principal error se encontró en los procesos de solución; al realizar operaciones de cálculo y transformar problemas en modelos matemáticos; en fórmulas como ilustraciones con imágenes. Los autores mencionan que el docente debe tener un papel activo para crear un aprendizaje significativo, ayudando a los estudiantes a dominar conceptos y habilidades de procedimientos relacionados con la geometría.

ISSN 2448 – 7945

2. Marco de investigación

La presente investigación tiene como objeto de estudio analizar y documentar las estrategias que emplean estudiantes de secundaria, en la modalidad de telesecundaria al resolver problemas de matemáticas. Con esto, se pretende contribuir a la mejora del aprendizaje de las matemáticas dentro del aula escolar mediante la resolución de problemas. El marco conceptual se estructura en torno a la propuesta de RP de Pólya (1965) en lo que se refiere a las cuatro fases para resolver un problema. Se consideran fundamentalmente las variables que influyen en el desempeño de los estudiantes al resolver problemas entre las que se encuentran los recursos y las heurísticas (Schoenfeld, 1985). Así también, la importancia de identificar un modelo de análisis de RP con el uso de uso de una herramienta digital (Santos, 2007).

Este trabajo se conforma por un marco conceptual, integrado por tres dimensiones fundamentales al abordar el aprendizaje de las matemáticas vía resolución de problemas, las cuales son: (a) *dimensión ontológica,* que corresponde a la concepción que se tiene de las matemáticas como la ciencia de los patrones (Steen, 1988), en donde el aprendizaje se entiende como una actividad que incluye identificar relaciones, formular conjeturas y justificarlas. (b) *Dimensión epistemológica,* donde se adopta una postura socio-constructivista, por el hecho de que reconocemos el rol que juega el sujeto en la construcción del conocimiento (Glasersfeld, 1995). El conocimiento se construye de lo concreto a lo abstracto, por medio de la interacción entre el sujeto-objeto a través de mediadores y herramientas tomadas en cuenta por el sujeto. (c) *Dimensión didáctica,* que plantea que las matemáticas se aprenden a través de la reflexión permanente, la retroalimentación, la implementación de diversas estrategias. Se concibe el aprendizaje basado en el descubrimiento, "*Se aprende matemáticas haciendo matemáticas"*, se pretende que el estudiante desarrolle procesos y habilidades de análisis, comprensión, razonamiento y aplicación e integración de saberes.

2.1. La enseñanza de las matemáticas.

El estudio de las matemáticas es una línea de investigación extensa en donde se tiene que partir desde el concepto de la disciplina y la importancia que representa para el ser humano. La NCTM (1989) indica que las matemáticas son una disciplina donde el individuo experimenta, observa, descubre, conjetura, formula problemas y estudia patrones o relaciones en diversos contextos.

En el estudio de las matemáticas es fundamental que el estudiante aprenda a formular preguntas y buscar distintas rutas que permitan encontrar soluciones que den respuesta a sus preguntas. Por lo tanto, diseñar un escenario didáctico y la implementación de tareas de aprendizaje orientado a la resolución de problemas, permite cumplir con el objetivo didáctico, el cual es, construir un aprendizaje por descubrimiento y desarrollar el pensamiento matemático en el estudiante.

ISSN 2448 – 7945

2. 2. Método de Alan Schoenfield.

Schoenfeld menciona que, cuando se trabaja con resolución de problemas como una estrategia didáctica hay que tener en cuenta situaciones más allá de las puras heurísticas; de lo contrario no funciona, no tanto porque las heurísticas no sirvan, sino porque hay que tomar en cuenta otros factores. El trabajo de Shoenfeld sugiere cuatro categorías, las cuales son:

- *Recursos*. Hacen referencia a las herramientas con las que cuenta el sujeto al resolver un problema. Se pueden caracterizar como los conocimientos previos que posee el individuo; se refiere a conceptos, fórmulas, algoritmos necesarios para resolver un determinado problema. Schoenfeld menciona tres tipos: (a) inventario de recursos, (b) circunstancias estereoscópicas, (c) recursos defectuosos y patrones de error consistentes.
- *Heurísticas.* Aprender a usar las heurísticas, no es suficiente para garantizar un desempeño competente en la resolución de problemas, se considera importante tener decisiones de control y sus efectos en el proceso de RP. Schoenfield analizó una serie de obstáculos que se producen por la complejidad de las heurísticas y el conocimiento necesario, identificando tres maneras: (a) las heurísticas generales (b) el uso exitoso de tales estrategias y toma de decisiones ejecutivas y un amplio repertorio de subhabilidades, (c) las heurísticas como guía para dominios relativamente desconocidos.
- *Control.* Se refiere a cómo el sujeto controla su trabajo. Si un estudiante ante un determinado problema ve una serie de caminos posibles para su solución, tiene que ser capaz de darse cuenta si el camino que seleccionó es funcional o no, es decir, el retroceder e intentar de nuevo por otra vía. Schoenfeld destaca la importancia de la habilidad de monitorear y evaluar el proceso al resolver problemas.

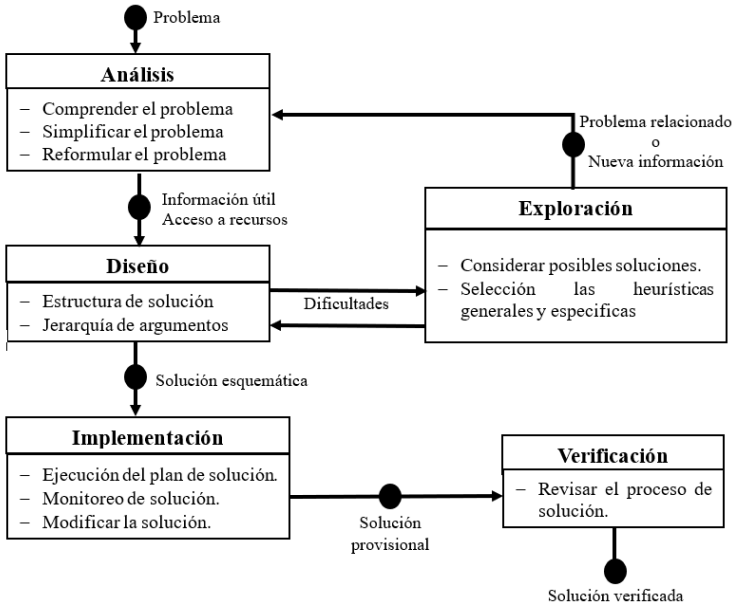


Figura 1. Acciones de control durante la resolución de problemas.

ISSN 2448 – 7945

- *Sistema de creencias.* Schoenfeld se enfoca en cómo el estudiante y los profesores abordan la argumentación matemática formal a la hora de resolver un problema. La argumentación matemática se puede usar en dos circunstancias: para confirmar algo que es intuitivamente obvio o para verificar algo que ya es cierto porque lo dice el profesor, algo que no es tan obvio pero que el profesor dice que es cierto. Las creencias condicionan aspectos relacionados con el aprendizaje de la matemática; a) determinan en el estudiante cuándo considera que debe enfocarse en conocimientos formales, b) determinan la forma en que tratan de aprender matemáticas memorizando.

3. Metodología

Este estudio se realizó con un grupo de 10 estudiantes de tercer grado de nivel secundaria en la modalidad de telesecundaria, con edades de 14 a 16 años. Dichos estudiantes participaron en un taller de Resolución de Problemas, el cual se desarrolló en 20 sesiones durante el periodo septiembre a noviembre del 2023. En ese taller se implementó el uso de reactivos de geometría de las pruebas de olimpiadas de matemáticas del estado de Hidalgo, en las fases 1 y 2, con el propósito de analizar los procesos de solución realizados por los estudiantes a los problemas planteados. Se realizaron dos pruebas: al inicio del taller con el propósito de diagnosticar el nivel de entendimiento respecto a la resolución de problemas. Posteriormente se realizó una prueba final para observar los avances y cambios de entendimiento al finalizar el taller. Finalmente, las respuestas de los estudiantes se sometieron al análisis con el objetivo de identificar las estrategias implementadas y las dificultades que experimentaron los estudiantes en las mismas.

Los problemas que se tomaron en cuenta son de Geometría, debido a que el estudio de esta disciplina de las matemáticas en el nivel de secundaria representa una diversidad de complicaciones para los estudiantes. Por otro lado, los problemas que tienen relación con la geometría permiten hacer un análisis amplio de conceptos y definiciones que pueden ser útiles para la resolución de los mismos.

Uno de los objetivos centrales de la olimpiada de matemáticas, es identificar y fomentar la capacidad de los participantes para resolver problemas. Los reactivos que se plantean en las pruebas de olimpiadas de matemáticas no son del tipo rutinario, es decir, problemas que pueden ser de sentido común para los estudiantes, ya que conocen la ruta solución, los cuales pueden ser similares a los que ven en el aula. Los problemas que se utilizan en este tipo de pruebas requieren el uso de métodos matemáticos no rutinarios para obtener una o varias soluciones. Otra de las características de los problemas es su grado de dificultad, el cual no radica en el conocimiento, sino en la habilidad del alumno para identificar el problema, organizar la información, seleccionar estrategias y la aplicación adecuada de conocimientos para identificar la ruta de solución.

ISSN 2448 – 7945

3.1. El uso de GeoGebra.

Durante el taller de RP se consideró el software dinámico GeoGebra, con el objetivo de apoyar al estudiante a representar de manera gráfica los problemas propuestos con la finalidad analizar, diseñar e identificar los procesos de solución. El uso de GeoGebra mejora la comprensión conceptual, la exploración activa y la visualización de objetos matemáticos. Así también, posibilita manipular gráficos, realizar transformaciones y observar estas nuevas representaciones generan nuevas estrategias de solución. Las herramientas digitales permiten al estudiante interactuar con la tecnología, en donde incrementa la motivación y la autoconfianza en el aprendizaje. Santos Trigo (2015) menciona que el uso de la tecnología se vuelve importante para construir modelos dinámicos de problemas con el fin de involucrar a los estudiantes en el proceso de reconocer patrones, en la búsqueda de argumentos para apoyar las relaciones matemáticas y en la presentación y comunicación de resultados, que reconocemos como los elementos básicos del aprendizaje de matemáticas.

El uso de GeoGebra como herramienta de aprendizaje, propicia poner en práctica los conocimientos previos y el desarrollo de formas de pensamiento matemático y del conocimiento de los estudiantes. Así también, que los profesores cuenten con herramientas útiles para resolver problemas matemáticos, de acuerdo al grado de complejidad, proporcionará oportunidades para la mejora de la enseñanza de las matemáticas a la comunidad escolar.

4. Resultados y análisis

Con base en las respuestas de los estudiantes se realizó un análisis de las heurísticas utilizadas por los estudiantes al resolver cada uno de los problemas. El análisis de las respuestas se llevó a cabo tomando los siguientes criterios: el entendimiento del problema, la identificación y estructuración de recursos, el uso de las citadas heurísticas para el diseño e implementación de la solución, ejecución técnica y solución de problema, así como también el identificar las dificultades a las que se enfrentó el estudiante.

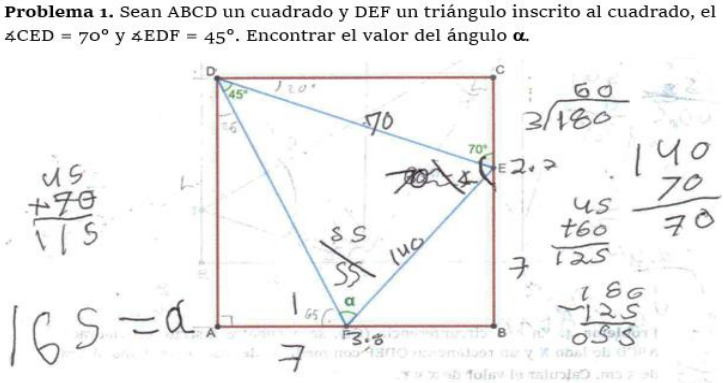


Figura 2. Prueba de diagnóstico.

De acuerdo con el análisis de las pruebas durante el primer momento de diagnóstico se puede observar que los estudiantes no tienen conocimiento de algunas definiciones

ISSN 2448 – 7945

y conceptos matemáticos, asimismo, desconocen la metodología de trabajo de resolución de problemas, lo cual imposibilita el diseño de un plan de ejecución que les permita obtener una solución correcta. Los resultados del diagnóstico pueden consultarse en el siguiente enlace. En el segundo momento de la prueba al final del taller se espera una mejora en el desempeño de los estudiantes, ya que se debe notar la identificación de recursos, el uso de trazos auxiliares que permitirán el diseño y justificación de sus respuestas a los problemas planteados, lo cual permite que el estudiante comunique sus resultados con una solución estructurada, en donde da a conocer sus ideas y demuestra el uso de conceptos matemáticos.

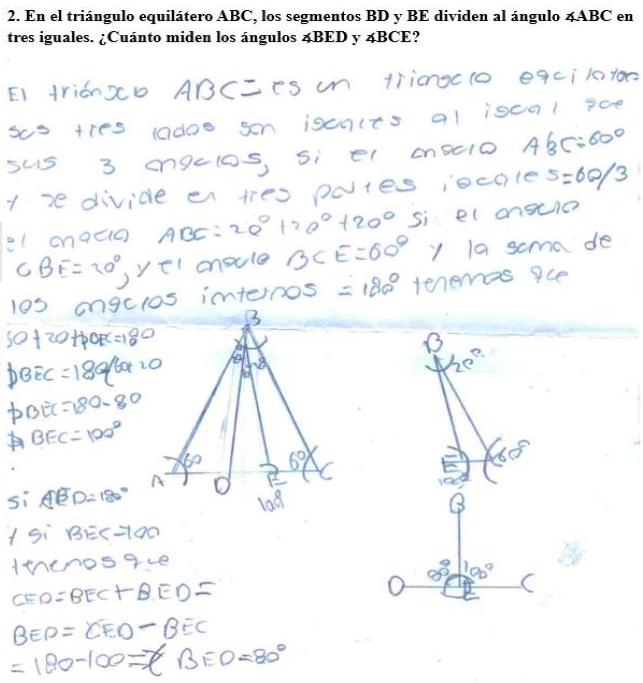


Figura 3. Reactivo 2. Prueba final del taller.

5. Conclusiones previas

El resolver problemas del tipo no rutinario para los estudiantes suele ser muy complejo dado que no conocen un proceso y metodología de resolución, lo cual genera confusión en los estudiantes respecto a la forma de resolver este tipo de reactivos. En las respuestas puede notarse el intento de identificar lugares geométricos, sin embargo, algunos estudiantes cometieron errores elementales de cálculo al asumir que las figuras geométricas analizadas se ajustaban a preconcepciones sobre las mismas. De esta manera, omitieron hacer consideraciones geométricas que les podrían haber ayudado a encontrar el resultado correcto. En algunos casos, el estudiante no sabe cómo calcular el resultado, porque desde su perspectiva, en el planteamiento del problema hace falta información. Por lo que, deciden proponer valores para resolverlo sin embargo dan solución a un caso particular y no logran encontrar la solución general para dicho problema.

ISSN 2448 – 7945

La resolución de problemas permite al estudiante hacer uso del conocimiento adquirido en el aula, así también realizar cambios en la forma de operar, razonar y de aprender matemáticas. Para el docente hacer uso de esta metodología, le facilita observar cambios en el desempeño de los estudiantes, además de aprender con ellos, asimismo el hacer cambios en la manera de enseñar matemáticas, haciendo uso de problemas del tipo no rutinario, lo cual será un reto para los estudiantes y el docente.

6. Agradecimientos.

Agradezco al CONAHCYT por el apoyo económico brindado durante la realización de este proyecto de investigación. Agradezco al AMyF del ICBI que pertenece a la UAEH, institución de enorme calidad educativa, que me brindó todo el apoyo durante mi estancia.

7. Índice de referencias

- Flores, G. (2012). Estrategias utilizadas por estudiantes de secundaria y bachillerato para resolver problemas de la olimpiada de matemáticas (Tesis Maestría). Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH). México.
- Glasersfeld, E. (1995) A constructivist approach to teaching. In: Steffe L. P. & Gale J. (eds.) Constructivism in education. Erlbaum, Hillsdale: 3–15. Available at http://www.vonglasersfeld.com/172
- Haryanti, M., Herman, T. y Prabawanto, S. (2019), Analysis of students' errors in solving mathematical word problems in geometry. Journal of Physics: Conference Series.
- NCTM, N. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. United States of America. https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/
- Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.
- Santos Trigo, L. M. (2007). La resolución de problemas matemáticos: Fundamentos cognitivos. Ciudad de México: Trillas.
- Santos Trigo, L. M. (2015). La resolución de problemas matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales. Conferencia Interamericana de Educación matemática.
- Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Orlando: Academic Press.
- Shinariko, L. J., Saputri, N. W., Hartono, Y. & Araiku1, J. (2020), Analysis of students' mistakes in solving mathematics olympiad problems. Journal of Physics: Conference Series. No. 1480.
- Steen, L. A. (1988). The science of patterns. Science. Vol. 240. Doi: 10.1126/science.240.4852.611
- White, A. (2010). Numeracy, Literacy and Newman's Error Analysis. Allan Leslie White Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia, Vol. 33 No. 2, 129 - 148. https://www.ommenlinea.org/

ISSN 2448 – 7945

ANÁLISIS DE PARÁMETROS MATEMÁTICOS EN EMG: INFLUENCIA EN LA DIFERENCIACIÓN DE MOVIMIENTOS EN MIEMBRO SUPERIOR

Amezquita Garcia José Alejandro [1] , Murrieta-Rico Fabian N. [2,*], Ezrre Gonzalez Sharon [3], Gómez Caraveo Alexandra [4] y Bravo Zanoguera Miguel Enrique [5]
[1,2,5]*Universidad Politécnica de Baja California. Av Claridad, Plutarco Elías Calles, 21376 Mexicali, B.C.*
[3,4] *Universidad Autónoma de Baja California. Blvd. Benito Juárez S/N, Parcela 44, 21280 Mexicali, B.C.*

EN-POSM072

Resumen

El movimiento musculoesquelético de miembro superior del ser humano es de interés científico, la importancia de este radica en que permite desarrollar la mayoría de las actividades de la vida diaria razón por la cual se han generado controles y aplicaciones digitales que especializan los movimientos. Las características que se han buscado descifrar y controlar son modulación del movimiento en rapidez, fuerza y especificidad, sin embargo, la propia naturaleza de estas señales EMG impide su manipulación, aún no se descubre de forma eficiente como se pueden conducir estas señales actuantes de forma artificial. Para abordar estos retos se han evaluado y cuantificado los parámetros matemáticos que mejor describen las características del movimiento y que mejor diferencian las clases a partir del EMG. Se busca observar los efectos de las operaciones matemáticas sobre la información en una base de datos Capgmyo. Se seleccionaron 5 sujetos calculando los porcentajes de reconocimiento con un algoritmo de clasificación QDA, los centroides de las distribuciones de las clases y la distancia Mahalanobis de estos centroides a cada distribución. El estudio se realizó en dos etapas una con los datos crudos considerando los 128 electrodos, y dos se calcularon parámetros como MAV, WL, SSC, RMS y ZC a través de un ventaneo. Además, para cada etapa se utilizó un método de selección de características que nos permitió definir las mejores 3 características para observar la distribución de los datos en el espacio y el porcentaje de reconocimiento. Se obtuvieron resultados prometedores utilizando una validación cruzada 10x10 observando la información extraída de la base de datos, aunque el costo computacional es mayor el uso de técnicas de preprocesamiento permiten una mayor diferenciación de las clases, la característica que más información extrae para poder aportar información útil a un modelo de clasificación clásico como QDA es RMS.

Palabras clave: *Electromiografía, Distribución, clasificación, modelos.*

1. Introducción

Las señales de electromiografía (EMG) de movimientos musculoesqueléticos, obtenidas en tiempo-real, han sido utilizadas para el desarrollo de dispositivos

1 *Fabian N. Murrieta-Rico. E-mail: FNMURRIETAR@upbc.edu.mx

ISSN 2448 – 7945

protésicos. No obstante, la naturaleza estocástica de las señales de EMG, impide la identificación de patrones individuales para cada uno de los movimientos analizados, dificultando el control de dichos dispositivos (Stival et al. 2019).

En particular, el desarrollo de brazos protésicos completamente funcionales se complica por el número de articulaciones y rangos específicos de movimiento, pudiendo decir que el miembro superior se encuentra entre las herramientas más complejas del cuerpo (Chahid et al. 2020). Para garantizar la calidad y el funcionamiento de los dispositivos externos, es necesario clasificar con precisión las actividades musculares del mayor número de movimientos diferenciables para facilitar el procesamiento de la información y predecir las necesidades del usuario. En la literatura se describen algunos trabajos que involucran el reconocimiento de los movimientos musculares para comprender los EMGs de un número de gestos de mano de manera eficiente, aplicando métodos matemáticos para el reconocimiento de los patrones que mejoren el control de los brazos protésicos. Podemos clasificar los métodos existentes de reconocimiento de movimientos de EMGs en dos categorías, aquellos que segmentan la secuencia de señales para luego extraer las características descriptivas de los segmentos y aquellos que utilizan el aprendizaje automático o profundo. Sin embargo, estos últimos dependen en gran medida de la configuración de las funciones matemáticas (Simão et al. 2019, Chahid et al. 2020).

Diferentes autores han reportado la extracción característica de los patrones de movimientos para un cierto número de clases de EMGs de antebrazo. En Hye et al. (2023), utilizaron el aprendizaje automático combinado con métodos para la extracción de características en la base de datos 1 de Ninapro, logrando una clasificación del 89.84% y 95.04% mediante la incrustación de vecinos estocástica distribuida (t-SNE), en comparación con el algoritmo de K-vecinos más cercanos (KNN) con un 93.17% y 97.45%, en ambos para intersujetos e intrasujetos, respectivamente. En Asogbon et al. (2020), los autores desarrollaron un sistema en tiempo-real para la obtención de EMGs de sujetos sin amputación y con amputación transradial o transhumeral. La extracción de las señales se realizó con 16 métodos matemáticos donde sobresalieron el nuevo conjunto de dominios en el tiempo (NTDFS), descriptores espectrales de potencia en el dominio del tiempo (TD-PSD) y dominio cuádruple AR6 (TDAR6) con clasificaciones del 99.38%, 96.71% y 95.28%, respectivamente, para los movimientos realizados por amputados. En Chahid et al. (2020), la cuantización de la matriz de pesos posicionales (QuPWM) se utilizó para la clasificación multi-clase de 8 gestos de la base de datos CapgMyo, obteniendo clasificaciones de hasta un 87%. En Yu et al. (2021), utilizaron la estrategia de aprendizaje de transferencia (TL) para el reconocimiento instantáneo de los gestos de CapgMyo y NinaPro, mejorando la precisión promedio del reconocimiento de nuevos sujetos y gestos en un 18.7 % y un 8.74 %, respectivamente.

En este trabajo se presenta la necesidad de expresar los efectos de las operaciones matemáticas sobre la base de datos CapgMyo, para tareas de clasificación y su impacto en la extracción de características a través de los

ISSN 2448 – 7945

parámetros calculados para separar la distribución espacial de los datos. La observación del espacio de la información extraída posibilita la determinación de cómo estas operaciones facilitan la tarea de los clasificadores, permitiendo utilizar clasificadores más simples, con el mismo rendimiento que los clasificadores sofisticados.

2. Metodología

En el análisis de datos se ha buscado generar estrategias para mejorar la calidad de la información. Cuando hablamos de señales eléctricas musculares, se ha descubierto que las señales crudas no proveen suficiente información para ser utilizadas en tareas de clasificación para el control de aplicaciones o dispositivos como prótesis multifuncionales. En este trabajo se presenta una estrategia para el análisis de los datos de EMGs de la base de datos y como algunas operaciones características en el dominio del tiempo pueden ayudar a extraer la información característica de los movimientos, el panorama general de esto se muestra en la figura 1.

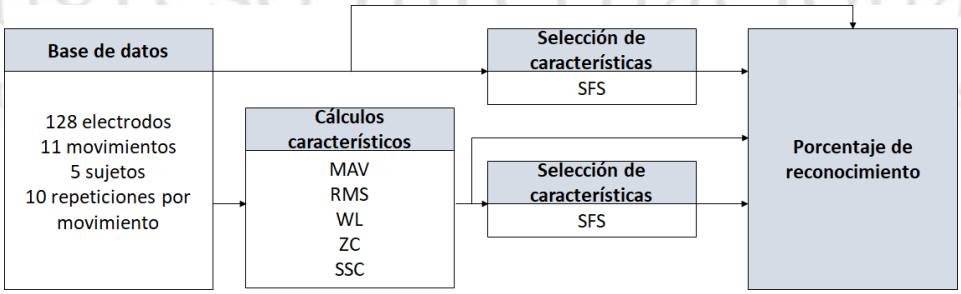


Figura 1. Procesamiento implementado para el análisis de los datos.

2.1 Descripción de la Base de datos

Se utilizaron los datos crudos de la base de datos seleccionada CapgMyo Db-b que consta con 11 movimientos, de los cuales se utilizaron solo 8 clases haciendo aún lado la primera etiqueta de reposo y las dos últimas de fuerza, tal y como se muestra en la figura 2 donde se puede observar una representación gráfica de la selección de movimientos.

Cuando se trata con bases de datos de alta definición, se cuenta con un número alto de electrodos disponibles, por lo que es importante identificar la calidad de las señales generadas por los electrodos en función a los movimientos seleccionados y a su posición anatómica. La naturaleza de la adquisición y de la propia señal da la oportunidad de encontrar las regiones que serán importantes sin ser lo suficientemente específicas pudiendo utilizar algoritmos de selección de características para determinar si la información de los electrodos es relevante para la generación del modelo de clasificación; propiedad que nos permite visualizar la distribución de los datos en el espacio. Métodos como la selección secuencial hacia adelante (SFS) que utiliza el porcentaje de

ISSN 2448 – 7945

reconocimiento como variable de salida, permiten determinar la calidad de la información entregada a un modelo y determinar su relevancia.

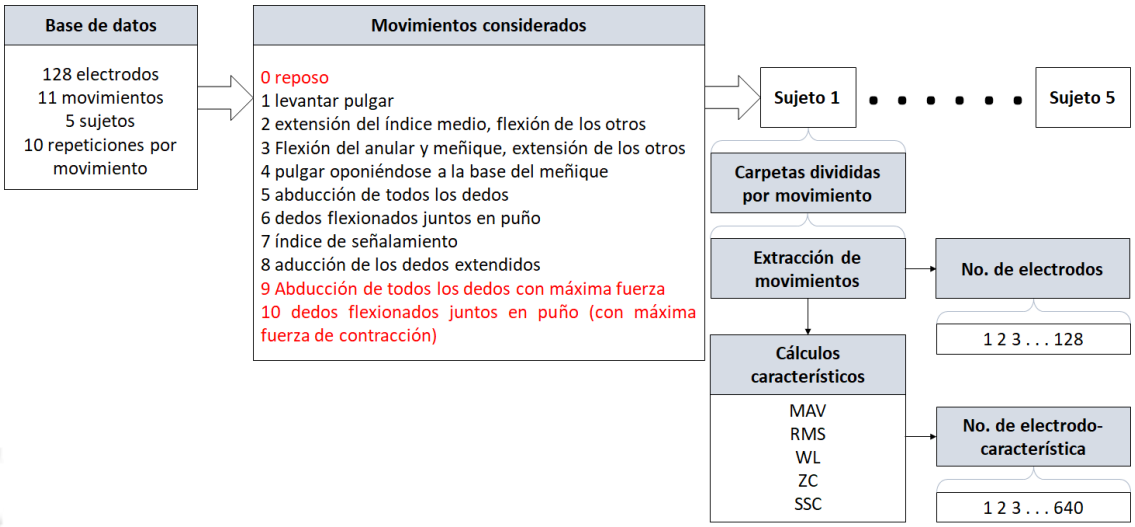


Figura 2. Descripción y configuración de la base de datos utilizada.

En la figura 3 se observan los dos ejes de esta investigación. Primero, se realizó la selección de los electrodos más relevantes utilizando SFS y visualizando la distribución de los datos en 3 dimensiones. Posteriormente, se utilizaron parámetros matemáticos para extraer información de las señales crudas de EMG, seleccionar los electrodos-características más importantes, y observar la distribución de los datos con estas características. Además, se calcularon los centroides de cada una de las distribuciones de las clases consideradas y las distancias Mahalanobis del centroide de cada clase entre sí, para ambos ejes.

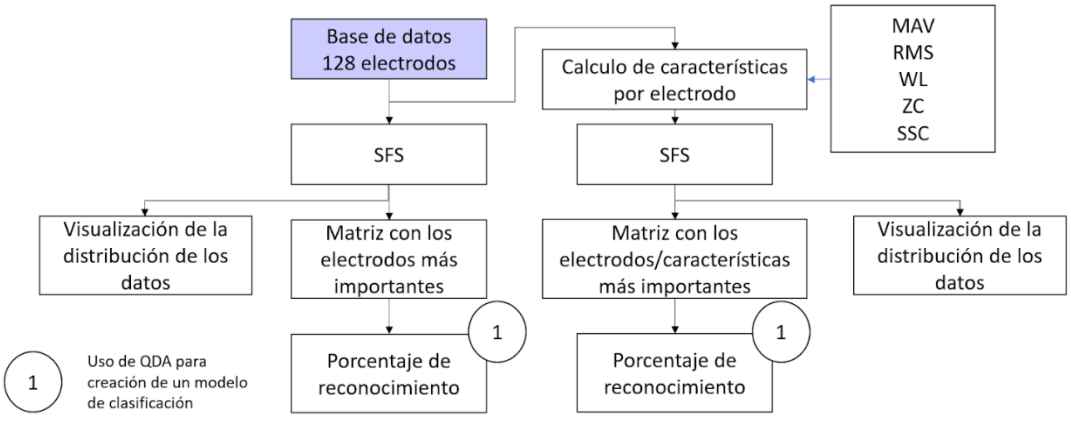


Figura 3. Descripción del procesamiento realizado.

2.2.1 Selección secuencial hacia adelante (SFS)

La SFS es un método iterativo para la selección de características y la reducción de la dimensionalidad, que evalúa cada una de las características que se plantean considerar

ISSN 2448 – 7945

para la creación de un modelo de clasificación mediante la evaluación de la función de costo, iniciando con un conjunto vacío y evaluando cada uno de los parámetros de forma secuencial como se observa en el pseudocódigo de la tabla 1.

Tabla 1 Pseudocódigo para la implementación de SFS.

```
Función SFS(datos, k):
    características_seleccionadas = conjunto vacío
    características_restantes = conjunto de todas las características
    mejor_característica = nulo

    Mientras longitud(características_seleccionadas) < k:
        mejor_incremento = -infinito

        Para cada característica en características_restantes:
            características_temporales = características_seleccionadas unión {característica}
            modelo = entrenar_modelo(datos, características_temporales)
            desempeño_temporal = evaluar_modelo(modelo, datos)
            incremento = desempeño_temporal - desempeño_actual

            Si incremento > mejor_incremento:
                mejor_incremento = incremento
                mejor_característica = característica

        Si mejor_incremento <= 0:
            Detener el bucle

        características_seleccionadas = características_seleccionadas unión {mejor_característica}
        características_restantes = características_restantes - {mejor_característica}

    Devolver características_seleccionadas
end
```

2.3 Modelos de clasificación

Los modelos de clasificación son una parte importante del aprendizaje automático, nos ayudan a separar clases dentro de un conjunto de datos. Su objetivo es entrenar un algoritmo para que pueda aprender patrones inherentes en los datos para luego hacer predicciones con nuevos conjuntos de datos. Los modelos son entrenados con un conjunto de entrenamiento y luego son probados con un conjunto de prueba para validar la eficiencia del clasificador. En los últimos años, se ha buscado desarrollar clasificadores robustos utilizando aprendizaje profundo, redes neuronales, máquinas de soporte vectorial; sin embargo, métodos clásicos que son más simples han sido dejados de lado, perdiéndose la capacidad de utilizar modelos simples que pueden ser tan eficientes como los robustos, siempre y cuando se mejore la calidad de la información que se les proporciona. Los modelos de clasificación cuadráticos utilizados en este trabajo son un grupo de clasificadores que utilizan el teorema de Bayes para realizar clasificaciones en un espacio de características cuadrático. Estos modelos son útiles cuando la relación entre las características y las clases no es lineal, lo que significa que la decisión óptima no puede ser representada de manera efectiva por un hiperplano. Estos modelos asumen que las distribuciones de probabilidad de las

ISSN 2448 – 7945

características de las distintas clases pueden ser modeladas como distribuciones gaussianas multivariadas.

2.3.1 Validación cruzada

Una forma de validar los resultados de los modelos de clasificación cuando se cuida que los resultados no estén sesgados por la forma en la que se dividieron, ya sea para entrenamiento y prueba se utiliza la validación cruzada. Este método particiona los datos en 10 partes, 9 de ellas son utilizadas para entrenamiento (creación del modelo de clasificación) y una parte para prueba, donde el modelo es probado con datos que no participaron en la prueba, esta etapa se realiza 10 veces donde la parte de prueba se va avanzado secuencialmente en cada ciclo para que todos los datos sean utilizados como prueba y como entrenamiento.

2.4 Cálculo de parámetros

La señal eléctrica muscular presenta una naturaleza cuasiestocastica, el origen de esta señal inicia con la señalización de sistema nervioso central para generar un movimiento, donde cada movimiento involucra a un número n de músculos, cada músculo contiene m fibras musculares y cada fibra muscular es productora de un impulso eléctrico durante su contracción. La señal es adquirida con electrodos superficiales colocados sobre la piel de la región muscular involucrada, razón por la cual es necesario calcular parámetros de la propia señal para poder extraer información que nos permita hacer una clasificación, mientras mejor es la característica extraída de la señal mejores modelos de clasificación son obtenidos.

En la literatura encontramos investigaciones que evalúan diferentes tipos de parámetros para extraer información de las señales eléctricas musculares, generalmente se dividen en parámetros en el dominio del tiempo, de la frecuencia y en tiempo/frecuencia (Toledo-Pérez et al. 2023). En este trabajo se consideraron 5 características calculadas en el dominio del tiempo de las más citadas (Afroza et al. 2023, Simão et al. 2019, Toledo-Pérez et al. 2023), valor absoluto medio, longitud de onda, cambio de signo de pendiente, valor efectivo de la señal, y cruces por cero, aunque la mayoría de estos parámetros expresan energía de la señal, otros expresan mediciones sobre la frecuencia en el dominio del tiempo.

En el estudio realizado se extrajeron y calcularon un total de 5 parámetros, mostrados en la tabla 2 para cada uno de los electrodos utilizados. Estos cálculos permiten extraer información relevante de la señal sEMG cruda, para favorecer la clasificación que utiliza el algoritmo SFS.

2.5 Visualización de la distribución de datos y Distancia Mahalanobis

La visualización de la distribución de los datos implica representar gráficamente las características o variables de un conjunto de datos en un espacio multidimensional. Esta visualización es importante para comprender la estructura de los datos, vislumbrar patrones, encontrar relaciones entre variables. Una vez que se han visualizado las

ISSN 2448 – 7945

distribuciones de los datos, es común calcular los centroides de cada una de las clases. Los centroides son puntos que representan el centro geométrico o promedio de un conjunto de datos en un espacio multidimensional, son utilizados para definir agrupaciones de los datos usualmente utilizados en tareas de clasificación.
Otro parámetro usualmente utilizado en tareas de análisis de datos es el uso de la distancia Mahalanobis. Esta medida, a diferencia de la distancia euclidiana, tiene en cuenta la correlación entre las variables y la varianza de los datos en cada dimensión.

Tabla 2 Parámetros utilizados para la clasificación con SFS.

	Parámetros	
No.	*Descripción del parámetro*	*Expresión matemática*
1	**Valor absoluto medio (MAV):** Es el promedio del valor absoluto de una ventana en la señal sEMG. (Abbaspour,2024;Asogbon,2020;C.Tepe,2022)	$\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}\lvert X_n\rvert$
2	**Valor efectivo de la señal (RMS):** La raíz cuadrática media (RMS) indica principalmente la magnitud absoluta de la señal sEMG, se relaciona con la fuerza constante y contracción sin fátiga (Faisal A, 2024; Asogbon,2020).	$\sqrt{\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}X_n^2}$
3	**Longitud de onda (WL):** Brinda información sobre la complejidad en la ventaja de la señal sEMG (Abbaspour,2024; Asogbon,2020)	$\sum_{n=1}^{k-1}[f(\lvert X_{n+1}-X_n\rvert)]$
4	**Cruce por cero (ZC):** Número de veces que el signo de la señal sEMG cambia (Abbaspour,2024; Asogbon,2020).	$\sum_{n=2}^{k-1}[f(X_n-X_{n-1})*(X_n-X_{n+1})]$
5	**Cambio de signo de pendientes (SSC):** Es el número de veces que la pendiente de la señal sEMG cambia de signo. (Faisal A., 2024; Asogbon,2020).	$\sum_{n=1}^{k-1}[sgn(X_n*X_{n+1})\cap(X_n-X_{n+1})\geq Thr.]$

3. Resultados y análisis

Como se establece en la metodología, se presentan los resultados: la selección de características con el algoritmo SFS con los datos de los electrodos y con los datos de electrodos-características (Tabla 3). También se muestra el uso del subconjunto de características calculadas en la tabla 3 para los dos conjuntos de datos: electrodos crudos 128 y electrodo-característica 640 utilizando un algoritmo de validación cruzada. Se

ISSN 2448 – 7945

calcularon los porcentajes de clasificación para cada sujeto (Tabla 4). De igual forma se visualizaron las distribuciones de los datos Figura 4.

La Tabla 3 se obtuvo a partir del pseudocódigo de la Tabla 1 utilizando todos los datos de cada uno de los sujetos para evaluar las características que son relevantes para el algoritmo de clasificación. Se observa como existe un aumento significativo entre el porcentaje de reconocimiento con el uso de los datos crudos en comparación con las características calculadas a través de los parámetros seleccionados.

Tabla 3. Resultados del algoritmo de reconocimiento QDA aplicando SFS para realizar una selección de atributos tanto en los datos crudos como con los parámetros seleccionados.

Selección	SFS Número de electrodos	QDA	SFS Número de características	QDA
Sujeto 1	87	71.01	18	99.26
Sujeto 2	97	69.40	31	98.53
Sujeto 3	61	81.30	89	99.51
Sujeto 4	83	74.14	89	99.56
Sujeto 5	115	75.04	13	94.44

Utilizando el método de validación cruzada 10x10 los resultados validados de los modelos cuadráticos generados se observan en la tabla 4.

Tabla 4. Resultados del algoritmo de reconocimiento QDA utilizando los datos completos y el subconjunto generado a partir de la tabla 2.

	128 electrodos	Subconjunto seleccionado	QDA promedio prueba	640 características	Subconjunto seleccionado	QDA promedio prueba
Sujeto 1	0.68699721	87	0.709557	0.492462623	18	0.981602107
Sujeto 2	0.689236273	97	0.693960	0.410395802	31	0.977803598
Sujeto 3	0.812634378	61	0.812847	0.375460689	89	0.89135732
Sujeto 4	0.833506581	83	0.84119	0.579412137	89	0.971516277
Sujeto 5	0.749682426	115	0.750318	0.336433663	13	0.932745545

En la figura 4 a) se observa la distribución de los datos en el espacio para los mejores 3 electrodos según el algoritmo de selección secuencial hacia adelante. No se observa una separación clara de los datos, sin embargo, con el promedio calculado de electrodos utilizados se tiene un porcentaje en promedio de x. En b) se pueden observar las distribuciones de los datos considerados en función de las tres principales características, permitiendo al clasificador llegar a valores del 99% como se observa en la tabla 3 con un promedio de características de x.
Con la distribución de las clases en función a las características y habiendo calculado los centroides con solo 3 dimensiones, se calculó la distancia Mahalanobis entre cada una de las clases. En la tabla 5 se observan la distancia máxima encontrada entre los movimientos 1 y 2 de las combinaciones de movimientos para los 5 sujetos y la distancia mínima indicativo de que las clases no se han diferenciado debidamente con los movimientos 2 y 4.

ISSN 2448 – 7945

Tabla 5. Extracción de los datos donde figuran las distancias máximas y mínimas de los diferentes centroides de clases a partir de la experimentación.

Relación de movimientos	Suj 1	Suj 2	Suj 3	Suj 4	Suj 5	Promedio
Mov1-Mov2	2.9071	3.0583	3.1053	2.9290	2.1722	2.8344
Mov2-Mov4	1.1440	1.1606	0.591	0.5320	0.6318	0.8119

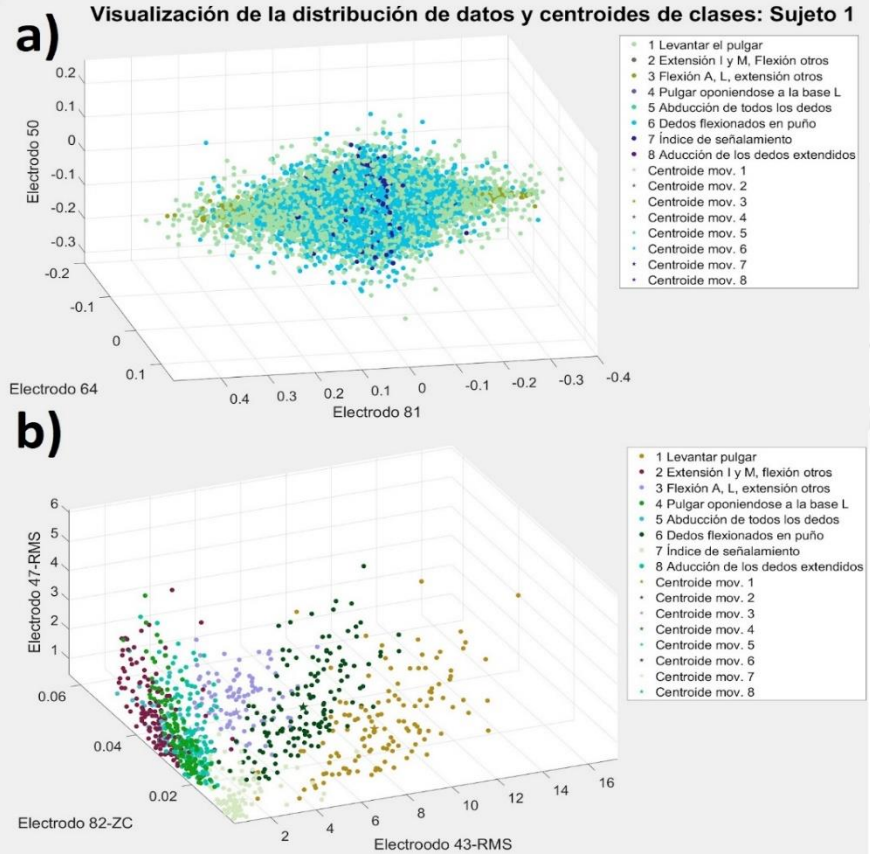


Figura 4. Distribuciones de datos a) los primeros tres electrodos en orden de importancia seleccionados con SFS, b) los primeros 3 electrodos característica según SFS del sujeto 1.

En la tabla 5 se enlistan las primeras 3 características por sujeto y las cuales fueron utilizadas para visualizar la distribución de los datos de los 5 sujetos.

ISSN 2448 – 7945

Tabla 5. Se muestran las primeras 3 características determinadas por el algoritmo SFS, para cada sujeto.

Características					
	Sujeto 1	Sujeto 2	Sujeto 3	Sujeto 4	Sujeto 5
Dimensión 1	RMS	WL	SSC	MAV	MAV
Dimensión 2	ZC	ZC	RMS	RMS	RMS
Dimensión 3	RMS	RMS	MAV	RMS	ZC

Como se observa, al menos 1 vez aparece la característica RMS en cada uno de los sujetos.

4. Conclusiones

Los métodos de extracción de características juegan un papel importante en la generación de modelos de clasificación eficientes, es posible utilizar parámetros matemáticos que describan la información detalladamente cuando las señales son tan aleatorias para ser utilizadas en modelos de clasificación. Además, los métodos de visualización nos ayudan a comprender la distribución de los datos para ejecutar técnicas de preprocesamiento. La oportunidad de observar los datos y sus distribuciones nos permite encontrar las semejanzas de las señales de los participantes, si contáramos con información extra sobre la base de datos utilizada como por ejemplo el índice de masa corporal podríamos clasificar a los sujetos y concluir más detalladamente sobre cómo se distribuyen los datos por la morfología de los participantes.
Una de las características que más información proporcionó sobre la base de datos procesada fue el valor RMS, seguida de MAV y ZC y terminando con WL y SSC.
Es importante analizar la selección de los parámetros encontrados y definidos como importantes, ya que como la señal no dice mucho es necesario extraer información de esta, una forma es calculando parámetros que nos hablan de la energía de la señal, que nos dicen si la razón de cambio en la señal es diferente para cada movimiento, si la varianza propia de la señal nos dice o da pistas sobre el tipo de movimiento que se está realizando.
Se pudo observar que no necesariamente contar con más características es sinónimo de mejor rendimiento, utilizando el clasificador cuadrático junto al algoritmo de selección de características se observó que contar con características de más es perjudicial para el modelo de clasificación cuadrático, reduciendo casi un 50% de reconocimiento a los datos de prueba.

5. Referencias

- Abbaspour S, Lindén M, Gholamhosseini H, Naber A, Ortiz-Catalan M.(2020) Evaluation of surface EMG-based recognition algorithms for decoding hand

ISSN 2448 – 7945

movements. Med Biol Eng Comput.;58(1):83-100. doi: 10.1007/s11517-019-02073-z. Epub 2019 Nov 21. PMID: 31754982; PMCID: PMC6946760

- Afroza, S., Farruk, A., & Md. Shafiul, A. (2023). A systematic review on surface electromyography-based classification system for identifying hand and finger movements. *Healthcare Analytics*, *3*, 100126. https://doi.org/10.1016/j.health.2022.100126
- Asogbon, M. G., Samuel, O. W., Jiang, Y., Wang, L., Geng, Y., Sangaiah, A. K., Chen, S., Fang, P., & Li, G. (2020). Appropriate Feature Set and Window Parameters Selection for Efficient Motion Intent Characterization towards Intelligently Smart EMG-PR System. *Symmetry*, *12*(10), 1710. https://doi.org/10.3390/sym12101710
- Chahid, A., Khushaba, R., Al-Jumaily, A., & Laleg-Kirati, T.-M. (2020). *A Position Weight Matrix Feature Extraction Algorithm Improves Hand Gesture Recognition*. *2020*, 5765–5768. https://doi.org/10.1109/EMBC44109.2020.9176097
- C. Tepe, M.C.(2022) Demir, Real-Time Classification of EMG Myo Armband Data Using Support Vector Machine, IRBM, Volume 43, Issue 4,Pages 300-308, ISSN 1959-0318, https://doi.org/10.1016/j.irbm.2022.06.001.
- Faisal Amin, Asim Waris, Javaid Iqbal, Syed Omer Gilani, M. Zia Ur Rehman, Shafaq Mushtaq, Niaz Bahadur Khan, M. Ijaz Khan, Mohammed Jameel, Nissren Tamam,(2024). Maximizing stroke recovery with advanced technologies: A comprehensive assessment of robot-assisted, EMG-Controlled robotics, virtual reality, and mirror therapy interventions, Results in Engineering, Volume 21, 101725, ISSN 2590-1230, https://doi.org/10.1016/j.rineng.2023.101725.
- Hye, N. M., Hany, U., Chakravarty, S., Akter, L., & Ahmed, I. (2023). Artificial Intelligence for sEMG-Based Muscular Movement Recognition for Hand Prosthesis. *IEEE Access*, *11*, 38850–38863. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3267674
- Simão, M., Mendes, N., Gibaru, O., & Neto, P. (2019). A Review on Electromyography Decoding and Pattern Recognition for Human-Machine Interaction. *IEEE Access*, *7*, 39564–39582. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2906584
- Stival, F., Michieletto, S., Cognolato, M., Pagello, E., Müller, H., & Atzori, M. (2019). A quantitative taxonomy of human hand grasps. *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, *16*(1), 28. https://doi.org/10.1186/s12984-019-0488-x
- Toledo-Pérez, D. C., Rodríguez-Reséndiz, J., Gómez-Loenzo, R. A., & Jauregui-Correa, J. C. (2019). Support Vector Machine-Based EMG Signal Classification Techniques: A Review. *Applied Sciences*, *9*(20), 4402. https://doi.org/10.3390/app9204402
- Yu, Z., Zhao, J., Wang, Y., He, L., & Wang, S. (2021). Surface EMG-Based Instantaneous Hand Gesture Recognition Using Convolutional Neural Network with the Transfer Learning Method. *Sensors*, *21*(7), 2540. https://doi.org/10.3390/s21072540

ISSN 2448 – 7945

UN ESTUDIO DEL CONCEPTO DE VARIACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE TIPO GEOMÉTRICO

López Hernández José Luis [1*]
Escuela Nacional Preparatoria, Plantel 6
Universidad Nacional Autónoma de México

IP-POSM074

Resumen

En este artículo se reportan los resultados del trabajo llevado a cabo por estudiantes de bachillerato que cursaban la asignatura Matemáticas V, al resolver actividades en torno al concepto de variación desde la Geometría, diseñadas e implementadas primero en el ambiente de lápiz-y-papel y después en el ambiente tecnológico GeoGebra, las cuales son de carácter colaborativo, de reflexión y análisis de los procedimientos con el fin de lograr aprendizajes significativos en los estudiantes.
Se toma como marco de referencia el estudio de Radford (2012, p. 284) sobre la mediación del artefacto, que consiste en que el usuario piensa con el artefacto y a través de éste; así, el sujeto modifica el artefacto y éste modifica el pensamiento del usuario.
Los resultados muestran que la propuesta implementada ofrece mejoras significativas en el aprendizaje del concepto de variación.

Palabras clave: *Variación, geometría, GeoGebra, resolución de problemas.*

1. Introducción

Es importante que el estudio de las variables y del concepto de variación se lleve a cabo a partir de la educación básica para fomentar en los estudiantes pensamiento crítico y reflexivo al enfrentarse a tareas en las que están inmersos procesos de variación y cambio. Sin embargo, por lo general se enseña por medio de algoritmos y carece de argumentos visuales y geométricos.
Atendiendo esta problemática, se ha introducido el uso de la tecnología en el diseño e implementación de actividades para ser resueltas por parte de los estudiantes primero en ambiente de lápiz-y-papel y después en ambiente tecnológico GeoGebra, con el interés observar cómo llevan a cabo la discusión y reflexión en la resolución de las actividades en ambos ambientes de trabajo. La actividad que aquí se reporta se relaciona con la resolución de problemas de tipo geométrico que involucran el concepto de variación. Los resultados obtenidos del acopio de los datos muestran que estas actividades promueven en los estudiantes procesos de reflexión y significado de conceptos en geometría, como lo es el de variación, el cual está inmerso en los problemas de optimización y en diferentes contextos matemáticos (Posada, Villa-Ochoa & Obando, 2006; Tall, 2009, 2013; Villa-Ochoa, 2012; entre otros). De acuerdo con Thompson & Carlson (2017), el estudio de la variación puede ser más enriquecedor si se lleva a cabo incorporando el uso de la tecnología digital para

[1*] *Autor para la correspondencia. E-mail: jose.lopez@enp.unam.mx. Tel. 56 1040 2480*

ISSN 2448 – 7945

modelar procesos de cambio de forma dinámica, evitando así, en la medida de lo posible, un discurso escolar tradicionalista con el uso de algoritmos y con poca o nula reflexión en torno a los temas que involucran dicho concepto. Por tal motivo, se ha decidido considerar como marco de referencia el estudio de Radford (2012, p. 284) sobre la mediación del artefacto. Los resultados muestran que la propuesta implementada ofrece mejoras significativas en el aprendizaje del concepto de variación.

2. Metodología o desarrollo

Como parte de la metodología, se han diseñado e implementado actividades en el marco de la resolución de problemas de tipo geométrico, tanto con el uso de lápiz-y-papel como con el uso de GeoGebra para fortalecer el estudio del concepto de variación. Los Softwares de Geometría Dinámica (SGD) como GeoGebra, brindan al usuario la oportunidad de interaccionar con las construcciones geométricas, descubrir propiedades y formular conjeturas, lo cual no siempre ocurre en el ambiente de lápiz-y-papel.

En esta propuesta participaron seis estudiantes de nivel medio superior de un grupo de la ENP, que cursaban en ese momento la asignatura Matemáticas V, quienes en equipos de dos integrantes resolvieron las actividades primero en el ambiente estático y después en el ambiente dinámico. Posteriormente, se recopilaron los datos por medio de sus respuestas escritas en el papel y de los archivos generados con GeoGebra con el propósito de analizar cómo el uso de la herramienta tecnológica media su aprendizaje en torno al concepto de variación.

A continuación, se muestra parte de una de las actividades implementadas (Actividad A) resuelta por el Equipo 1, primero con el uso de lápiz-y-papel y después con el uso de GeoGebra.

2.1. Actividad A. Rectángulos y triángulos de perímetro variable

2.1.1. Actividad A1. (ambiente lápiz-y-papel)

Considera un conjunto de rectángulos de área constante $A_0 = ab$, con base a y altura b variables, cuyo perímetro es $P = 2a + 2b$. Entonces, $b = \frac{A_0}{a}$ y $P = 2a + 2\frac{A_0}{a}$, es decir, $P = 2\left(a + \frac{A_0}{a}\right)$; con $a \neq 0$. En la Figura 1 se muestra cómo varían el lado b y el perímetro P (al variar el lado a) de todos aquellos rectángulos cuya área es $A_0 = ab = 20$ unidades cuadradas.

2.1.1.1. Episodio 1: Comprensión de la Actividad. Identificación de lugares geométricos.

ISSN 2448 – 7945

En un principio, los estudiantes trataron de entender de qué trata la Actividad. Identificaron e interpretaron los datos, tales como las expresiones algebraicas y cada una de las curvas presentes en la Figura 1, como se muestra a continuación.

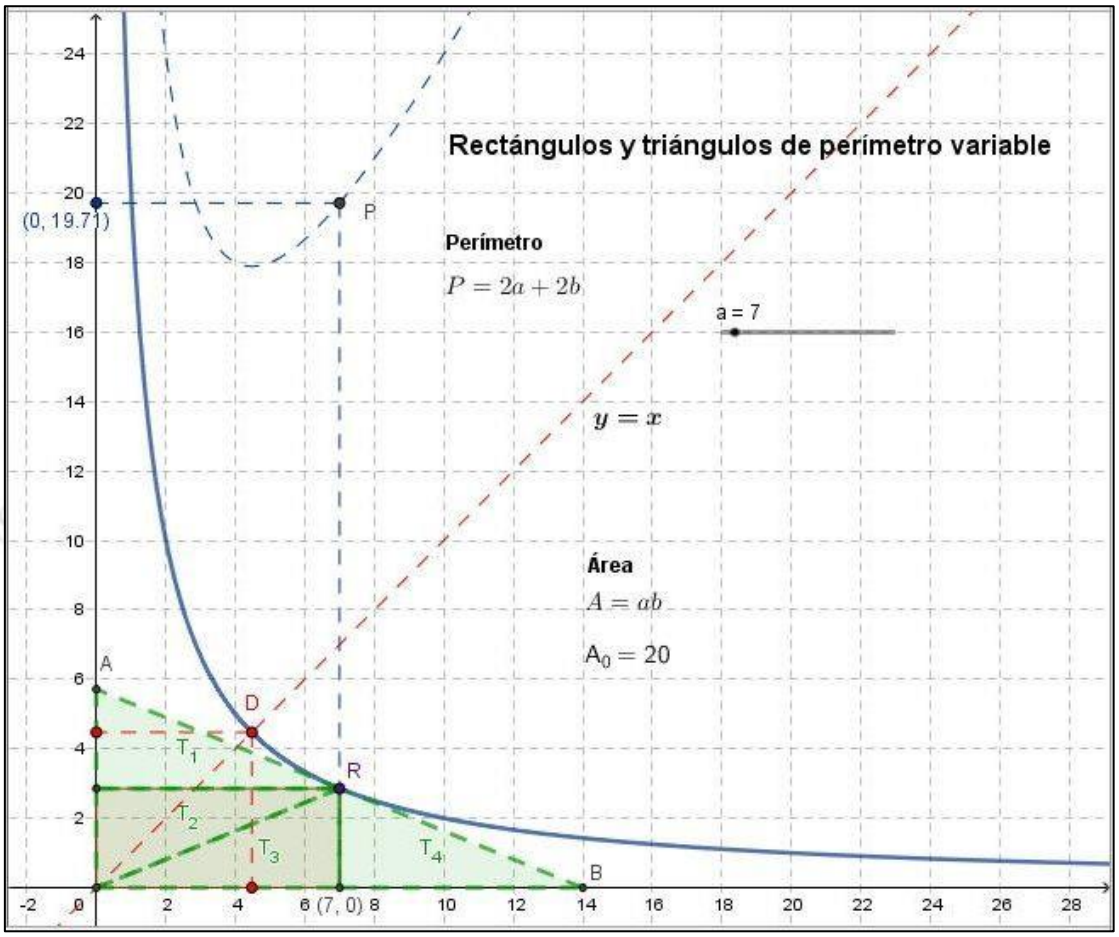


Figura 1. Rectángulos y triángulos de perímetro variable.

L1. Pedro: Como esta es constante [*señala y recorre con el dedo la recta* $y = x$] debe ser el área.
L2. Toño: Pero esta no es constante; la constante es 20. Si estuviera representada el área sería una línea aquí [*con su dedo describe una recta horizontal que pasa por* $y = 20$]. [*Véanse las Figuras 2a, 2b y 2c*]

ISSN 2448 – 7945



Figura 2. Toño explica a Pedro la recta $y = 20$. Secuencia (a), (b) y (c).

En L2 de este Episodio 1, Toño utilizó explicó cómo es la gráfica que corresponde al área constante de los rectángulos. Él imaginó trazar con su dedo, de izquierda a derecha, la recta $y = 20$ no se representada en el papel (véase Figura 2).

Los estudiantes centraron su atención en las curvas relacionadas con $b = \frac{20}{a}$ y con $P = 2a + 2\frac{20}{a} = 2\left(a + \frac{20}{a}\right)$, respectivamente (véanse las líneas L3 a L6 de este Episodio).

L3. Toño: Esta curva probablemente es b, es el valor de b. Porque tendría sentido que si a se volviera mayor [*señala y recorre con la pluma la curva descrita por el punto R que pasa por el punto D; Figuras 3a y 3b*], el valor de b se volviera menor…
L4. Pedro: Y si a se vuelve menor, el valor de b se vuelve mayor.
L5. Toño: Sí, supongo que ésta curva [*descrita por el punto R y que pasa por el punto D; figuras 3a y 3b*] es el valor de b en función de a.



Figura 3. Toño explica a Pedro la curva asintótica. Secuencia (a), (b).

L6. Pedro: Mira, ¿qué pasaría si R se pareciera a D?
L7. Toño: El rectángulo se parecería al cuadrado
L8. Pedro: Entonces a se parecería a b.
L9. Toño: Sí, tiene sentido

En L3, Toño explicó cómo es la gráfica que corresponde a la variación del lado b respecto del lado a de los rectángulos. Él imaginó trazar la curva asintótica a los ejes coordenados. Con ese movimiento sobre la hoja (figuras, 3a y 3b), Toño se aproximó

ISSN 2448 – 7945

cada vez más al eje de las abscisas (*X*) y dio significado a la manera en que varían los valores de b conforme varían los de a.

A continuación, los estudiantes estudiaron la curva relacionada con el valor del perímetro.

L10. Pedro: Esta curva de arriba... ¿qué crees que sea? [*la curva que pasa por* P]

L11. Toño: Pues… P está arriba de R, está sobre la misma línea vertical [*la punteada*]. ¿Es el perímetro?

L12. Pedro: Um… Yo creo que sí.

L13. Toño: Ya vimos que si a es muy grande entonces b es muy pequeña. Y al revés, si a es pequeñita entonces b es grandota.

L14. Pedro: Pero si a se parece a b …baja la curva.

L15. Toño: Entonces sí, esa curva de P es el perímetro.

L16. Pedro: Sí, tienes razón. Porque, piénsalo así, si tuvieras que los lados [*del rectángulo*] miden uno, también el área mide uno y el perímetro mide cuatro; y si la base es dos, entonces dos por un medio [*de la altura*] es [*el valor de*] el área del rectángulo. Entonces el perímetro sería cinco. […]. Y si lo haces al revés…

L17. Toño: Dos de la altura por un medio de la base... también el área sería uno y el perímetro sería cinco. [*Véase Figura 4*]

L18. Pedro: Sí claro. Entonces el valor mínimo [*del perímetro*] es cuando $a = b$.

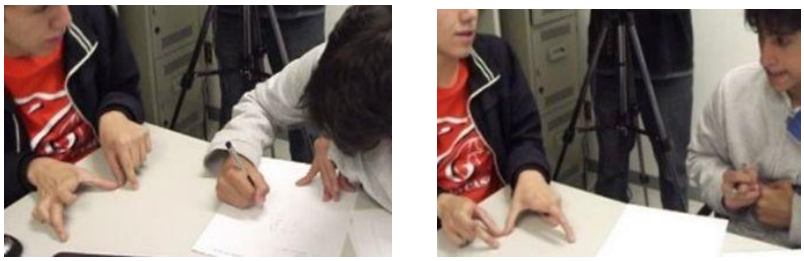


Figura 4. Pedro explica a Toño como varía el valor de b respecto al valor de a.

En las líneas precedentes, Pedro y Toño dan a entender cómo varía el perímetro P de los rectángulos cuando sus lados crecen o decrecen respectivamente. Si disminuye el valor de a entonces crece el de b (Figura 4a), si crece el valor de a disminuye el de b (Figura 4b) conservándose el valor del área; lo cual explica con movimientos sincronizados de sus dedos de una y otra mano; mientras los dedos de la mano izquierda se juntan (la longitud de la base disminuye) los de la derecha se alejan (la longitud de altura crece), y viceversa.

La Figura 5 muestra los conjuntos de números reales para posibles valores de a y de b.

ISSN 2448 – 7945

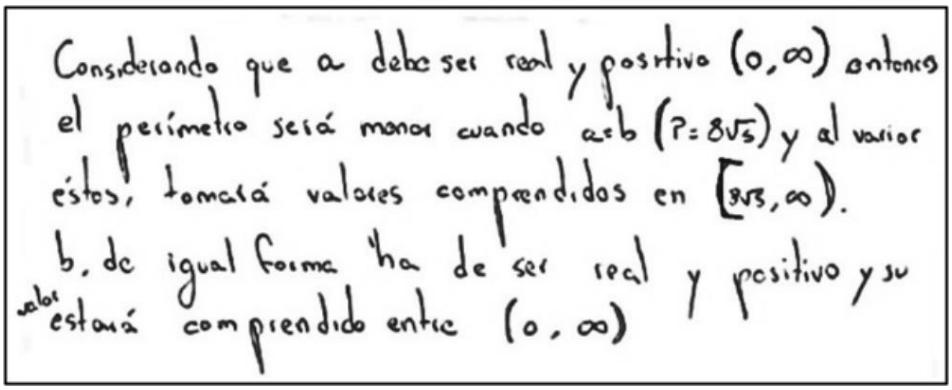


Figura 5. Respuesta escrita de los estudiantes respecto de los posibles valores de a, de b y del perímetro mínimo.

A pesar de que los estudiantes cometieron algunos errores en su afán por expresar sus ideas por medio del lenguaje simbólico y que por momentos no fueron muy claros en sus explicaciones, ellos han comprendido cómo varían los lados de los rectángulos, y, en consecuencia, cómo varía el perímetro de todos aquellos rectángulos cuya área es constante.

Las respuestas por escrito de los participantes sintetizan su discurso y dan evidencia de sus constantes reflexiones y evolución de su conocimiento como parte del proceso de objetivación acerca del concepto de variación conforme resolvieron la Actividad.

2.1.2. Resolución de la Actividad en ambiente tecnológico GeoGebra

2.1.2.1. Episodio 2: Pensar y actuar con el artefacto.

Toño y Pedro hablaron en diferentes momentos del comportamiento de las funciones presentes en términos de aproximaciones, de lo que sucede en las cercanías de cierto valor y no de lo que ocurre en ese valor específico [véase de la línea L1 a la línea L5 de este Episodio]. Aquí, la dinámica de la construcción estuvo a cargo del *deslizador* a.

L1. Toño: Aquí vemos que si a crece [*mueve el deslizador* a], el valor de b nunca toca cero, y pues es muy lógico porque a y b deben tener como producto 20, entonces cero por cualquier cosa…

L2. Pedro: No daría 20.

L3. Toño: Pues es cero, no es 20. Entonces sí, cuando a crece… b decrece.

L4. Pedro: Aproximándose, más no tocando…

L5. Toño: Hacia cero, pero en ningún punto es realmente cero. [*Véase Figura 6*]

ISSN 2448 – 7945

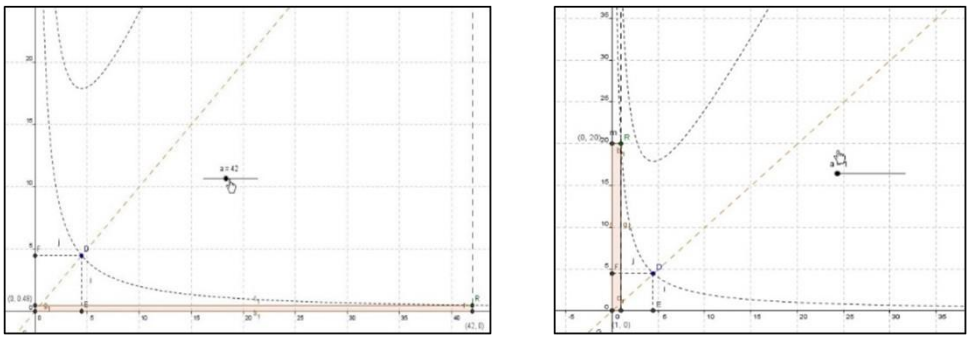


Figura 6. Variación del valor de b respecto al valor de a.

Con el uso del *deslizador* y del *zoom* de la herramienta tecnológica GeoGebra, fue posible para los estudiantes llevar a cabo una reflexión más profunda y comprender mejor que, con sólo lápiz y papel, por un lado, cómo varía b respecto de a y, por otro lado, porqué los valores de a o de b no pueden ser cero, debido a que la curva es asintótica a los ejes coordenados. Su discurso se desarrolló en términos de aproximaciones aprovechando el carácter dinámico de la construcción.

Veamos lo que ocurrió en el momento de referirse a las longitudes de los lados de todos aquellos rectángulos de área constante A_0 cuyo perímetro es mínimo.

L6. Pedro. Los lados son iguales.

L7. Toño: Sí. Está un poco difícil de controlar aquí [*el deslizador* a] porque no le puedo dar a la raíz de… porque sólo está moviéndose en enteros [*el deslizador* a]. Pero cuando R corte aquí [*señala con el cursor el punto* D] a la función identidad, vamos a tener un mínimo, porque vamos a tener un cuadrado y sus lados van a ser raíz del número. […] Y todos los rectángulos [*de igual área*] que tienden a que sus lados son iguales tienen su mínimo perímetro [*Véase Figura 7*]

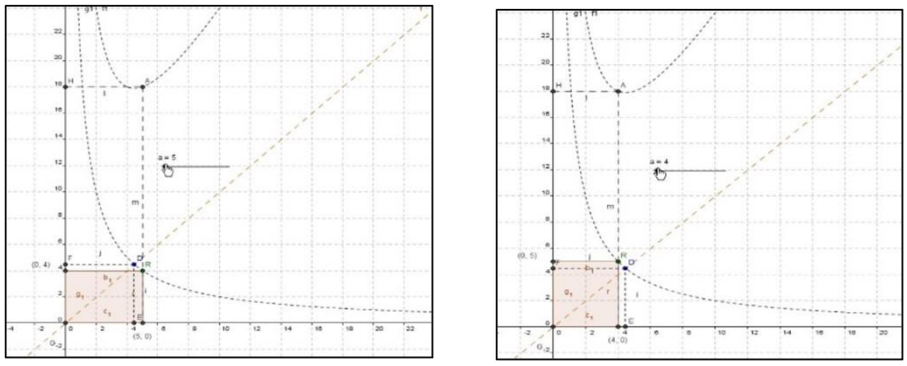


Figura 7. Aproximación del valor de b al valor de a y al valor del perímetro mínimo.

L8. Pedro: Cuando son cuadrados.

L9. Investigador: ¿Y si les dan otro ejemplo donde el área sea más grande o más pequeña que 20 [*unidades cuadradas*]?

L10. Pedro: Va a ser lo mismo.

ISSN 2448 – 7945

L11. Toño: Pues sí, se mantienen las propiedades.
L12. Investigador: ¿Las gráficas para el área y perímetro serán similares a estás?
L13. Toño: Sí.
L14. Pedro: Sí porque… sólo que este punto por ejemplo [*señala con la pluma el punto* D] en lugar de ser raíz de veinte será raíz de… lo que sea el área.
L15. Investigador: ¿Cómo interpretan la recta $y = x$?
L16. Toño: Está para indicarnos el punto donde ambos lados [*del rectángulo*] son iguales, en este caso sería el punto D; o sea que aquí [*en la gráfica correspondiente señala con el cursor el valor mínimo del perímetro*] el valor del perímetro es el mínimo en este punto [*señala con el cursor el punto* D], lo colocaría ahí pero el deslizador sólo da enteros [*mientras mueve el deslizador* a]. [*Véase Figura 7*]

Mientras Toño y Pedro desplazaron el *deslizador* a observaron el comportamiento de los puntos P y R. Entonces argumentaron que el punto R debe coincidir con el punto D (sobre la recta $y = x$), y por consiguiente que $a = b$, para que sea mínimo el perímetro de todos aquellos rectángulos de área constante A_0 (véanse las líneas L7, L15 y L16 de este Episodio 2). Toño observó que los posibles valores para el deslizador a eran números enteros y que por tanto no podría hacer coincidir los puntos P y R, tomando en cuenta que el valor del perímetro de los rectángulos es mínimo en el momento en que sus lados a y b son iguales a la raíz cuadrada de su área (que no siempre arroja un valor entero), es decir, cuando el rectángulo es un cuadrado.
Al aproximar a un cuadrado varios rectángulos en un mismo escenario (véase Figura 9) los estudiantes reafirmaron su conocimiento en relación con la variación del perímetro y reflexionaron acerca de las diferencias [llamadas incrementos también por ellos] (véase L7 de este Episodio 2) entre las longitudes de los rectángulos cuya área es constante. Así, las propiedades geométricas de los objetos se conservaron aun cuando éstos se deformaron con el uso del *arrastre*. Toño y Pedro pensaron, actuaron y justificaron su respuesta con el uso de GeoGebra como mediador.
En seguida, Toño y Pedro complementaron lo explicado en la línea L7 respecto al significado geométrico que tiene la variación del perímetro de los rectángulos cuando varían sus lados, pero el área se mantiene constante.

L17. Pedro: Cuando varía cualquiera de los lados… a en este caso.
L18. Toño: Sí, mientras se mantengan las proporciones en estos [*se refiere a que los lados* a *y* b *de estos rectángulos cumplen con* $ab = 20$]…; o sea, mientras se mantiene el área el perímetro es variable y crece indefinidamente cuando aumenten o disminuyan sus [*lados del rectángulo*]… Y tendrá un mínimo [*se refiere al perímetro de estos rectángulos*] cuando a sea igual a b. [*Véase Figura 8*].

ISSN 2448 – 7945

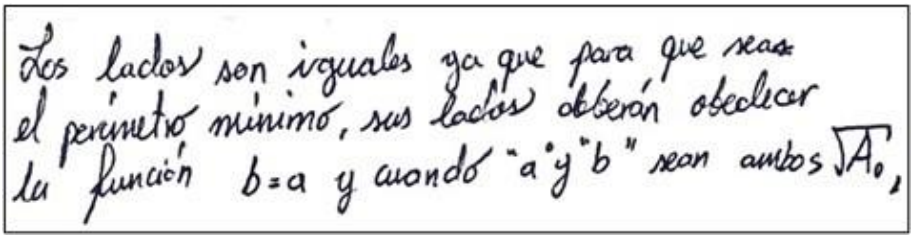


Figura 8. El valor de b es igual al valor de a y el valor del perímetro es mínimo.

Los participantes le dieron sentido a la variación de b respecto de a y comprendieron cómo dicha variación influye en el perímetro de los rectángulos (cuyo valor es mínimo cuando los valores de a y b coinciden) a pesar de que su área permanece constante (véanse las líneas L7, L16, L17 y L18 de este Episodio 2). Se observa que Toño y Pedro pensaron, reflexionaron y justificaron su respuesta con el uso de GeoGebra como mediador.

En la Figura 9 se muestra la respuesta escrita de los estudiantes.

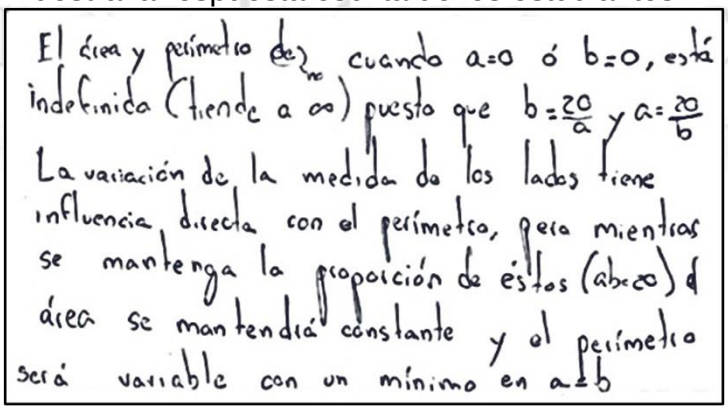


Figura 9. Respuesta escrita de los estudiantes; rectángulos de área constante y perímetro variable.

3. Resultados y análisis

El trabajo colaborativo propició el debate y la reflexión de los estudiantes en la resolución de las actividades en ambos ambientes de trabajo. En varios momentos de la Actividad A1 resuelta con el uso de lápiz-y-papel, los estudiantes se dieron cuenta que no sabían cómo expresar sus ideas y que estaban cometiendo errores mientras daban sus respuestas; sin embargo, fueron muy empáticos el uno con el otro y escucharon con atención la explicación de su compañero para después aclarar sus dudas y estructurar de mejor manera sus procesos de argumentación y de reflexión.

Es importante hacer notar que en diferentes momentos del desarrollo de la Actividad A1 resuelta con lápiz-y-papel, los estudiantes dan a entender que a veces es muy difícil imaginar tantas cosas; mientras que, con el uso de GeoGebra, les fue más fácil identificarlas y entenderlas con la ayuda del *arrastre*, dada la dinámica de la construcción.

ISSN 2448 – 7945

Durante la resolución de la Actividad A2 en el ambiente tecnológico (GeoGebra), con el uso del *arrastre*, los estudiantes se dieron cuenta que habían cometido algunos errores en el ambiente de lápiz-y-papel y también formularon algunas conjeturas que pudieron validar manipulando la construcción dinámica.

4. Conclusiones

Durante la resolución de la Actividad con lápiz-y-papel, los estudiantes utilizaron el lenguaje coloquial que poco a poco evolucionó en un lenguaje formal y simbólico de manera significativa, así entendieron y explicaron mejor sus ideas; el compartir su conocimiento fue más sencillo. En tanto, con el uso de GeoGebra, ellos arrastraron el deslizador para estudiar diversas trayectorias descritas, respectivamente, por diferentes puntos.

Durante la resolución de la Actividad con la herramienta tecnológica, los participantes observaron y entendieron, mediante la dinámica de la construcción, lo estudiado e imaginado en el ambiente estático, tal como la variación de los lados de los rectángulos, y por consiguiente, de su perímetro cuando mantienen constante su área; o la presencia de distintas variables y su relación entre ellas, entendiendo cómo varía una respecto de otra, de qué dependen dichas variaciones y cuál es su significado geométrico. Así, los estudiantes actuaron y reflexionaron a través del artefacto al resolver problemas de tipo geométrico relacionados con el concepto de variación en geometría.

El análisis de datos de este estudio sugiere que la herramienta tecnológica GeoGebra, en efecto, actúa como un mediador del conocimiento en los procesos de enseñanza y aprendizaje al promover en los estudiantes procesos de reflexión, argumentación y justificación de resultados acerca del concepto de variación, a través del estudio de problemas de tipo geométrico en un ambiente dinámico.

5. Índice de referencias

Posada, F.,Villa-Ochoa, J. & Obando, G. (2006). *El concepto de función lineal desde una perspectiva variacional.* En Rojas, Pedro (Ed.), Memorias del 7º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 101-104). Bogotá: Gaia.

Radford, L. (2012). On the cognitive, epistemic, and ontological roles of artifacts. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche, (Eds.), From text to 'lived' resources (pp. 283-288). New York: Springer.

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM. Mathematics Education*, 41 (4), 481-492.

Tall; D. (2013). The Evolution of Technology and the Mathematics of Change and Variation. In Jeremy Roschelle & Stephen Hegedus (eds), *The Simcalc Vision and Contributions: Democratizing Access to Important Mathematics,* (pp. 449–561). Springer.

Thompson, P. & Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in*

ISSN 2448 – 7945

mathematics education (pp. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics.

Villa-Ochoa, J. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. Tecné, Episteme y Didaxis, 3, 9-25.

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

LA RETRO ALIMENTACION DOCENTE EN LA UPIICSA DEL IPN

Córdoba Lobo Víctor Manuel[1] *, Ana María Lagunes Toledo[2] , Eugenio Santiago Machuca Mejía[3]
[1,2,3]*Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas del I.P.N.*
Te 950 Col. Granjas México Alcaldía Iztacalco CDMX CP 08400.

EN-POSM075

Resumen

En el Instituto Politécnico Nacional (IPN) se debe impartir una educación de calidad, es por eso que en las áreas de Matemáticas de la UPIICSA del IPN, se requieren docentes preparados académicamente para tal fin por lo que todos los profesores son egresados de alguna escuela de nivel superior de un área que contemple la adquisición de conocimientos en Matemáticas.
Sin embargo y con base a la información disponible (actas de calificaciones de ETS) la gran mayoría de los estudiantes no alcanzan el nivel de conocimientos deseado a pesar del esfuerzo de los docentes, un análisis realizado como una investigación transversal al momento de recabar la asistencia en los ETS realizado posterior a los cursos semestrales reportó los resultados respecto a los conocimientos adquiridos durante el curso inmediato anterior.

Palabras clave: *calidad, Matemáticas, docentes, preparados, superior, retroalimentación.*

1. Introducción

El sistema educativo en la República Mexicana comprende tres niveles de educación, básico, medio superior y superior, el nivel básico comprende los docentes que imparten clases en una escuela para infantes, primaria y secundaria, la formación académica de los profesores que laboran en esas instituciones son muy específicas ya que se prepararon como profesionistas exclusivamente para laborar dando clases en ese nivel.
En el nivel medio superior, inmediato anterior al nivel superior el antecedente académico de los docentes requiere una preparación profesional tal que le permita aparte de ejercitar la docencia en ese nivel que esté capacitado para desarrollarse exitosamente en una empresa de corte industrial, las mismas características de los docentes del nivel superior.
Esta partición en los niveles de docencia no tiene absolutamente nada que ver con el IQ del docente más bien obedece a múltiples factores llamémosle vocación, oportunidad de estudiar, necesidad de desarrollo personal, medio ambiente etcétera, en la mayoría de las veces la propia vida traza la ruta a seguir de forma inexorable lo único cierto es que el docente de nivel básico por alguna razón cursó una carrera profesional que exclusivamente le permite precisamente ejercer la docencia únicamente en ese nivel.
El docente de nivel medio superior y superior tiene una preparación académica que lo capacita básicamente para desarrollarse en alguna industria dependiendo del área que escogió y como efecto colateral ejercer la docencia en alguna escuela que vaya de

[1] **Víctor M. Córdoba Lobo: vmcl_1@hotmail.com*

ISSN 2448 – 7945

acuerdo a su preparación profesional, este hecho hace una gran diferencia entre los docentes del nivel básico y los otros niveles respecto a la preparación académica.

Esta diferencia en la actualidad es ley de vida pues la escuela, aunque es muy respetada la enseñanza a cualquier nivel ya no es como en tiempos idos como por ejemplo cuando se creó la Real y Pontificia Universidad de México que a través del tiempo desembocó en la Universidad Nacional Autónoma de México, en aquellos tiempos la docencia era un trabajo reconocido, respetado y bien remunerado, actualmente existen modos y formas de acceder a un estatus elevado diferentes a la docencia relegando a ésta a la característica de profesión alternativa no lucrativa.

Este trabajo de investigación, transversal, se refiere única y exclusivamente al nivel superior ya que en el nivel medio superior los educandos en la gran mayoría de los casos no tienen definida el área de su desarrollo profesional así que el docente, aunque debería hacerlo no está obligado moralmente a dirigir, concientizar u orientar al alumno pues éste está en una etapa psicológica que no le permite a cabalidad saber con exactitud que quiere o a donde va.

En cambio, en el nivel superior al menos tiene la idea muy individual de que es lo que "quiere ser" en la etapa adulta así que lo que necesita es un acervo cultural que le permita realizarse y lograr su ideal así que es deseable que el docente tenga la experiencia de vida para poder en un momento dado orientarlo en su desarrollo de vida y también apoyarlo durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Para tal proceso es imperativo que el docente en este nivel pueda en un momento dado durante el transcurso de la clase relacionar lo que se está exponiendo con el mundo real para que el alumno evalúe si eso es lo quiere o si está a tiempo como para cambiar de carrera.

2. Metodología

Para poder entender que pasa con los docentes del área de Matemáticas, egresados de la misma escuela y los que no, es necesario hacer antes hacer una breve síntesis de la palabra "docente", del latín "*docere"* enseñar, vox populi lo define como aquel que se dedica profesionalmente a la docencia, profesor, maestro, educador etc. es todo aquello relacionado con la enseñanza.

La UNESCO (UNESCO.org) señala en su artículo I que:

"se considera un docente para efectos de ley a todo aquel que imparte, dirige, supervisa u orienta la educación en general y la enseñanza sistematizada"

Por lo que en principio los docentes se identifican como todo aquel que se ha formado de manera profesional para dedicarse de por vida a enseñar, esto en la actualidad se aplica totalmente a la enseñanza básica porque la experiencia indica que como una generalidad los docentes en la enseñanza media superior y superior en principio llegaron a ejercer la docencia de forma accidental siendo para algunos una actividad complementaria, aunque para otros es un medio de vida.

En la medida en que la figura del docente se ha vuelto cada vez más compleja como un producto de los cambios de la sociedad (López, 2000; Heargreaves, 1996) resulta muy difícil determinar cuáles son las características del ejercicio profesional del

ISSN 2448 – 7945

docente por lo que no se va a ahondar en definiciones sino que únicamente se expondrán las características del docente proveniente de instituciones diferentes a la UPIICSA y un egresado de la propia institución, se habla en general aunque como siempre existen casos particulares:

1.- Egresados de UPIICSA, profesor que ejerce la docencia como un paso directo de ser alumno a pasar como docente sin haber ejercido su respectiva licenciatura en alguna dependencia laboral ajena a la institución (retro alimentación)
2.- No egresado de UPIICSA, profesor que generalmente ha laborado en alguna empresa ajena a la educación, y aunque provenga de otra institución educativa el hecho de no haber egresado de la UPIICSA aporta una visión diferente a la enseñanza.
La metodología seguida fue elaborar un cuestionario cerrado, las respuestas no necesariamente fueron con respuestas de si/no sino en las ocasiones que las respuestas del docente necesariamente eran diferentes a lo expuesto no se le dejaba mucho tema para divagar para poder obtener resultados más reales.
Con las respuestas obtenidas se formó un matriz de datos para poder manejar las diferentes respuestas a las preguntas y poder interpretar los resultados lo más cercano a la realidad las preguntas y respuestas del cuestionario se exponen a continuación y se comenta que los resultados se obtuvieron utilizando el Programa Excel de Microsoft.

3. Resultados y análisis

Los resultados de la matriz de datos obtenida a partir del cuestionario se condensaron en las siguientes tablas:

Tabla No. 1 Porcentajes aprobados/reprobados CON docente no egresados de UPIICSA Semestre 2023-2

	CIENCIAS %	INFORMÁTICA %	ING. MECÁNICA %	ING. QUÍMICA %	ING.CIVIL %
APROBADOS	80	80	70	60	65
REPROBADOS	20	20	30	40	35

Tabla No. 2 Porcentajes aprobados/reprobados docentes egresados de UPIICSA

	INFORMÁTICA	INGENIERÍA
APROBADOS	40	20
REPROBADOS	60	80

Tabla no. 3 Turno matutino

EGRESADO DE	
UPIICSA %	OTRA %
40	60

Tabla no. 4 Turno vespertino

EGRESADO DE

ISSN 2448 – 7945

UPIICSA %	OTRA %
7	93

Tabla No. 5 Turno matutino

APROBADOS/SEMESTRE	
UPIICSA %	OTRA %
80	20

Tabla No. 6 Turno vespertino

APROBADOS/SEMESTRE	
UPIICSA %	OTRA %
70	30

Tabla No. 7 Turno matutino

APROBADOS ETS	
UPIICSA %	OTRA %
20	80

Tabla No. 8 Turno Vespertino

APROBADOS ETS	
UPIICSA %	OTRA %
30	70

El semestre que se tomó en esta investigación fue el correspondiente a julio-diciembre de 2022, de los reportes de aprobados/reprobados que semestralmente se efectúa en la Subdirección Escolar de la UPIICSA, no se tenían los resultados del anterior al actual porque todavía en enero del presente se realizaron ETS y por lo tanto la unidad de informática de dicha dependencia no tenía los resultados con tanto desglose como se necesitaba.

Los docentes egresados de la UPIICSA para efectos de la investigación se toman como “retro alimentación” y de ahí se obtuvieron como resultados no concluyentes sino solo informantes porque para tal efecto este proceso se debe hacer durante varios semestres y en ese caso se podría hacer el mismo análisis con conclusiones más cercanas a la realidad.

Como se puede observar en la tabla No. 1 el porcentaje de aprobados en ETS de los alumnos que tuvieron en el curso precedente a un docente no egresado de la UPIICSA es bastante alto contrastando con la tabla No. 2 los cuales tuvieron como docente a un egresado de la misma escuela UPIICSA lo cual se puede interpretar como que los conocimientos adquiridos no son lo suficientemente “fuertes” pues las costumbres de estudio son bastante similares en todos los alumnos con docentes egresados o no de la UPIICSA.

ISSN 2448 – 7945

De la tabla 3 se puede concluir que si bien en el área de Matemáticas no son mayoría los egresados de la UPIICSA si son una cantidad significativa en el turno matutino.

La tabla No. 4 muestra que son mucho menos la cantidad de docentes exalumnos en el turno vespertino, la aparente razón que se encontró respecto a este hecho fue que los docentes egresados de otras instituciones laboran en la mañana en otro lugar ajeno a la UPIICSA.

Las tablas No. 5 y 6 muestran que en el curso semestral es alto el índice de aprobación de los alumnos con profesor exalumno que con profesor no exalumno, suponemos como causa probable una complacencia del profesor por identificarse con el alumno.

Las tablas No. 7 y 8 muestran que el índice de aprobados en ETS que tuvieron un profesor exalumno es muy bajo en ambos turnos, una causa aparente es que en un examen a título de suficiencia no es selectiva la conformación de los grupos es totalmente al azar, así como la asignación del profesor sinodal.

Un muestreo de los alumnos en ambos turnos para investigar el tipo de profesor en el curso normal arrojó los resultados de las tablas 7 y 8.

4. Conclusiones

En una reunión de los participantes en esta investigación para encontrar el porqué de los resultados obtenidos se encontró como causa probable:

Los docentes exalumnos sin experiencia previa en labores propias de su área profesional en otra institución, son más complacientes con sus alumnos posiblemente a una identificación con su pasado estudiantil,
Refiriéndonos exclusivamente a nuestra área de trabajo, Matemáticas, se observó que por muy buenos alumnos que hayan sido en el transcurso de su vida estudiantil les hace falta conocimientos no inteligencia que les permita impartir una clase con seguridad y a una buena profundidad,
Esta carencia de bases matemáticas en general les impide impartir clases a un buen nivel y contestar con argumentos sólidos las preguntas hechas por los alumnos,
Posiblemente estas carencias las canalizan siendo permisivos y complacientes al momento de calificar.

Se puede suponer con base a lo antes expuesto que la falta de experiencia laboral y en la profundidad requerida en conocimientos para impartir la materia causa una repetición de los vicios adquiridos de sus propios docentes y al sumarle los vicios propios de su personalidad tienen como consecuencia un deterioro en la calidad del proceso enseñanza y aprendizaje por lo que se concluye que al menos en el área de Matemáticas no es conveniente la retroalimentación de egresados de la UPIICSA.

ISSN 2448 – 7945

Índice de referencias

HARGREAVES, A. (1996). *Profesorado, cultura y postmodernidad.* Madrid: Ediciones Morata.

Lopez, M. (2000). La educación y el profesorado en una sociedad global-plural. *Revista de curriculumy formación del profesorado* , Vol. 4 No. 1.

profesores, S. d. (s.f.). Obtenido de www.salade profesoresw.com

Unesco.org. (s.f.). *UNESCO, Ley No. 14473, Estatuto del docente y su reglamentación.* Obtenido de https;siteal,iiep,unesco,org

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

EL USO DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL AULA PARA EL ESTUDIO DE FUNCIONES POLINOMIALES

Rubiales Sánchez Fátima Sandra[*1], Oropeza Legorreta Carlos[2] y Flores García Rebeca[3]

[1]*CCH VALLEJO. Av. Fortuna Esq., Magdalena de las Salinas, Gustavo A. Madero, 07760, CDMX.*

[2]*Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. Av. Teoloyucan Km 2.5, San Sebastián Xhala, 54714 Cuautitlán Izcalli, Méx.*

[3]*Benemérita Escuela Normal Veracruzana. Av. Xalapa SN, Unidad Magisterial, 91017 Xalapa-Enríquez, Veracruz.*

AP-POSM076

Resumen

La modelación matemática ha tenido varias acepciones, entre otras, se reconoce el papel que ha desempeñado para el surgimiento, desarrollo y formalización de conceptos matemáticos y de otras áreas. Sin embargo, su incorporación como un recurso para la enseñanza puede ser considerado reciente. Es importante reconocer que su estudio con respecto a fenómenos reales ha tenido gran aceptación en el aula de clases porque permite al alumno: a) Identificar las variables y su dependencia, b) Determinar el dominio y tipo de variable, c) Recolectar datos y analizar su confiabilidad, d) Buscar la expresión matemática que mejor relacione los mismos, considerando principios matemáticos, modelos preestablecidos, leyes y operaciones entre otros, e) Formular el modelo matemático, a través de la expresión analítica del fenómeno estudiado, f) Validar el fenómeno comparando los datos obtenidos con los datos de la predicción, g) Aplicar el modelo una vez validado y verificar su pertinencia. En este trabajo presentamos el reporte de una experiencia sobre el uso de la modelación matemática con estudiantes de educación media superior, en la enseñanza de funciones polinomiales, con el objetivo de analizar a las funciones como modelos que permiten la caracterización de fenómenos sociales y físicos. Las actividades se desarrollaron dentro del curso en forma normal, para la generación de algunos modelos se propuso utilizar software libre para su verificación. Con respecto a los resultados se observó que los estudiantes lograron relacionar las variables y propusieron el modelo correspondiente, en un trabajo realizado de manera colaborativa. Además, en el desarrollo del documento presentamos algunas evidencias que dan cuenta de las conclusiones.

Palabras clave: *Modelación matemática, funciones polinomiales, enseñanza.*

1. Introducción

Diversos autores mencionan la importancia de incorporar el proceso de modelización matemática en el aula, ya que permite introducir conceptos de manera contextualizada, generando el interés de los estudiantes al enfrentarse a situaciones reales que pueden representarse mediante modelos matemáticos, en este proceso el estudiante identifica variables, establece relaciones entre las mismas, generando así un aprendizaje significativo.

[1*] *Autor para la correspondencia. E-mail: fatima.rubia/les@cch.unam.mx*

ISSN 2448 – 7945

> El supuesto que subyace a la introducción de la modelación matemática al aula consiste en esperar que, cuando los alumnos enfrentan situaciones problemáticas de interés son capaces de explorar formas de representarlas en términos matemáticos, de explorar las relaciones que aparecen en esas representaciones, manipularlas y desarrollar ideas poderosas que se pueden canalizar hacia las matemáticas que se desea enseñar (Lehrer y Schauble, 2000; Lesh e English, 2005, como se citó en Trigueros, 2009, p. 76).

Zaldívar, Quiroz & Medina (2017), refieren que una enseñanza que se limita a un cúmulo de saberes aislados y memorización de procesos algorítmicos conlleva a un bajo rendimiento de los estudiantes. La modelación matemática no sólo permite aplicar conocimientos a otras áreas, sino que contribuye a mejorar la capacidad para leer, interpretar, formular y solucionar problemas (Salett & Hein, 2004).

> La modelación matemática es un proceso involucrado en la obtención de un modelo matemático. Un modelo matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión. El modelo permite no sólo obtener una solución particular, sino también servir de soporte para otras aplicaciones o teorías. En la práctica, ese conjunto de símbolos y relaciones puede estar vinculado a cualquier rama de las matemáticas, en particular, a los instrumentos fundamentales de las aplicaciones matemáticas (Biembengut, 1999, p. 20). Un aspecto de la actividad científica, en particular de la actividad matemática, consiste en crear modelos. (Salett & Hein, 2004, p. 106)

Para llevar a cabo la modelización matemática, Cervantes (2015) considera las siguientes cuatro etapas:

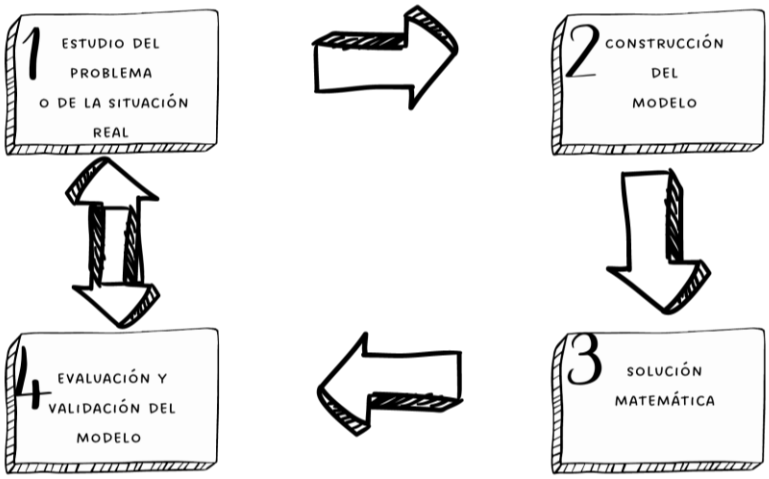


Figura 1. Etapas de la modelación.

- Estudio del problema o de la situación real: En esta etapa se deben conocer las definiciones y el lenguaje de la otra especialidad, tener claridad en las preguntas que se desean responder, revisar los datos obtenidos, identificar

ISSN 2448 – 7945

variables dependientes e independientes, e identificar y entender las leyes conocidas del fenómeno desde el área del conocimiento en el que surge.

- Construcción del modelo: Identificar las leyes conocidas, expresadas en el lenguaje matemático, que rigen el fenómeno o alguno similar, identificar las variables dependientes e independientes, elegir el modelo matemático que se ajuste al fenómeno o proponer algún modelo que incorpore las características deseadas.

- Solución matemática: Los modelos matemáticos más sencillos son los que se pueden expresar de manera directa mediante funciones, pero en ocasiones tendremos información referente a otras propiedades como son las razones de cambio, en ese caso se necesita resolver el modelo para encontrar la función.

- Evaluación y validación del modelo: Partiendo de las soluciones obtenidas del modelo propuesto, interpretamos su significado y aplicación de estos datos en el problema original comparándolos con la información conocida, en caso de que exista una buena relación entre los datos reales y el propuesto, considerar la aceptabilidad y validez del modelo propuesto, sino realizar los ajustes necesarios o bien rechazar la propuesta.

En estas etapas el estudiante y el docente realizan diferentes roles, tal como lo refieren Zaldívar, Quiroz & Medina (2017). Los autores señalan que el alumno deberá realizar predicciones, conclusiones, justificarlas, además de aplicarlas, para presentarlas a otras personas; mientras que el docente propone alguna situación problemática que se pueda modelar de acuerdo con el contenido que se va a estudiar. Su aprendizaje debe desarrollarse en un ambiente donde se promueva la reflexión y el análisis.

El uso de la tecnología es otra vertiente en la modelación matemática, permitiendo mejorar la comprensión situación-problema que se plantea, brindando recursos para acercarse a la creación de un modelo, permitiendo analizar la respuesta matemática en términos de la misma situación real (Rodríguez & Quiroz, 2015, como se citó en Zaldívar, Quiroz & Medina, 2017).

2. Metodología o desarrollo

La experiencia de enseñanza se llevó a cabo en tres grupos de un colegio de Educación Media Superior en el D.F., en la asignatura de Matemáticas IV, que se imparte en el cuarto semestre, siendo esta asignatura de carácter obligatorio. La estrategia de enseñanza se aplicó en una sesión de 2 horas en el salón de clases ya que no se logró acceder a la sala de cómputo. El modelo en que se fundamenta el programa de estudios de la asignatura es constructivista, y su proceso de enseñanza y aprendizaje no sólo tiene una finalidad intelectual sino también busca darle un valor social y práctico.

ISSN 2448 – 7945

Con base a lo anterior, se buscó que las secuencias didácticas fueran significativas, es decir, relevantes para el estudiante, de forma que los nuevos conocimientos "se conecten" con los previos a fin de construir conceptos, ideas, y pensamientos cada vez más complejos (Carretero, 2005). En este sentido la modelación matemática permite al alumno: a) Identificar las variables y su dependencia, b) Determinar el dominio y tipo de variable, c) Recolectar datos y analizar su confiabilidad, d) Buscar la expresión matemática que mejor relacione los mismos, considerando principios matemáticos, modelos preestablecidos, leyes y operaciones entre otros, e) Formular el modelo matemático, a través de la expresión analítica del fenómeno estudiado, f) Validar el fenómeno comparando los datos obtenidos con los datos de la predicción, g) Aplicar el modelo una vez validado y verificar su pertinencia (Rondón, 2013).

El aprendizaje que se consideró del programa de estudios para diseñar la estrategia didáctica es: "*Reconoce a las funciones como modelos de variación de fenómenos naturales, económicos y sociales*", para alcanzar este aprendizaje se planteó una secuencia didáctica que buscaba mediante la modelización matemática analizar fenómenos sociales y físicos, además se planteó el uso del software Tracker que permitió el estudio, numérico, gráfico y algebraico de los fenómenos planteados. En la *etapa de inicio* se retoman los conceptos de *ecuación y función*, así como los métodos para resolver una ecuación, mediante juegos lúdicos (tripas de gato), en la *etapa de desarrollo* los alumnos resolvieron tres problemas relacionados a fenómenos económicos y físicos, mientras que en la *etapa de cierre* se utilizó la Bitácora de Col, donde el alumno realizó un proceso de metacognición de las actividades desarrolladas en clase.

Los problemas propuestos en el salón de clases fueron tres, el primero consistió en modelar el costo del huevo en México, para eso se utilizaron datos obtenidos en el Sistema Nacional de Información e Integración de Mercados, el segundo problema consistió en analizar el tiro vertical de una pelota, mientras que el tercer problema consistió en analizar el lanzamiento del cohete SLS en la nave espacial Orión no tripulada. Para generar los datos de estos dos últimos problemas se utilizó el software Tracker, que es un programa libre que permite el análisis y modelado de fenómenos físicos grabados en un video, mediante el seguimiento de un conjunto de píxeles, el modelo que nos genera es visual no matemático, sin embargo, permite generar un conjunto de datos que pueden ser posteriormente analizados por los estudiantes, esto les permite proponer modelos matemáticos que pueden ser comparados con los datos obtenidos y con modelos teóricos previamente establecidos.

Para la aplicación de la secuencia en el aula se organizó a los estudiantes en parejas y también se propició la participación de manera grupal, de esta forma los estudiantes de manera colaborativa recordaban conocimientos previos y llegaban acuerdos sobre los modelos y su solución. Los datos de los problemas propuestos fueron tomados de fuentes institucionales y de fenómenos reales, para un primer acercamiento a la modelización matemática se planteó el análisis gráfico de los datos obtenidos, buscando una conexión entre la representación gráfica de los datos, su representación numérica y su modelo algebraico, en este primer acercamiento los alumnos sólo

ISSN 2448 – 7945

proponían el modelo que se podía ajustar a los datos, ya fuera una función lineal o de segundo grado, con base en esto se llevaron los datos a una hoja de cálculo donde se generaba un modelo matemático, con el modelo obtenido se comparan los datos del modelo con los datos reales para establecer la pertinencia del modelo y al final se utilizaba el modelo algebraico para obtener información del comportamiento del fenómeno estudiado.

Las etapas para generar los modelos fueron las siguientes:

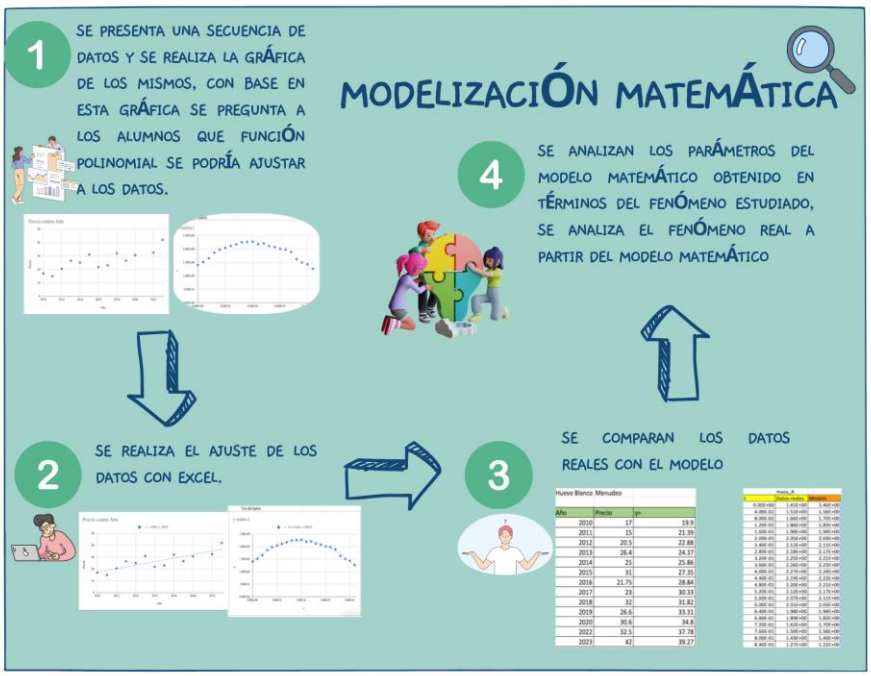


Figura 2. Proceso de modelización en el aula

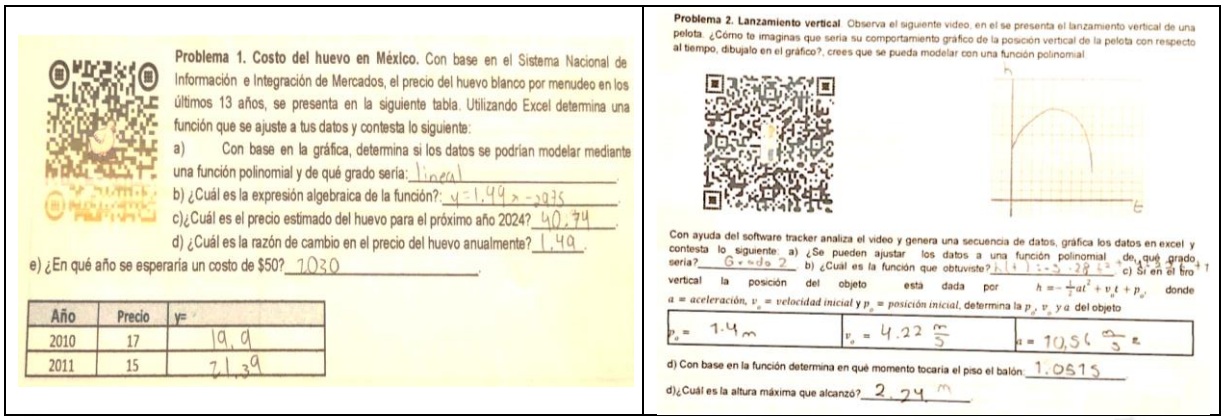
3. Resultados y análisis

Entre las ventajas de utilizar un proceso de modelización en el aula es que el alumno construye nuevas conexiones y representaciones del concepto matemático, por ejemplo, en el estudio del precio del huevo, el estudiante identificó que el comportamiento gráfico de los datos podría ajustarse a un función lineal, se establecieron conexiones entre el modelo matemático y el fenómeno económico, la pendiente de la función lineal obtenida nos permitió conocer el crecimiento anual esperado en el precio del huevo, vinculando además este concepto con el de razón de cambio; en el lanzamiento de tiro vertical y el lanzamiento del cohete, el alumno relaciona su comportamiento gráfico generado con Tracker con un modelo cuadrático y lineal respectivamente, se relacionaron los parámetros obtenidos del modelo con los conceptos físicos de aceleración, velocidad y posición inicial, además la tecnología permitió de una manera dinámica relacionar el comportamiento gráfico con el

ISSN 2448 – 7945

comportamiento físico del fenómeno analizado, dando un significado físico a la gráfica construida.

Tabla 1. Ejemplo de respuestas de los estudiantes al Problema 1 y 2



Algunos de los comentarios positivos que los estudiantes mencionaron fueron: "*logre entender mejor los conceptos de física; se me hace algo innovador ya que no lo habían trabajado anteriormente así en el salón de clases; me gusto trabajar de manera colaborativa para generar los modelos matemáticos*". En la actividad de cierre algunos de los comentarios que mencionan estaban relacionado con lo siguiente:

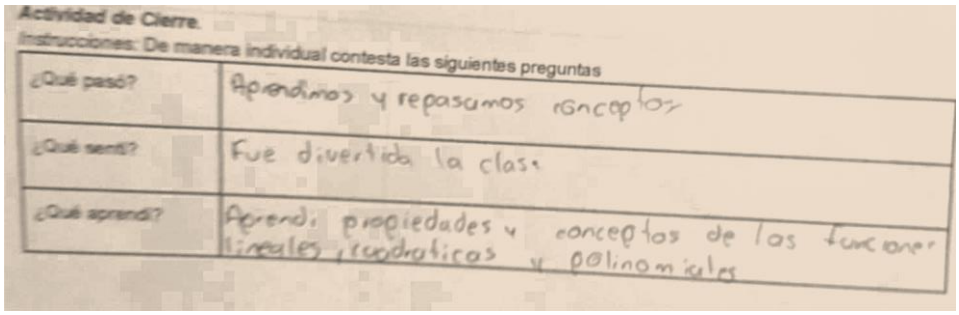


Figura 3. Ejemplo de respuesta a la actividad de cierre

Sin embargo, también existieron dificultades al interpretar los modelos matemáticos en términos del fenómeno estudiado, para eso fue necesario hacer énfasis en que variables se estaban estudiando en el fenómeno y su vinculación con el modelo obtenido, otro problema que los estudiantes mencionaron fue relacionado con la tecnología, ya que la resolución del cañón no permitía una imagen muy grande y algunas partes eran borrosas y no se veía bien la información. Entre las dificultades que tuvimos en el salón como docentes, fue una mala planificación en el uso de la tecnología, ya que por ejemplo, realizamos las tablas que iban a llenar los estudiantes en un documento en Word, que se presentaría a los alumnos con el proyector y que los alumnos pasarían a llenar, sin embargo no consideramos que estaríamos utilizando al mismo tiempo una hoja de cálculo, esto hacia encimar información y nos hizo darnos

ISSN 2448 – 7945

cuenta de la importancia de planificar que información es realmente indispensable presentar con el uso de la tecnología y qué información trabajar usando el pizarrón.

4. Conclusiones

A pesar de que la modelización matemática ha sido fundamental en el desarrollo de la matemática y de otras disciplinas, permitiendo formular leyes en términos matemáticos, su incorporación en la clase de matemáticas es reciente. Entre las ventajas que observamos al aplicar esta estrategia en el salón de clases es que el alumno logró relacionar conceptos no sólo de la disciplina sino también con otras áreas, fomentando la interdisciplinariedad; a través de la representación gráfica de los datos el estudiante propuso modelos algebraicos que se pudieran ajustar al problema planteado, identificando las variables y su relación entre ellas, realizando conversiones entre el lenguaje matemático y el fenómeno propuesto. El uso de la tecnología también fue fundamental no sólo para construir el modelo matemático y su respectivo análisis, sino que nos permitió construir un laboratorio en el aula donde el alumno analizó el fenómeno, vinculando de manera dinámica su comportamiento físico con su modelo matemático, esto para él fue significativo ya que el modelo matemático tenía un significado contextual. Entre las desventajas que se pueden enfrentar el docente es no contar con los recursos como son la computadora, las aplicaciones, internet y cañón, para implementar la estrategia en el salón de clases también es importante la experiencia del docente para buscar, diseñar y proponer situaciones problemáticas acordes a los aprendizajes y donde se pueda aplicar la modelación matemática.

5. Índice de referencias

Libros

- Carretero, M. (2005). *Constructivismo y educación*. México: Progreso.
- Cervantes, L. (2015). *Modelización matemática, principios y aplicaciones*. México: Textos científicos.
- Rondón, J. E. (2013). *Una introducción al modelamiento de fenómenos físicos a través de funciones*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Revistas

- Salett, M. & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática 16(2)*, 105- 125.
- Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa 9(46)*, 75-87.
- Zaldívar, J. D., Quiroz, S. A. & Medina, G. (2017). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. *IE Revista de investigación educativa de la Rediech 15*, 87-110.

ISSN 2448 – 7945

ANÁLISIS DE FRACCIONES MEDIANTAS EN EL PROCESO DE COINCIDENCIA DE PULSOS

Fabian Natanael Murrieta Rico[1, *], María Eliazar Raygoza Limón[2], Roxana Jiménez Sanchez[3], Jesús Heriberto Orduño Osuna[4], Joel Antúnez García[5]

[1]*Universidad Politécnica de Baja California. Calle de la Claridad s/n Colonia Plutarco Elías Calles, Mexicali, B.C., México 21376.*
[2]*Universidad Autónoma de Baja California, Facultad de Ciencias, Carretera Transpeninsular 3917, Playitas, Ensenada, B.C., 22860*
[3-5] *Universidad Autónoma de Baja California, Instituto de Ingeniería. Calle Normal s/n Blvd. Benito Juárez Col. Insurgentes Este, Parcela 44, Mexicali, B.C., México, 21280*

AP- POSM078

Resumen

Una de las tareas básicas en el campo de la ciencia e ingeniería es medir de forma fiable, lo que nos permite comprender como un parámetro cambia bajo ciertas condiciones. Por ello, a la hora de diseñar dispositivos que realizan tareas de forma automática, es necesario el desarrollo de sistemas de medición que tengan la capacidad de ofrecer aproximaciones precisas al parámetro de interés. En este sentido, un método de medición y detección consiste en el uso de sensores que convierten el parámetro de interés en una señal de variaciones en frecuencia. Para el uso adecuado de estos sensores es necesario generar y medir el valor de la frecuencia resultante, esto, de la manera más rápida y precisa posible. De los métodos disponibles para esta tarea destaca el principio de aproximaciones racionales, en el cual la frecuencia medida se compara con una frecuencia conocida. Durante este proceso de comparación se generan coincidencias, las cuales se ha observado que pueden formar fracciones mediantas. Estas fracciones se forman a partir de una secuencia de Farey. Aunque se ha reportado que en el proceso de coincidencia de pulsos aparecen las fracciones mediantas, su estudio en procesos experimentales aún está lejos de un desarrollo amplio. Debido al interés de este problema, en este trabajo se muestra tanto la simulación del proceso de coincidencia de pulsos como su análisis teórico. Dichos resultados se comparan con los datos generados de un proceso de coincidencia de pulsos experimental.

Palabras clave: *Medición de frecuencia, aproximaciones racionales, mediantas.*

1. Introducción

Para que se lleve a cabo la interacción entre los sistemas automáticos y el sistema a controlar es necesario el uso de sensores. Durante este proceso, la información generada por ellos debe poder ser interpretada por los sistemas informáticos que adquieren, almacenan y procesan la información. En este sentido, existe un proceso en el que se cuantifica la señal generada por el sensor. Es en esta etapa cuando resulta de interés poder estimar el valor de la señal deseada con la precisión requerida, esto mientras se cumplen las limitaciones de tiempo y

[1] * *Autor para la correspondencia. E-mail:* FNMURRIETAR@UPBC.EDU.MX

ISSN 2448 – 7945

asegurando así un control adecuado del sistema de interés. Para cumplir con las limitaciones de tiempo, el algoritmo para aproximar la señal deseada debe cumplir ciertas características. Es decir, que pueda implementarse fácilmente y que su tiempo de ejecución sea pequeño con relación a las limitaciones de tiempo del sistema. Los sensores son la fuente inicial de información que tiene un sistema de control sobre el medio ambiente, y estos dispositivos se pueden clasificar de muchas formas. En particular, considerando la señal de salida que generan, los sensores pueden tener salidas que produzcan señales con voltaje, corriente, frecuencia, etc. Así, para mejorar el rendimiento de los sistemas, se puede ponderar la forma en que se cuantifican las señales generadas por los sensores. En el caso de señales en el dominio de la frecuencia, se garantiza una alta estabilidad y precisión en la conversión de la señal de entrada a la señal de salida del sensor. Es por esto por lo que los sensores en el dominio de frecuencia son de interés en diversas aplicaciones modernas. Se conocen varios métodos para aproximar la frecuencia de interés, incluidos los que se basan en el conteo de pulsos o períodos, o los que se basan en el análisis espectral de la señal, como los que utilizan la transformada de Fourier. Aunque estos métodos tienen sus ventajas y desventajas, así como sus aplicaciones específicas, en los últimos años se ha estudiado otro método que permite reducir el tiempo de medición y al mismo tiempo aumentar la precisión de aproximación al mensurando, este es el principio de las aproximaciones racionales. En este método, la señal a medir se compara con una señal de referencia. Antes de la comparación ambas señales se condicionan y durante la comparación, ambas señales se multiplican en el tiempo. Esto genera una tercera señal de coincidencia, donde hay pulsos de coincidencia, que se generan durante el tiempo en que los pulsos de la señal de entrada son verdaderos. Después del primer pulso de coincidencia, se cuentan los pulsos en las señales de entrada y luego se puede calcular la aproximación a la frecuencia deseada, conociendo los pulsos contados y el valor de la frecuencia de referencia. Se demostró que es el valor de este último el que influye en el tiempo necesario para obtener la mejor aproximación al mensurando. Aun así, no queda clara la relación entre el valor de dicha variable y el error observado en la aproximación al mensurando. Este trabajo propone el estudio de esta relación con el fin de elegir el valor de la frecuencia de referencia que permita reducir al máximo la incertidumbre durante el proceso de medición. Para esto, se analizarán los datos obtenidos experimentalmente durante el proceso de medición de frecuencia de la señal generada por un sensor que opera bajo el efecto piezoeléctrico directo, y posteriormente se compararán con el modelo teórico del proceso de medición, implementado en una simulación computacional.

2. Antecedentes

Como parte de la tecnología actual, los sensores son una fuente de información que permite a las computadoras tener la información necesaria para el proceso de toma de decisiones. En este sentido, mejorar la precisión de los datos generará una mejor comprensión del escenario donde está operando el sensor. Existen diferentes métodos

ISSN 2448 – 7945

para la estimación de una frecuencia deseada, en general podemos decir que de acuerdo al tipo de señal se utilizan algunos métodos. Esto es porque para señales eléctricas y ópticas se utilizan diferentes métodos. En el caso de señales eléctricas, las mediciones tienen como objetivo ser lo más rápidas y precisas posible (Murrieta-Rico et al., 2020). La mayoría de los métodos reportados para esta tarea necesitan tener un tiempo de medición mínimo, y se necesita de más tiempo si se requieren mejores aproximaciones al mensurando. En el caso de fuentes ópticas se utilizan sistemas de aproximación de frecuencia basados en interferómetros Mach-Zehnder (Murrieta-Rico et al., 2019). En el trabajo de Li et al. (Li et al., 2023), se utilizan variaciones en los cambios de fase relativos a través de una línea de retardo óptico y distancias entre antenas. Luego, la comparación de fases basada en una línea de múltiples bases elimina la ambigüedad del ángulo de llegada en un amplio rango de frecuencia. Por tanto, la frecuencia y el ángulo de llegada se determinan mediante el análisis del desfase de la señal de frecuencia intermedia. Teniendo en cuenta las aplicaciones tecnológicas de los sensores en la actualidad, los sistemas de medición de frecuencia se incluyen en sistemas integrados. Por ejemplo, para el análisis de vibraciones, Kneifel et al. han propuesto un sistema basado en IoT. (Kneifel et al., 2023). En dicho sistema, la medición de la frecuencia se realiza después de la implementación de la transformada rápida de Fourier. En este trabajo, utilizando un prototipo que implementa el principio de aproximaciones raciones, se evalúan los datos generados durante el proceso de medición de frecuencia. Esto con el objetivo de evaluar el efecto de las mejores coincidencias durante el proceso de medición de frecuencia.

3. Metodología

Como se discutió en otra parte, el principio de aproximaciones racionales permite estimar una frecuencia desconocida f_x (Hz) a partir de datos obtenidos durante un proceso de comparación de señales. Esto es, que dada una señal de referencia $S_0(f_0)$ con una frecuencia conocida f_0 (Hz) y una señal deseada $S_x(f_x)$, se puede generar una tercera señal $S_x \& S_0$ cuando ambas señales se multiplican en el tiempo. Proporcionando una aproximación f_x al valor verdadero f_t (Hz). Esto es cierto si se considera que el ancho de los pulsos en ambas señales tiene la misma duración τ y $\tau \leq T_0/2$. Esto es que ambas señales deben tener pulsos cuadrados con duración constante. Si se cumplen estas condiciones, durante el proceso de coincidencia de señales, los pulsos se cuentan desde la primera coincidencia, luego el número de pulsos de las señales P_n deseada y Q_n de referencia se registra en cada n –coincidencia. Este proceso se representa en la Fig. 1.

Entonces, la frecuencia deseada f_x se puede aproximar a partir del conteo de las señales deseadas y de referencia como

$$f_x = f_o \frac{P_n}{Q_n}, \tag{1}$$

el error relativo β está dado por

ISSN 2448 – 7945

$$\beta = \left|\frac{f_t - f_x}{f_t}\right|, \quad (2)$$

y el tiempo de medición M_t (s) en cualquier fracción se obtiene a partir de

$$M_t = Q_n T_0. \quad (3)$$

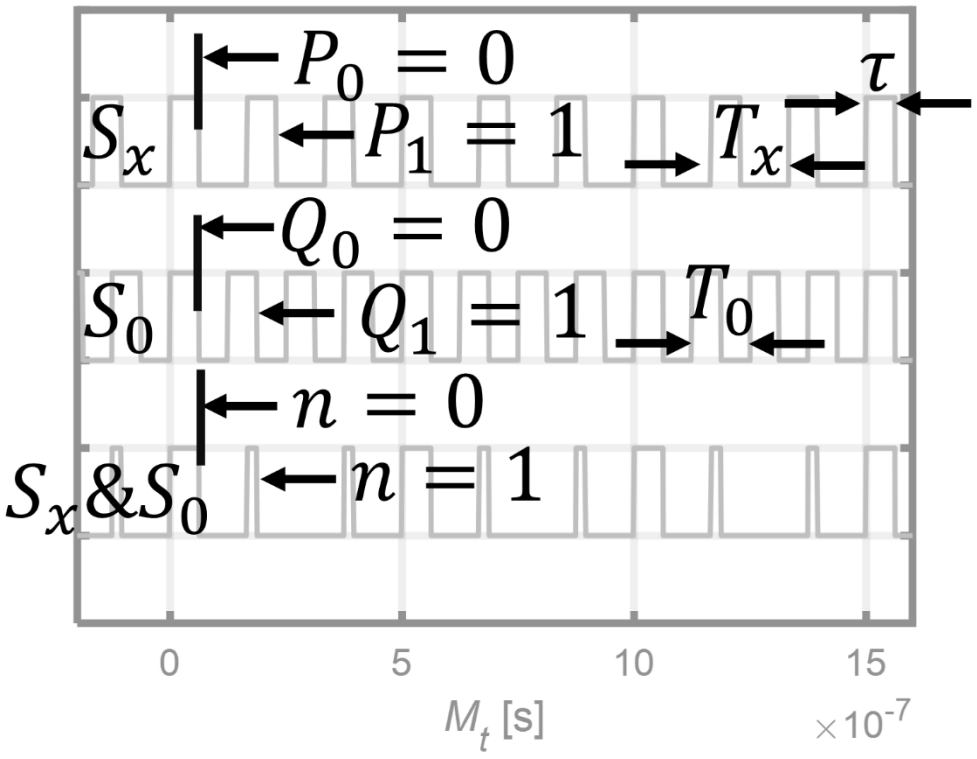


Figura 1. Representación del proceso de coincidencia de pulsos y de parámetros característicos durante el proceso de medición.

En este trabajo se utiliza un prototipo desarrollado por nuestro grupo de investigación y que implementa el principio de aproximaciones racionales (Murrieta-Rico et al., 2020, 2023). Como frecuencia de referencia se utilizó $f_0 = 8$ MHz y la señal a medir fue generada con un cristal de cuarzo de bajo costo, el cual tiene una frecuencia nominal $f_t = 6$ MHz. El sistema realizo 100 ciclos de medición, cada uno con 100 procesos de aproximación a f_x lo que generó un número total de aproximaciones $\eta = 10000$.

4. Resultados y análisis

Del proceso de medición se obtuvieron tripletas de datos n, P_n, Q_n esto es, el número de coincidencia, la cantidad de pulsos de la señal deseada y la cantidad de pulsos de la señal de referencia. De acuerdo con la Fig. 2a, se observa que la relación P_n, Q_n muestra una tendencia lineal, lo cual es coincidente con aproximaciones a f_x muy similares (Murrieta-Rico et al., 2016, 2018). Es

ISSN 2448 – 7945

importante destacar, que para cada η proceso de medición, la curva descrita por sus datos es presentada en un color característico. En el caso de las aproximaciones obtenidas, se tiene en general una convergencia muy similar para cada proceso de medición, lo que, de acuerdo con la literatura, indica una reducción en el error obtenido conforme en número de coincidencia se incrementa (Fig. 2b). Tanto en el cociente del conteo de pulsos, como en las aproximaciones a f_x se observan procesos de coincidencia que aparentemente no siguen el comportamiento general. Al ser estos pocos casos, a simple vista 3, se puede concluir que estas variaciones son procesos atípicos que pueden ser producto del funcionamiento de la electrónica en los circuitos utilizados en el prototipo.

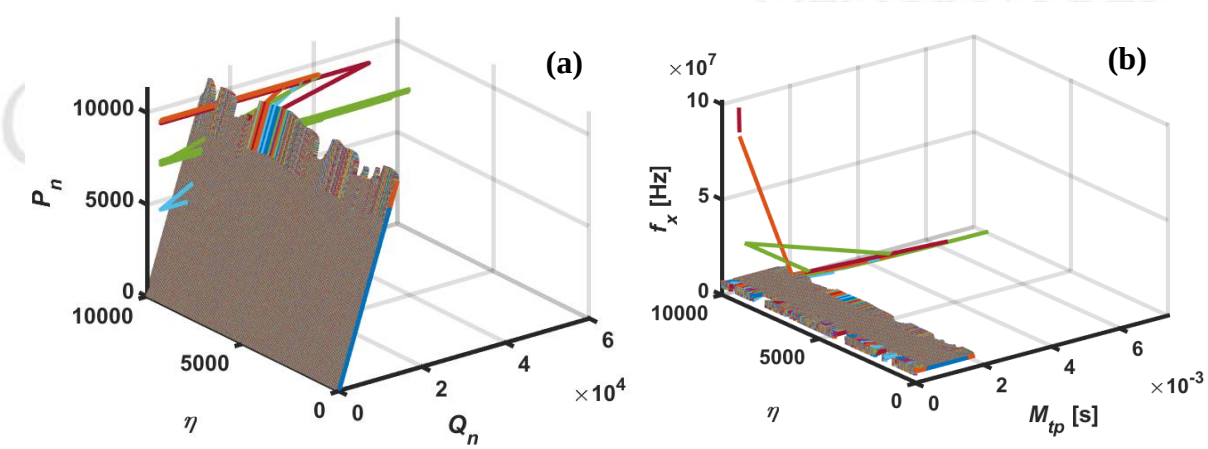


Figura 2. Datos experimentales obtenidos durante el proceso de medición: (a) valores de conteo P_n, Q_n y (b) proceso de convergencia de valores aproximados.

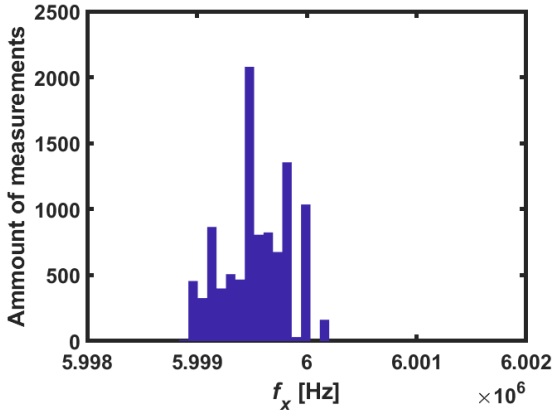


Figura 3. Histograma de valores aproximados de f_x.

Después de analizar los resultados de las aproximaciones obtenidas, y considerar la última aproximación obtenida en cada η, se obtiene el histograma mostrado en la Fig. 3. De acuerdo con lo observado, se puede concluir que la

ISSN 2448 – 7945

mayor parte de los datos analizados están agrupados cerca del valor de f_t, pero también están a la izquierda y por debajo de dicho valor, con lo cual se infiere que la incertidumbre del sistema está comprendida en los valores de f_x que son mostrados con la mayor cantidad de datos.

Los datos presentados en las Fig. 2 y 3 muestran que las aproximaciones obtenidas son precisas y permiten estimar de manera adecuada el valor de frecuencia deseado. Ahora, es importante considerar que una fracción medianta es de la forma

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} < \frac{P_{n+1}+P_n}{Q_{n+1}+Q_n} < \frac{P_n}{Q_n}, \tag{4}$$

donde la fracción $(P_{n+1}+P_n)/(Q_{n+1}+Q_n)$ cae entre las fracciones progenitoras P_{n+1}/Q_{n+1} y P_n/Q_n, como resultado, necesariamente $(P_{n+1}/Q_{n+1}) < (P_n/Q_n)$. Para los datos obtenidos a través del proceso de medición, se tiene que, si existen las fracciones mediantas, estas pueden ser descritas por la Fig. 4. Las mediantas pueden aparecer desde el principio del proceso de medición, pero también se incrementan de manera sostenida, en general, a partir de la coincidencia 40.

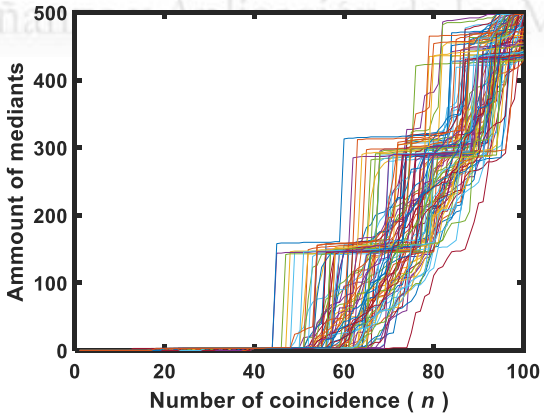


Figura 4. Variación del número de fracciones y el número de coincidencia donde ocurren para cada proceso de medición.

Este comportamiento evidencia que, en las primeras fracciones, la aparición de fracciones mediantas es escaza, mientras que después de un número suficiente de aproximaciones se tienen una mayor cantidad de mediantas mientas que incrementan de manera sostenida, en general, a partir de la coincidencia 40. Como es bien sabido, las fracciones mediantas ofrecen una mejor aproximación al mensurando que sus progenitoras. Para ilustrar esto, se puede tomar como referencia el caso de una de estas fracciones. Con $P_{157}/Q_{157} = 1455/1940 = 0.75$, $P_{158}/Q_{158} = 3698/4931 = 0.749949$, por lo que $0.7499 < 0.75$, con lo que se cumple que $(P_{n+1}/Q_{n+1}) < (P_n/Q_n)$, entonces se tiene que la fracción medianta $(1455+3698)/(4931+1940) = 0.749963$, por lo que $0.749949 < 0.749963 < 0.75$, con lo que se concluye que $(P_{n+1}/Q_{n+1}) < (P_n/Q_n)$ es una mejor aproximación que P_{157}/Q_{157} y P_{158}/Q_{158}, es decir, $5.999594 \times 10^6 < 5.999708 \times 10^6 < 6 \times 10^6$ y como

ISSN 2448 – 7945

consecuencia el valor más cercano a f_t es $f_x = 5.999708 \times 10^6$, con lo que al ser un proceso donde la convergencia tiende a f_t, la mayor parte de los datos se agrupan cerca del valor mencionado de f_x.

5. Conclusiones

En este trabajo se estudió la aparición de fracciones mediantas durante el proceso de coincidencia de pulsos, mientras que una frecuencia desconocida es aproximada. Como resultado, se verificó que cuando se detecta una fracción medianta, esta es una mejor aproximación que sus progenitoras al ser utilizadas para aproximar la frecuencia deseada. Se observa que aunque las fracciones mediantas no siempre aparecen durante el proceso de medición, sin embargo, cuando estas aparecen, se puede generar una gran cantidad de fracciones mediantas, lo que conlleva a que se tengan las mejores aproximaciones durante el proceso de medición.

Agradecimientos

Esta investigación fue financiada por el proyecto DGAPA-PAPIIT IG101623.

6. Referencias

Kneifel, J., Roj, R., Woyand, H.-B., Theiß, R., & Dültgen, P. (2023). An IIoT-Device for Acquisition and Analysis of High-Frequency Data Processed by Artificial Intelligence. IoT, 4(3), Article 3. https://doi.org/10.3390/iot4030013

Li, X., Wen, A., Li, X., & Wang, Z. (2023). Photonic-assisted Approach to Simultaneous Measurement of Frequency and Angle-of-arrival. Journal of Lightwave Technology, 1-11. https://doi.org/10.1109/JLT.2023.3300078

Murrieta-Rico, F. N., Petranovskii, V., Galván, D. H., Sergiyenko, O., Antúnez-García, J., Yocupicio-Gaxiola, R. I., & de Dios Sanchez-Lopez, J. (2020). Phase effect in frequency measurements of a quartz crystal using the pulse coincidence principle. 2020 IEEE 29th International Symposium on Industrial Electronics (ISIE), 185-190. https://doi.org/10.1109/ISIE45063.2020.9152255

Murrieta-Rico, F. N., Petranovskii, V., Yocupicio-Gaxiola, R. I., & Tyrsa, V. (2019). Zeolite-Based Optical Detectors [Chapter]. Optoelectronics in Machine Vision-Based Theories and Applications; IGI Global. https://doi.org/10.4018/978-1-5225-5751-7.ch001

Murrieta-Rico, F. N., Rivas-López, M., Sergiyenko, O., Petranovskii, V., Antúnez-García, J., Rodríguez-Quiñonez, J. C., Flores-Fuentes, W., Herrera, A. M., & García, A. G. (2023). Analysis of Frequency Domain Data Generated by a Quartz Crystal. En

ISSN 2448 – 7945

Encyclopedia of Data Science and Machine Learning (pp. 2272-2284). IGI Global. https://doi.org/10.4018/978-1-7998-9220-5.ch136

Murrieta-Rico, F. N., Sergiyenko, O. Yu., Petranovskii, V., Hernandez-Balbuena, D., Lindner, L., Tyrsa, V., Rivas-Lopez, M., Nieto-Hipolito, J. I., & Karthashov, V. M. (2016). Pulse width influence in fast frequency measurements using rational approximations. Measurement, 86, 67-78. https://doi.org/10.1016/j.measurement.2016.02.032

Murrieta-Rico, F. N., Sergiyenko, O. Yu., Petranovskii, V., Hernandez-Balbuena, D., Lindner, L., Tyrsa, V., Tamayo-Perez, U. J., & Nieto-Hipolito, J. I. (2018). Optimization of pulse width for frequency measurement by the method of rational approximations principle. Measurement, 125, 463-470. https://doi.org/10.1016/j.measurement.2018.05.008

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS CONTEXTUALIZADAS: UNA RESPUESTA EDUCATIVA PARA LA NUEVA NORMALIDAD

Trejo Trejo Elia*[1], Trejo Trejo Natalia[1]
[1]*Universidad Tecnológica del Valle del Mezquital. Carretera Ixmiquilpan-Capula, Km. 4, Nith, 42300 Ixmiquilpan, Hgo.*

EN-POSM080

Resumen

Este estudio, realizado en el contexto postpandemia de Covid-19, explora la adaptación de la enseñanza matemática mediante estrategias didácticas innovadoras, orientadas a preparar a los estudiantes para enfrentar desafíos actuales y futuros. Incorpora contextos de desarrollo profesional y situaciones cotidianas en el aprendizaje de las matemáticas, destacando la importancia de integrar estos elementos en la educación matemática para una mayor relevancia y aplicación práctica. Se adopta un enfoque metodológico que prioriza el diseño y la implementación de actividades matemáticas contextualizadas, adecuadas para la enseñanza a distancia, tanto en modalidades sincrónicas como asincrónicas. Estas actividades, fundamentadas en la Matemática en Contexto (MC), se ejemplifican mediante el desarrollo de una actividad específica enfocada en la ecuación diferencial en el marco de la Ley de Torricelli. La investigación se estructura en tres fases: el desarrollo de la propuesta didáctica, su implementación y el análisis de las percepciones estudiantiles recogidas a través de una encuesta. Los resultados indican un impacto positivo en el aprendizaje matemático de los estudiantes, evidenciando que la matemática contextualizada, aplicada en un entorno virtual, mejora significativamente la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos, además de incrementar la eficiencia y eficacia en la resolución de problemas. Asimismo, se destaca el desarrollo de habilidades transversales, como el trabajo colaborativo, la autorregulación y la autonomía. En conclusión, esta propuesta didáctica no solo optimiza la comprensión y aplicación de las matemáticas, sino que también promueve el desarrollo de competencias esenciales para el aprendizaje autónomo y colaborativo. Este estudio resalta la necesidad de adaptar la enseñanza matemática a desafíos emergentes y sugiere la exploración de metodologías contextualizadas en otros campos del conocimiento, abriendo vías para futuras investigaciones en educación matemática y su adaptación a la enseñanza virtual y a distancia.

Palabras clave: *matemáticas, educación, aula, aprendizaje, estrategias, pandemia.*

1. Introducción

El impacto de la pandemia de la COVID-19 en el ámbito educativo ha sido profundo y transformador, especialmente en la enseñanza de disciplinas fundamentales como las matemáticas en el nivel superior. La emergencia sanitaria obligó a los centros educativos de todo el mundo a adoptar rápidamente modalidades de enseñanza remota, haciendo uso intensivo de las Tecnologías para el Aprendizaje y el Conocimiento (TAC) y explorando la educación disruptiva como nunca antes (Bozkurt

1 *Trejo Trejo Elia. E-mail: elitret@gmail.com Tel.7711512042*

ISSN 2448 – 7945

et al., 2020). Esta experiencia sin precedentes ha dejado una marca indeleble en la práctica docente, instándonos a integrar las lecciones aprendidas durante este periodo en nuestra "nueva práctica docente" en la era postpandemia, también conocida como la "nueva normalidad".

La transición forzada a la enseñanza remota no solo presentó un desafío logístico, sino que también planteó preguntas fundamentales sobre cómo acercar el conocimiento matemático a los estudiantes de manera significativa, motivadora y desafiante, aprovechando las herramientas tecnológicas disponibles (Daniel, 2020). En este contexto, surge la necesidad de replantear la enseñanza de las matemáticas, fusionando estrategias pedagógicas previas y posteriores a la pandemia para crear un enfoque más integrador y efectivo en el aprendizaje matemático.

Considerando lo anterior, en este artículo se propone una estrategia didáctica que facilite un aprendizaje matemático significativo, en el cual los elementos tecnológicos se integren de manera efectiva y el estudiante se convierta en el protagonista de su propio proceso de aprendizaje. Esta inquietud refleja un desafío global que educadores de todo el mundo han enfrentado y continúan abordando en la búsqueda de respuestas adaptativas a las necesidades educativas emergentes (Scheleicher, 2021).

Con base en el concepto de educación a lo largo de la vida propuesto por Faure (1980) y reconociendo la importancia de preparar a los estudiantes para los desafíos profesionales actuales y futuros, se adopta el enfoque centrado en el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas. Este enfoque se alinea con la teoría educativa de la Matemática en Contexto de las Ciencias, desarrollada por Camarena (2017) en el Instituto Politécnico Nacional-México (IPN), y se adapta a las actuales exigencias mediante la integración de elementos del modelo híbrido disruptivo. Esta metodología combina el trabajo autónomo del estudiante en casa, siguiendo los principios del aula invertida, con sesiones presenciales que cumplen con los requisitos de un retorno seguro a las aulas.

1.1. Sobre la Matemática en Contexto de las Ciencias

La teoría de la Matemática en Contexto de las Ciencias (MCC), desarrollada por Camarena (2020), representa un enfoque innovador en la educación matemática que busca trascender el aprendizaje memorístico para fomentar una comprensión profunda y aplicada de los conceptos matemáticos. La investigadora, indica que esta teoría social se divide en cinco etapas (curricular, cognitiva, epistemológica, docente, cognitiva y didáctica -esta última denominada Matemática en Contexto-). La fase de la Matemática en Contexto es que da la pauta para vincular las matemáticas con las ciencias y áreas técnicas de formación de los futuros ingenieros (Figura 1). Siendo justamente estas etapas las que se articulan con el aula invertida y el modelo hibrido.

ISSN 2448 – 7945



Figura 1. Fases de la MCC.

1.2. Sobre el aprendizaje a lo largo de la vida, el aula invertida y el modelo hibrido

La teoría de aprendizaje para toda la vida sugiere que la educación es un proceso constante que supera los límites de la enseñanza formal, promoviendo la adquisición continua de conocimientos y habilidades esenciales para el desarrollo personal y profesional en un mundo en constante cambio (Jarvis, 2004; Field, 2000). Este enfoque enfatiza la importancia del aprendizaje permanente como un pilar fundamental para el crecimiento individual, fomentando la adaptabilidad, resiliencia e innovación para enfrentar los desafíos de la vida moderna y un entorno laboral dinámico (Aspin y Chapman, 2000; Commission of the European Communities, 2000). En este contexto, el aula invertida y el modelo híbrido emergen como metodologías educativas clave, adaptándose eficazmente a los retos educativos actuales, incluyendo la transición forzada por la pandemia de COVID-19. El aula invertida permite a los estudiantes explorar nuevos contenidos de manera independiente fuera del aula, optimizando el tiempo de clase para actividades interactivas y aplicadas, mientras que el modelo híbrido combina instrucción presencial y en línea, adaptándose a las necesidades individuales de los estudiantes y promoviendo una experiencia de aprendizaje flexible y personalizada (Bergmann & Sams, 2012; Bishop & Verlenger, 2013; Horn & Staker, 2015)

2. Metodología o desarrollo

Este estudio se realizó en una Universidad Tecnológica con estudiantes de ingeniería, quienes, debido a la pandemia por COVID-19, recibieron parte de su instrucción de manera virtual. Se seleccionaron 90 estudiantes a través de un muestreo no probabilístico intencional, basado en su disponibilidad y voluntad de participar. La intervención didáctica se centró en la implementación de la Matemática en Contexto

ISSN 2448 – 7945

de las Ciencias, utilizando situaciones reales para contextualizar conceptos matemáticos, especialmente ecuaciones diferenciales según el principio de Torricelli. Se diseñaron secuencias didácticas que integraban actividades para trabajo autónomo y colaborativo, aplicando el modelo de aula invertida, y se concluyó con una encuesta de satisfacción para evaluar la percepción estudiantil respecto al aprendizaje y la metodología empleada.

La evaluación del impacto de esta intervención didáctica se llevó a cabo mediante un enfoque mixto, que incluyó encuestas, entrevistas y análisis de rendimiento académico, para medir tanto el aprendizaje matemático como las percepciones de los estudiantes. Los datos recolectados se sometieron a análisis estadístico y de contenido, con el objetivo de identificar patrones y correlaciones significativas entre la estrategia didáctica implementada y los resultados de aprendizaje. Este enfoque metodológico proporciona una comprensión holística de la eficacia de la intervención, subrayando la importancia de contextualizar el aprendizaje matemático en la formación de ingenieros.

3. Resultados y análisis

3.1. Contextualización del problema

En la implementación de la Matemática en Contexto, se identificó un problema técnico apropiado que se aborda a través de la aplicación de ecuaciones diferenciales, específicamente utilizando el principio de Torricelli para modelar la dinámica de vaciado de un fluido en un contenedor, tal como se ilustra en la Figura 2. Conforme a las directrices establecidas por Camarena (2017) se ha prestado especial atención a garantizar que los conceptos matemáticos y técnicos introducidos estén dentro del alcance cognitivo de los estudiantes de ingeniería. Este enfoque didáctico contempla que el docente, durante la fase de panificación, establezca las bases conceptuales y técnicas necesarias para orientar el desarrollo de la secuencia didáctica y para facilitar la integración de conocimientos técnicos y matemáticos relevantes para la resolución del problema propuesto.

ISSN 2448 – 7945

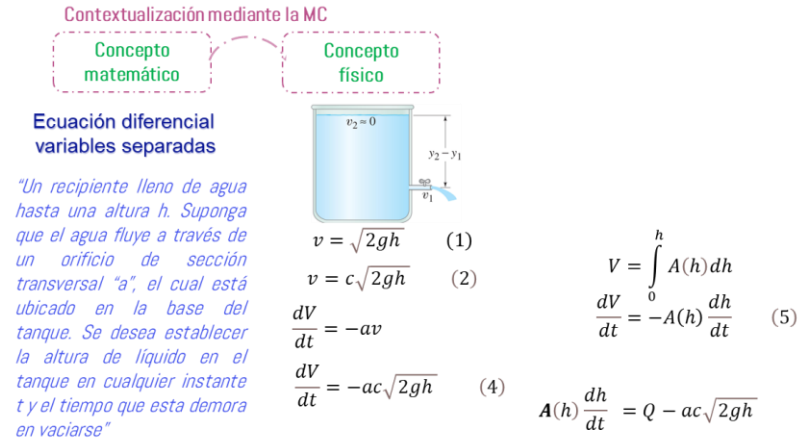


Figura 2. Selección del problema a contextualizar mediante la MC.

3.2. Integración de la MC, aula invertida y modelo híbrido

En la fase inicial del estudio, correspondiente a la primera etapa de la Matemática en Contexto (MC), se completó con éxito la planificación didáctica. Esta etapa preliminar incluyó la elaboración de todos los recursos educativos necesarios y la identificación anticipada de posibles obstáculos cognitivos que podrían enfrentar los estudiantes en el proceso de aprendizaje. Posteriormente, se facilitó el acceso a los materiales didácticos a través de la plataforma Classroom, proporcionando videos y documentos escritos para el estudio individual.

Siguiendo esta preparación, se introdujo un problema contextualizado a grupos de trabajo colaborativo en el aula. La dinámica grupal permitió a los estudiantes abordar la problemática de manera práctica y aplicada, siempre con la guía y supervisión continua del docente. La actividad se extendió a través de sesiones presenciales adicionales, destinadas a la resolución de dudas y al fortalecimiento del conocimiento mediante la proposición de nuevos desafíos y la aplicación de cuestionarios de evaluación sumativa para cerrar el tema tratado.

Este proceso de enseñanza-aprendizaje, meticulosamente estructurado, apuntó a una comprensión más profunda y a la habilidad para aplicar conocimientos matemáticos en contextos técnicos, evaluando la efectividad del enfoque de MC en el entorno educativo de ingeniería (Figura 3).

ISSN 2448 – 7945

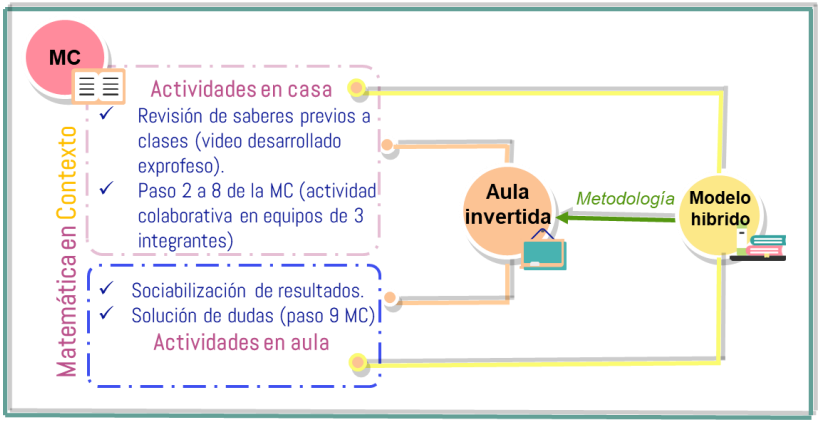


Figura 3. Integración de la Matemática en Contexto, modelo híbrido y aula invertida para la enseñanza de las maemáticas universitarias.

3.3. Percepción de los estudiantes sobre la propuesta

3.3.1. Percepciones sobre la Resolución de Eventos Contextualizados

La mayoría de los participantes consideran que la resolución de eventos contextualizados en matemáticas es importante y estimula el deseo de estudiar la materia, con una prominencia notable en las respuestas "Mucho" y "Regular". Además, se percibe una visión favorable respecto al trabajo en equipo y su influencia en el aprendizaje de las matemáticas, donde la mayoría de los estudiantes coinciden en que esta estrategia mejora su comprensión de los procedimientos matemáticos. Un conocimiento más realista de las matemáticas a través de eventos contextualizados fue también una opinión común, lo que sugiere una apreciación positiva hacia la aplicación práctica de la materia. En lo que respecta a la motivación para aprender matemáticas influenciada por la resolución de eventos contextualizados, los resultados muestran una tendencia positiva, aunque con una cantidad ligeramente mayor de respuestas "Regular" comparado con la pregunta sobre el conocimiento más real obtenido (Figura 4).

ISSN 2448 – 7945

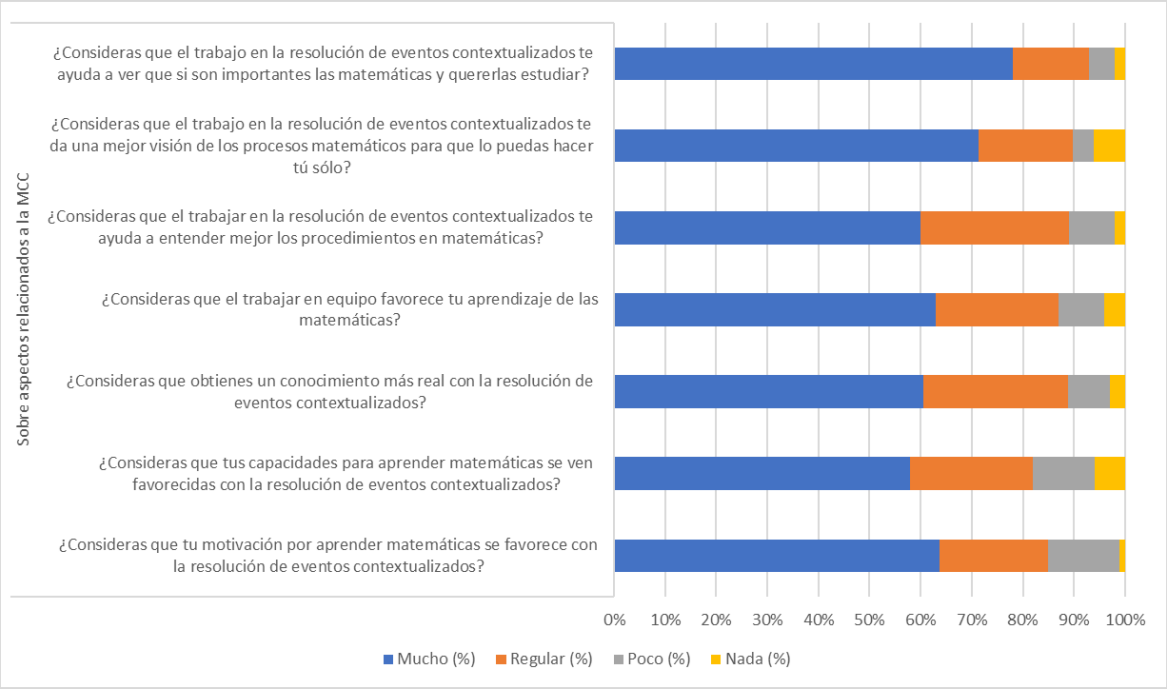


Figura 4. Percepción de los estudiantes sobre la aplicación de la MCC.

3.3.2. Percepciones sobre el modelo propuesto (híbrido, aula invertida,

Respecto al modelo híbrido de aprendizaje, los resultados reflejan una respuesta mayoritariamente positiva en términos de la eficacia percibida de la metodología y la capacidad de aplicar lo aprendido en otros contextos. La mayoría de los encuestados indicaron que el modelo les ayudó a reconocer la aplicabilidad de las matemáticas y se sintieron capaces de extender estas habilidades a otros ámbitos. El trabajo previo en casa, el trabajo colaborativo y la resolución de dudas de forma sincrónica fueron valorados positivamente en cuanto a su contribución al desarrollo del conocimiento matemático. Además, la capacidad para realizar operaciones matemáticas se consideró mejorada con la metodología del modelo híbrido. Finalmente, la motivación para aprender matemáticas con la metodología propuesta fue calificada como alta, lo que indica un respaldo general al modelo híbrido (Figura 5).

ISSN 2448 – 7945

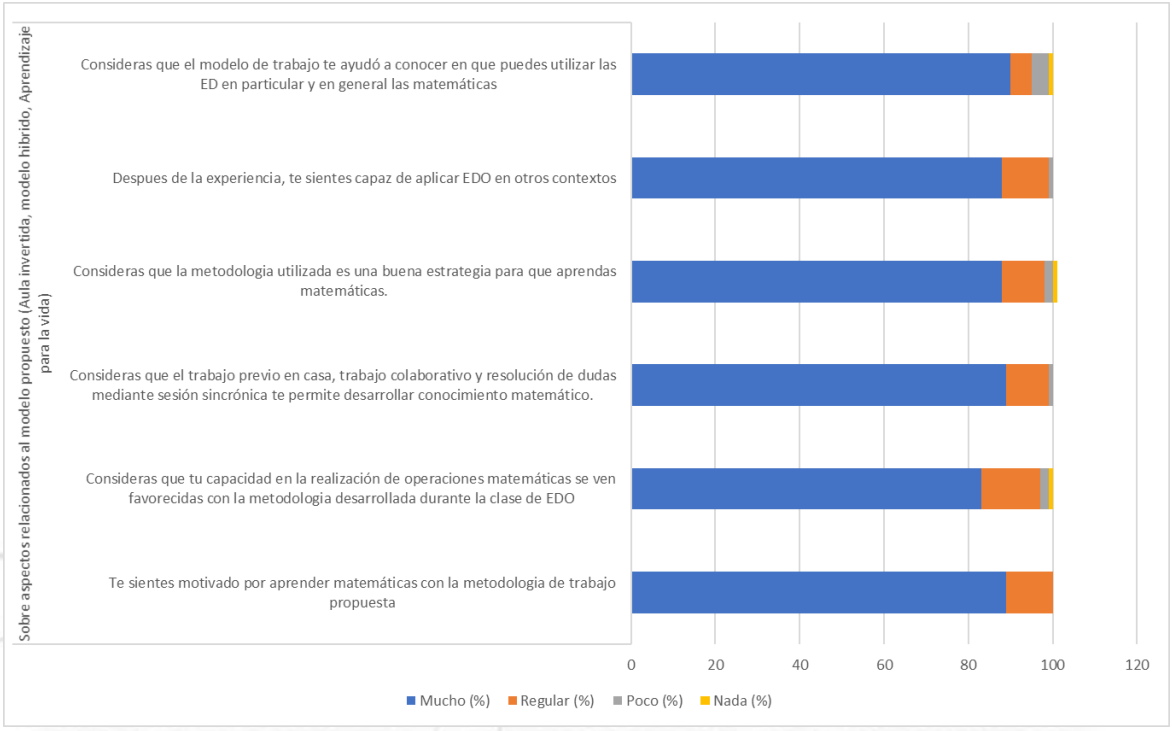


Figura 5. Aceptación del modelo propuesto.

4. Conclusiones

Este estudio validó la efectividad de la Matemática en Contexto de las Ciencias (MCC) y su integración con metodologías de aula invertida y aprendizaje híbrido en la formación de ingenieros. Los resultados indican que estas estrategias fomentan una comprensión matemática aplicada y relevante, alineada con la adquisición de habilidades para la vida profesional.

La adopción del modelo híbrido disruptivo, en respuesta a la necesidad de adaptación impuesta por la pandemia, ha demostrado ser una herramienta pedagógica valiosa. Se ha observado que promueve la autonomía del aprendizaje y prepara a los estudiantes para enfrentar desafíos en un mercado laboral en constante cambio. La continuación de esta línea de investigación es esencial para evaluar la sostenibilidad y transferibilidad de estas metodologías a otros campos educativos.

4. Índice de referencias

- Aspin, D. N., & Chapman, J. D. (2000). Lifelong learning: Concepts and conceptions. International Journal of Lifelong Education, 19(1), 2-19. https://doi.org/10.1080/026013700293458
- Bergmann, J., & Sams, A. (2012). *Flip your classroom: Reach every student in every class every day.* International Society for Technology in Education.

ISSN 2448 – 7945

- Bishop, J. L., & Verleger, M. A. (2013). *The flipped classroom: A survey of the research.* En Proceedings of the ASEE Annual Conference & Exposition. American Society for Engineering Education. https://peer.asee.org/22585
- Bozkurt, A., Jung, I., Xiao, J., Vladimirschi, V., Schuwer, R., Egorov, G., & Rodes, V. (2020). A global outlook to the interruption of education due to COVID-19 Pandemic: Navigating in a time of uncertainty and crisis. *Asian Journal of Distance Education, 15*(1), 1-126.
- Camarena, G. P. (2017). Didáctica de la matemática en contexto. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 19*(2). 1-26. Disponible en https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/33804
- Camarena, G. P. (2022). Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias. EDUNSE. Editorial Universitaria.
- Commission of the European Communities. (2000). *A memorandum on lifelong learning. SEC.* 1832. [PDF file]. https://www.voced.edu.au/content/ngv:23592
- Daniel, S.J. Education and the COVID-19 pandemic. Prospects 49, 91–96 (2020). https://doi.org/10.1007/s11125-020-09464-3
- Faure, E. (1980). *Learning to be: The world of education today and tomorrow*. UNESCO.
- Field, J. (2000). Lifelong learning and the new educational order. Trentham Books.
- Horn, M. B., & Staker, H. (2015). *Blended: Using disruptive innovation to improve schools.* Jossey-Bass.
- Jarvis, P. (2004). Adult education and lifelong learning: Theory and practice. Routledge Falmer.
- Schleicher, A. (2021). The impact of COVID-19 on education: Insights from Education at a Glance 2020. *OECD iLibrary*. https://doi.org/10.1787/0a530888-en

Congreso Internacional sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas
MEMORIAS DEL

ISSN 2448 – 7945

MEJORANDO EL APRENDIZAJE EN INGENIERÍA: EXPLORACIÓN Y APLICACIÓN CON ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS BASADAS EN ALGORITMOS

Márquez Ortega Domingo*[1], Pineda Becerril Miguel de Nazareth[2], García León Omar[3], Nequiz Medina Pedro Ernesto[4]
[1,2,3]*Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM*
Km 2.5 carretera Cuautitlán-Teoloyucan
San Sebastián Xhala, Cuautitlán Izcalli,
Estado de México. C.P. 54714.
[4]*Colegio de Ciencias y Humanidades, CCH Oriente*
Av. Canal de San Juan s/n, Tepalcates, Iztacalco,
Ciudad de México. C.P. 09210.

EN-POSM081

Resumen

El objetivo es destacar cómo el uso estratégico de diversos lenguajes de programación como Lenguaje c y Python, o paquetes como Maple, Matlab, Excel, facilitan el aprendizaje de métodos numéricos en Ingeniería Mecánica Eléctrica. Se busca motivar a los estudiantes a través de la implementación de estas herramientas, promoviendo un enfoque que permita desarrollar una comprensión profunda de los conceptos clave de la materia. El sustento teórico se basa en la premisa de que la diversidad de lenguajes de programación representa desafíos para los estudiantes de ingeniería, pero el uso estratégico de software puede superar estas dificultades. La implementación de herramientas como Maple, Matlab, Excel, Lenguaje C y Python se presenta como una solución para motivar a los estudiantes y facilitar el aprendizaje de métodos numéricos.
En cuanto a la metodología o desarrollo, se destaca la importancia de incorporar el desarrollo de algoritmos en un entorno de aprendizaje de JavaScript. Esta práctica no solo fomenta el pensamiento algorítmico, sino que también genera cambios significativos en el proceso educativo. La conexión práctica y significativa entre la teoría y la aplicación se logra mediante el desarrollo de códigos y algoritmos, fortaleciendo el conocimiento de los estudiantes. Este enfoque permite abordar de manera inmediata el análisis y lograr aprendizajes prácticos y sustanciales. En los resultados y/o conclusiones, se esperan mejoras en la motivación de los estudiantes, así como un mayor entendimiento y aplicación de los conceptos de métodos numéricos en Ingeniería Mecánica Eléctrica. Se resalta la eficacia de la estrategia que incorpora el uso de múltiples lenguajes de programación y el desarrollo de algoritmos para fortalecer el aprendizaje práctico y significativo. Además, se sugiere que este enfoque puede ser extrapolado a otras áreas de la ingeniería, generando impactos positivos en el proceso educativo.

Palabras clave: *Lenguajes, Programación, Pensamiento, algoritmos, códigos.*

1 **Autor para la correspondencia. E-mail: marquez_od@yahoo.com.mx*

ISSN 2448 – 7945

1. Introducción

En la computación científica, el cálculo de los ceros o raíces de una función, o de un cierto conjunto de funciones, es un problema que aparece frecuentemente. Sin embargo, solo hay una pequeña cantidad de fórmulas que permiten representar simbólicamente dichos ceros. Desde un punto de vista computacional, la técnica para resolver este tipo de problemas consiste en generar sucesiones de valores que se aproximen tanto como uno desee a dichas raíces.

Además, es común obtener estas sucesiones mediante la combinación de dos métodos numéricos: uno muy eficiente pero localmente convergente, mientras que otro lento (o algo menos eficiente) pero con buenas características de convergencia global. Todos esos métodos eficientes dependen del conocido método de Newton.

La optimización sin restricciones es otro tipo de problema que también aparece con frecuencia en la práctica. Aunque el análisis teórico (en términos de aritmética exacta) de estos temas y los mencionados anteriormente tienen caminos diferentes, desde un punto de vista computacional, existe una estrecha conexión entre ambos. Como veremos más adelante, el método de Newton vuelve a ser relevante.

Los cálculos en matemáticas se realizan utilizando algoritmos numéricos estables. El Tratado Axiomático de Base de Programación de Computadoras de Hoare (Wirth, 1987) demostró de manera divertida que los programas están preparados para un análisis minucioso basado en el razonamiento matemático.

Sin embargo, es evidente que en el caso de programas grandes y complejos que incluyan conjuntos de datos complejos, un enfoque sistemático y científico en la construcción de programas tiene una conexión primaria. En última instancia, los programas son desarrollos precisos de algoritmos abstractos que se basan en estructuras y representaciones matemáticas específicas.

El trabajo actual examinará algunas de las herramientas que ofrece JavaScript para la resolución de ejemplos de funciones. En cualquier caso, es importante destacar que JavaScript también se puede utilizar para resolver una variedad de problemas matemáticos y científicos mediante métodos numéricos. A pesar de que JavaScript es principalmente conocido por su uso en el desarrollo *web*, su capacidad para realizar cálculos numéricos lo hace útil en aplicaciones que requieren análisis numérico.

JavaScript debe desatacarse porque trabajaremos con pequeños códigos que nos ayudarán a resolver funciones en situaciones difíciles o complejas.

ISSN 2448 – 7945

2. Metodología o desarrollo

2.1. Ceros de funciones de una variable

En esta sección, consideraremos siempre una función continua $f:[a,b]\to R$ tal que $\big(f(a)f(b)\big)<0$ lo cual, gracias al teorema de Bolzano, nos garantiza que f tiene al menos un cero en (a,b). La cuestión numérica que abordaremos será el cálculo efectivo de ese cero (si es único) o de alguno de ellos. Para resolver este tipo de problemas, las técnicas computacionales combinan el método de bisección, que es lento, pero casi infalible, con ciertas variantes del método de Newton, que son algoritmos muy eficientes pero cuya convergencia es local. Por ejemplo, en este patrón se aplica a la orden fzero en Matlab.

2.1.1. El método de bisección

La estrategia del método de bisección (Burden, 1999), utiliza una sucesión de intervalos cada vez más pequeños de modo que siempre contengan un cero de f. En particular, se denota $[a_1,b_1]\coloneqq[a,b]$ y considerando que $c_1\coloneqq\frac{a+b}{2}$.

Pueden darse dos casos (recordemos que $f(a)f(b)<0$):

1. $f(c_1)=0$: En este caso, paramos porque se obtuvo un cero de f.
2. $f(c_1)\neq 0$: En esta situación, seleccionamos el subintervalo $[a_1,c_1]$ o $[c_1,\ b_1]$ en cuyos extremos la función f toma signos opuestos. Necesariamente, dicho subintervalo debe tener una raíz de f.

Esta acción del proceso se repite una y otra vez. Por tanto, el proceso anterior proporciona un cero de f en un número finito de pasos o genera una sucesión de puntos c_n que converge a un cierto cero de f en (a,b). En particular, el método de bisección es muy robusto (converge en un contexto muy general). Por otro lado, las acotaciones aproximadas se estiman con la Ec. (1):

Ecuación 1. Aproximaciones bisección $|c_n-\alpha|\approx\frac{b-a}{2^n}$

reflejan la tendencia a la convergencia de c_n al cero sea bastante lenta. En la Fig. 1 se muestra la Interfaz Gráfica de Usuario (GUI) donde se inicia con el punto medio del intervalo desarrollando la demostración para llegar a la ecuación recursiva. Con esta implementación que se seguirá trabajando para contemplar otros métodos numéricos que reciba los argumentos de cada ecuación correspondiente, los extremos de un intervalo inicial, así como el número máximo de iteraciones con las cifras significativas requeridas con los decimales para lograr aproximaciones al cero correspondiente.

ISSN 2448 – 7945



Figura 1. Interfaz Gráfica de Usuario

La convergencia: cuando al evaluar la función en x el valor absoluto es menor a un error de tolerancia, dentro de: $0 < \epsilon < 1$ y con ello el método de bisección se detiene. $|f(x)| < error$ o bien $|b - a| < error$

Tabla 1. Algoritmo del método de bisección

Paso	Procedimiento	Comentario
1.	Leer el intervalo (a, b) y el error de la tolerancia	
2.	Evaluar $f(a)$ y $f(b)$	
3.	Si $(f(a)f(b)) > 0$, entonces no hay raiz	Dar otro intervalo o terminar el método.
4.	Si $\|f(a)\| < \epsilon$, entoces la raíz es a	Se detiene el método
5.	Si $\|f(b)\| < \epsilon$, entoces la raíz es b	Se detiene el método
6.	$x = \frac{a+b}{2}$	
7.	Evaluar $f(x)$	
8.	Si $\left(f(a)f(b)\right) < 0$, entonces $b = x$, $f(b) = f(x)$;	Si $f(a) * f(b) \geq 0$ $a = x$ $f(a) = f(x)$
9.	Regresar al paso 4	

Una estructura de programa fundamental para realizar cálculos por el método de bisección con JavaScripts se muestra en la Fig.2 algoritmo en JavaScript para el método de bisección.

ISSN 2448 – 7945

```
<div class="p-4 mb-4 bg-body-tertiary rounded-3">
    <div class="card">
        <div class="card-header">
            Método de Bisección
        </div>
        <div class="card-body">

            <div class="row">
                <div class="col-sm-12 col-md-12 col-lg-12">
                    <p class="fw-bold">Resultados y análisis</p>
                    <p>
En la tabla 1 se ilustran los cálculos realizados a mano, cabe destacar que cuando el estudiante realiza dichas operaciones
                        en este problema con N iteraciones suele llevarse aproximadamente entre 30 o 40 minutos y con una pro
babilidad alta de tener error.
                    </p>
                </div>
                <div class="col-sm-12 col-md-4 col-lg-4" style="min-height:320px;">
                    <p class="fw-bold text-primary">Ejemplo:</p>
                    <p class="">Encontrar la raíz aislada de la función</p>
                    <p class="">f (x) = x3 - x -1 en el intervalo [1, 2] con un error ε = 01</p>
                    </br>
                    <p class="fw-bold">Tabla. 1 Valores por el Método de Bisección</p>

                </div>
                <div class="col-sm-12 col-md-8 col-lg-8">
                    <canvas id="cartesian-plane"></canvas>
                </div>
            </div>

            <form class="row g-3 my-2">
                <div class="col-sm-6 col-md-2 col-lg-2">
                    <label for="input_label" class="visually-hidden">#</label>
                    <input type="text" readonly class="form-control-plaintext" id="input_label" value="Ingrese el numero">
                </div>
                <div class="col-sm-6 col-md-3 col-lg-3">
                    <label for="input_number" class="visually-hidden">numero</label>
                    <input type="number" class="form-control" id="input_number" placeholder="#" value="1" min="1" required>
                </div>
                <div class="col-sm-12 col-md-6 col-lg-6">
                    <div class="input-group">
                        <button type="button" class="btn btn-primary mx-2 btn-block" id="btnTblRowCreate">Comenzar</button>
                        <button type="button" class="btn btn-danger mx-2 btn-block" id="btnDetener">Detener</button>
                    </div>
                </div>
            </form>

            <br/>

            <div class="table-responsive">
                <table class="table table-striped">
                    <thead>
                        <tr>
                            <th>K</th>
                            <th>\( a_{K} \)</th>
                            <th>\( b_{K} \)</th>
                            <th>\( X_{k+1} = \left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) \)</th>
                            <th>\( f(x_{k+1}) \)</th>
                        </tr>
                    </thead>
                    <tbody id="multiplicationTableBody">
                    </tbody>
                </table>
            </div>

            <div id="content_render"></div>
        </div>
    </div>
</div>
```

Figura 2. Algoritmo en JavaScript para el método de bisección

JavaScript es un lenguaje de programación ampliamente utilizado en el desarrollo *web*. Es un lenguaje de programación interpretado que se utiliza principalmente para agregar interactividad a las páginas *web*. A menudo se describe como el "lenguaje de la *web*", ya que la mayoría de los navegadores *web* modernos lo admiten y lo ejecutan.

JavaScript se utiliza para realizar diversas tareas en el desarrollo *web*, como validar formularios, crear efectos visuales dinámicos, manipular contenido HTML y CSS, interactuar con servidores *web* para cargar o enviar datos sin necesidad de recargar la página completa (mediante AJAX), entre muchas otras cosas.

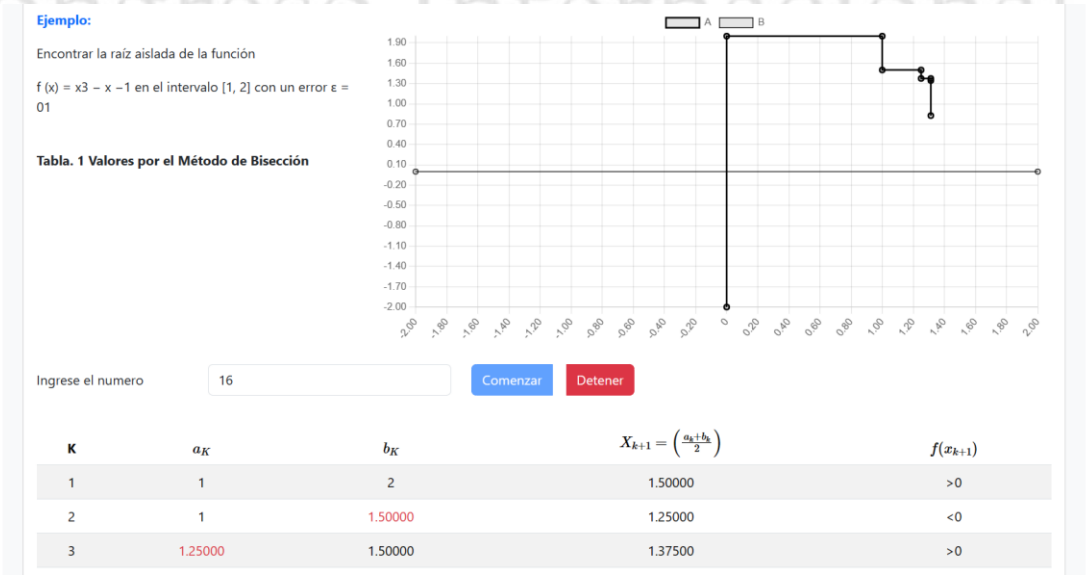
Además de su uso en el desarrollo *web*, JavaScript también se utiliza cada vez más en el desarrollo de aplicaciones móviles (a través de *frameworks* como *React Native*)

ISSN 2448 – 7945

y en el desarrollo de servidores (con Node.js), lo que le permite ejecutarse fuera del navegador y ampliar sus capacidades más allá del ámbito *web*.

3. Resultados y análisis

La Fig. 3 valores y procesos por el método de bisección, donde se ilustran los diferentes apartados, en el de la parte superior izquierda el enunciado del ejemplo para este caso: determinar una aproximación de la raíz de la expresión $x^3 - x - 1 = 0$; en el intervalo de $I = [1,2]$ con un error de tolerancia de $\epsilon = 10^{-2}$. En la parte superior derecha el comportamiento de la trayectoria de la función con los valores por el método de bisección que se obtienen mediante el algoritmo en JavaScript. En la parte inferior llegando al resultado por medio de una estructura donde los datos se organizan en filas y columnas para obtener una aproximación deseada con un valor de 1.32477 dentro de los parámetros indicados al inicio del problema.



K	a_K	b_K	$X_{k+1} = \left(\frac{a_k + b_k}{2}\right)$	$f(x_{k+1})$
1	1	2	1.50000	>0
2	1	1.50000	1.25000	<0
3	1.25000	1.50000	1.37500	>0

Figura 3. Valores y procesos por el método de bisección

La Fig. 4 ilustra los valores por el método de bisección los cálculos ejecutados mediante el algoritmo de Java Script llegando al resultado en la iteración 14 con una raíz aproximada de 1.32477.

ISSN 2448 – 7945

K	a_K	b_K	$X_{k+1}=\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)$	$f(x_{k+1})$
1	1	2	1.50000	>0
2	1	1.50000	1.25000	<0
3	1.25000	1.50000	1.37500	>0
4	1.25000	1.37500	1.31250	<0
5	1.31250	1.37500	1.34375	>0
6	1.31250	1.34375	1.32813	<0
7	1.31250	1.32813	1.32031	<0
8	1.32031	1.32813	1.32422	>0
9	1.32422	1.32813	1.32618	>0
10	1.32422	1.32618	1.32520	<0
11	1.32422	1.32520	1.32471	<0
12	1.32471	1.32520	1.32496	>0
13	1.32471	1.32496	1.32483	<0
14	1.32471	1.32483	1.32477	<0
15	1.32471	1.32477	1.32474	<0
16	1.32471	1.32474	1.32472	<0

Figura 4. Valores por el método de bisección

JavaScript ofrece funciones y bibliotecas matemáticas incorporadas que pueden ser útiles para implementar estos métodos numéricos, como las funciones matemáticas estándar (Math.Jax, etc.) y bibliotecas como math.js o numeric.js que proporcionan herramientas más avanzadas para el análisis numérico.

4. Conclusiones

Utilizar JavaScript en métodos numéricos tiene muchas ventajas, como la portabilidad, la escalabilidad, la accesibilidad, la interactividad y la facilidad de implementación, lo que lo hace una opción atractiva para desarrolladores que desean implementar soluciones numéricas en entornos *web*.

Los algoritmos son fundamentales para el desarrollo de métodos numéricos en las ingenierías, por lo que trabajar con código resulta un aprendizaje didáctico para el estudiante. Al resolver los ejercicios anteriores, se demostró que llevar a cabo el procedimiento y también realizando algoritmos, se verifica que los resultados se obtienen de manera instantánea.

Debido a la interactividad, la visualización de resultados, la retroalimentación inmediata, la aplicación práctica de conceptos teóricos y el desarrollo de habilidades de programación que ofrece esta aproximación, el aprendizaje de los estudiantes al resolver métodos numéricos con JavaScript puede ser altamente efectivo.

ISSN 2448 – 7945

Se crea un formalismo sencillo, confiable y preciso, que se propone como un método adicional para ser utilizado en cursos introductorios a algún lenguaje de programación a nivel licenciatura. Resulta ser una herramienta que ayuda a los estudiantes a plantear y encontrar soluciones algorítmicas a problemas.

5. Índice de referencias

- Burden, R. L. (1999). *Análisis Numérico.* México: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. DE C.V.
- Wirth, N. (1987). Algoritmos y Estruc*tura de Datos* (Primera ed.). (J. C. Vega Fagoaga, Trad.) México: Prentice Hall.

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

UNA EXPERIENCIA DIDÁCTICA DE LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Márquez Ortega Domingo*[1], Pineda Becerril Miguel de Nazareth[1]
[1]Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM. Km 2.5 carretera Cuautitlán-Teoloyucan. San Sebastián Xhala, Cuautitlán Izcalli, Estado de México. C.P. 54714.

ID-POSM082

Resumen

El objetivo de la exposición es promover la comprensión profunda de la integral definida a través de la interpretación geométrica, respaldado por un sustento teórico que destaca su importancia en el aprendizaje de las matemáticas, una metodología basada en actividades prácticas y herramientas visuales, y los resultados observados que respaldan la eficacia de este enfoque didáctico. La experiencia didáctica de la interpretación geométrica de la integral definida, enfatizando su importancia en el campo de las matemáticas. La integral definida, siendo una herramienta fundamental en cálculo, con frecuencia se enseña desde una perspectiva puramente algebraica, lo que puede dificultar su comprensión intuitiva para los estudiantes. Para facilitar la comprensión de los conceptos clave relacionados con la integral definida, se utilizó un enfoque educativo que se centra en la visualización geométrica. Se explora un enfoque innovador que emplea la interpretación geométrica como herramienta para enseñar la integral definida buscando promover una comprensión profunda y significativa. El uso de este enfoque no sólo mejora la experiencia educativa, sino que también ayuda a los estudiantes a desarrollar una base sólida en cálculo y una apreciación más profunda de la conexión de representaciones gráficas y algebraicas. La experiencia didáctica incluyó actividades prácticas que representaban funciones y regiones bajo la curva. Para ilustrar de manera precisa los conceptos abstractos relacionados con la integral definida, se utilizaron herramientas visuales como gráficos, animaciones y modelos. Este enfoque no sólo mejoró la comprensión conceptual de los estudiantes, sino que también despertó su interés y participación. Se presentan situaciones en las que la interpretación geométrica de la integral definida proporciona soluciones visualmente significativas. Se analizarán los resultados obtenidos y se destacará cómo los estudiantes han mejorado su comprensión y retención de información.

Palabras clave: *Interpretación, integral, algebraica, visualización, didáctica, animaciones.*

1. Introducción

Durante el desarrollo del presente trabajo se podrá adentrarse a esta propuesta alternativa como un modelo didáctico de las 5E que con la visualización como característica del software se podría replantear el discurso matemático en el aula de clases.

En el caso de la metodología o el desarrollo, el trabajo está organizado en las siguientes partes:

1 *Autor para la correspondencia. E-mail: marquez_od@yahoo.com.mx Tel. 56-23-19-04, Fax 00-00-00-00*

ISSN 2448 – 7945

2.1. El área propiedad derivada de una magnitud básica de longitud: se plantea el concepto de la integral definida con una de las propiedades fundamentales como es el concepto de la suma de áreas, utilizando el software libre Geogebra y la hoja de cálculo Excel.

2.2. La integral $f(x) = x^2 + 1$: El trabajar con intervalos en los puntos extremos izquierdo y derecho nos permite introducir implícitamente el concepto de desigualdad e inferir los conceptos de límite e infinito. Indicar las nuevas formas de aprender y practicar con estos recursos.

Para finalmente llegar a los resultados y análisis: Es importante destacar la representación geométrica que nos permita llegar a la abstracción por medio de objetos reales, observables y manipulables, sin olvidar el aspecto y naturaleza de la rigurosidad y sistematización de las matemáticas ni de los modelos analíticos y científicos.

Comprender los conceptos y hacer uso del lenguaje analítico, las gráficas tienen un desarrollo que sustenta una construcción de conocimiento matemático Flores (2005), Cen (2006) y Torres (2004) que han aportado información de los tipos de gráficas.

En ocasiones nos enfrentamos a diferentes problemáticas, sin lograr entender o llegar a la esencia de las cosas, es por eso que con el apoyo de las gráficas y del software especializado para el área de matemáticas, nos permite realizar presentaciones de forma atractiva, dinámica. Por todo lo anterior, como bien lo menciona Suarez y Cordero (2009), la gráfica aporta evidencias de las relaciones que se establecen entre las características situación de cambio y variación.

2. Metodología o desarrollo

2.1. El área propiedad derivada de una magnitud básica longitud

La idea fue trabajar con una de las propiedades fundamentales como es el concepto de área e ir generando intervalos dónde poder observar el comportamiento en la función para que el estudiante se apropie del conocimiento significativo. Es por eso que, desde un punto de vista de la teoría del concepto figural, al objeto geométrico se le puede pensar de dos formas: como objetos y como conceptos (Fischbein, 1993). Por medio del software Geogebra, así como el uso de Excel, se muestran cantidades infinitamente pequeñas ausentes en la enseñanza tradicional del cálculo, dándose un trato formal a dichas magnitudes (Keisler, 2000). Estos supuestos están en conformidad con la idea de Leibniz (Kleiner, 2003) de visualizar a las curvas como una región de un número infinito de polígonos. La representación analítica de las funciones en ocasiones no permite distinguir características que la gráfica puede mostrar, es por ello que, en este trabajo, se propone la solución de problemas mediante la construcción gráfica, esto asistido por un software matemático que permita conjeturar, analizar y argumentar la solución que conlleve al desarrollo del pensamiento matemático.
Al respecto de las representaciones, Duval (1998) considera que la distinción entre objeto matemático y su representación es el punto estratégico para la comprensión de la matemática.

ISSN 2448 – 7945

Por otro lado, se hace una mejor exploración bajo el modelo 5E (Bastida Izaguirre, 2019), de los recursos e integrar campos disciplinarios que nos permitan crear y desarrollar una práctica de forma transversal, como se ilustra en la Tabla 1.

Tabla 1. Cuadro describiendo cada uno de los aspectos solicitados para desarrollar una estrategia de aprendizaje basada en el Modelo 5E. Título del proyecto: ¿Cómo podemos aplicar integral definida en situaciones cotidianas?

Modelo de las 5E					
	Enganchar	Explorar	Explicar	Elaborar	Evaluar
CONCEPTO	Comprender y aplicar el concepto de integral en situaciones de la vida cotidiana. ¿Cómo consideras que es el área bajo la curva? ¿cómo ciertas situaciones pueden modelarse con integrales definidas? ¿Da una explicación muy breve de lo anterior?	Los estudiantes investigarán situaciones de la vida cotidiana donde se requiere el uso de la integral definida. Explorar la noción de integral definida.	Explicar la importancia de este concepto en el cálculo y su aplicación en problemas del mundo real. Explicar la teoría y la notación de la integral definida.	Los estudiantes aplicarán los conceptos de integral definida aprendidos en la fase anterior para resolver los problemas identificados en la fase de exploración. Como puede ser modelos económicos, o de alguna otra área	Se evaluará el proceso de resolución de problemas de casos de estudio con diversas disciplinas para la comprensión de los estudiantes.
PROCESO	Despertar el interés de los estudiantes en el concepto de pendiente y ángulo de inclinación. Desarrollar habilidades de pensamiento crítico y analítico al resolver problemas matemáticos.	Permitir que los estudiantes experimenten con la idea de integral definida. Identificarán problemas matemáticos que puedan surgir en estas situaciones.	Presentar la definición formal de una integral definida y su interpretación geométrica. Utilizar herramientas visuales como gráficos en 2D y 3D para ilustrar cómo la integral definida representa el área bajo una curva.	Aplicar los conceptos en problemas más complejos y situaciones del mundo real. Se les animará a utilizar diferentes estrategias y métodos para llegar a soluciones. Como por ejemplo utilizar software para verificar las respuestas.	Así mismo, se realizará una discusión en grupo sobre la importancia de entender este concepto de las matemáticas y su utilidad en la vida diaria Evaluar la comprensión y la habilidad para aplicar los conceptos en problemas diversos.
EJEMPLO	Mostrar una imagen de una carretera empinada y preguntar a los estudiantes: "¿Qué creen que significa la inclinación de esta carretera?". Utilizar el pensamiento matemático para tomar decisiones en diferentes contextos.	Proporcionar un conjunto de objetos uso de rectángulos para aproximar el área bajo la curva. Objetos de aprendizaje desarrollado en GeoGebra: https://bitly.ws/3h3hs	Introducción de la notación de la integral definida y sus propiedades. Luego, mostrar la fórmula para calcular la integral. Se proporcionarán ejemplos y explicaciones claras para facilitar la comprensión.	Pedir a los estudiantes que calculen la integral en problemas de casos prácticos para calcular áreas. Aplicar lo aprendido para resolver dichos problemas.	Proporcionar una serie de problemas que requieran calcular la integral en diferentes contextos, y evaluar las respuestas de los estudiantes. Evaluación formativa y sumativa

2.1.1 Descripción del área bajo la función

Se tiene la función *f(x)* y su gráfico donde se quiere encontrar el área bajo la curva ¿Qué se entiende por área bajo la curva? El área que se encuentra debajo de la función *f(x)* y por encima del eje de las *x*, la región R está acotada por el eje de abscisas x, las rectas $x = a$ y $x = b$, y la curva que tiene por ecuación $y = f(x)$, donde f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ (Leithold, 1987); es decir, queremos en particular encontrar el área en el intervalo $[a, b]$. Es muy importante el concepto de intervalo para lo que se va a desarrollar en esta propuesta, todo intervalo presenta un extremo derecho que en este caso es la *b* y tiene un extremo izquierdo que en este caso es la *a.* Responder a la pregunta ¿encontrar el área de *f(x)* en el intervalo $[a, b]$? es nuestra prioridad de esta propuesta donde el alumno pueda observar y analizar.

ISSN 2448 – 7945

2.2. La integral $f(x)= x^2+1$

Para determinar que la integral definida de una función no negativa es el área de la región que está entre su gráfica y el eje x (De Oteyza, 2006). Acotada entre valores y obtener así el resultado de la integral. Definición de área bajo una curva (Smith y Minton, 2003): Para una función f definida en el intervalo $[a,b]$, si f es continua en $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$, el área A bajo la curva $y = f(x)$ en $[a,b]$ está dada por $A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$.

Como aplicamos lo anterior a un caso más general, se tiene una función *f(x)* y queremos calcular el área bajo la curva en el intervalo $[a,b]$, calcular el área de rectángulos el área $A_1 < A$, $A_2 > A$ y sabemos que con esto hemos logrado acotar el área que estamos buscando, es decir, el valor se debe de encontrar entre estos dos valores $(b - a)f(a) < A < (b - a)f(b)$ lo que rescatamos es la idea del procedimiento que se va a seguir para encontrar el área de cualquier función *f(x)* en un intervalo $[a,b]$, se toma como se muestra en la Figura 1 la función $f(x)= x^2+1$.

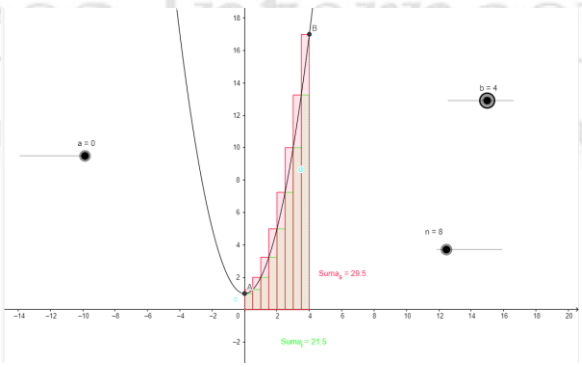


Figura 1. Función $f(x) = x^2 + 1$, con $n = 4$.

Vamos a encontrar el área bajo la curva en el intervalo [*0,4*] para lo cual nos apoyamos en una idea brillante que se debe a los griegos: dividir el intervalo [*0,4*] en ocho subintervalos con la finalidad de calcular el área de los rectángulos observando que la base de los cuatro rectángulos vale 0.5 y la altura está calculada en el extremo derecho de cada intervalo, ejemplo el intervalo [3.5,*4.00*] su lado derecho es 4 como estamos evaluando la función su extremo derecho, la altura de este rectángulo es 17 por la base *0.5* el área vale 8.500 u^2 y así sucesivamente.

La región se divide en n partes, de forma que se pueda determinar un valor aproximado del área de toda la región al sumar dichas áreas de las partes en que fue dividida. Sin embargo, se determinó una cota superior y una cota inferior a lo que se quiere encontrar haciendo uso de Excel, cuando se evaluaron los rectángulos por extremos izquierdos de cada intervalo se tiene la Tabla 2. Valores por el extremo izquierdo en Excel, muy semejante a la posterior, pero la suma de las regiones en este caso desde L_1 hasta L_8, $L = L_1+L_2+L_3+L_4+\ldots+L_n$, donde ahora el resultado fue de 21.500 u^2.

ISSN 2448 – 7945

Tabla 2. Valores por el extremo izquierdo

n	x(izq)	f(x)	Δ(x)	L	Δ(x)f(x)
1	0.0	1.00	0.5	L_1	0.500
2	0.5	1.25	0.5	L_2	0.625
3	1.0	2.00	0.5	L_3	1.000
4	1.5	3.25	0.5	L_4	1.625
5	2.0	5.00	0.5	L_5	2.500
6	2.5	7.25	0.5	L_6	3.625
7	3.0	10.00	0.5	L_7	5.000
8	3.5	13.25	0.5	L_8	6.625
Sumatoria del Área total ∑					21.500 u^2

Evaluando a la función en el extremo derecho, como se muestra en la Tabla 3. Valores por el extremo derecho. Con la información anterior se pueden evaluar las regiones de S_1 hasta S_8 obteniéndose la suma de estas áreas $S = S_1+S_2+S_3+S_4+\ldots+S_n$, utilizando rectángulos por extremos derechos donde el valor obtenido fue de $29.500\ u^2$.

Tabla 3. Valores por el extremo derecho

n	x(der)	f(x)	Δ(x)	S	Δ(x)f(x)
1	0.5	1.25	0.5	S_1	0.625
2	1.0	2.00	0.5	S_2	1.000
3	1.5	3.25	0.5	S_3	1.625
4	2.0	5.00	0.5	S_4	2.500
5	2.5	7.25	0.5	S_5	3.625
6	3.0	10.00	0.5	S_6	5.000
7	3.5	13.25	0.5	S_7	6.625
8	4.0	17.00	0.5	S_8	8.500
Sumatoria del Área total ∑					29.500 u^2

Con lo anterior se logró encontrar que el área que se está buscando la cual está entre el valor 21.500 y el valor 29.500, pudiendo afirmar y garantizar que no puede ser ni menor que 21.500 ni mayor a 29.500 esto cuando se dividió en ocho intervalos.
Dónde se tiene al generalizar:
$n =$ es el número de intervalos en los que se divide a la región.
$x(izq\ o\ der) =$ evaluar sobre el extremo izquierdo o derecho de cada intervalo.
$\Delta x =$ La base de cada rectángulo.

3. Resultados y análisis

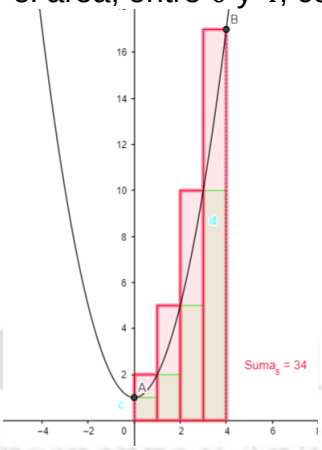
Para tener una mejor estimación y lograr el área es necesario incrementar el número de intervalos como se ilustra en la Tabla 4 donde se presenta para un valor $n = 40$ aproximándose cada vez más al valor resultante de la integral de la Ecuación 1. Integral $F(x)$.

Tabla 4. Región acotada por los intervalos extremos inferior y superior

18.000	<	A	<	34.000	n=4
21.500	<	A	<	29.500	n=8
23.380	<	A	<	27.370	n=16
24.540	<	A	<	26.140	n=40

ISSN 2448 – 7945

Como se observa, se ha mejorado la aproximación con sólo calcular un mayor número de intervalos, es decir, a medida que n va siendo cada vez grande, las aproximaciones de las áreas de las partes y en consecuencia el área de toda la región va siendo más precisa. Se trata de obtener el área sin recurrir al cálculo de primitivas, cuyo resultado hemos adelantado. Como ejemplo recurriremos a la función $F(x) = x^2 + 1$. En el ejemplo como se ilustra en las Figura 2. Área por exceso y Figura 3. Área por defecto, podemos calcular el área, entre 0 y 4, con los conocimientos de geometría elemental:



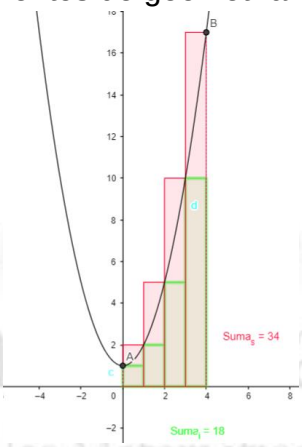


Figura 2. Área por exceso (superior). **Figura 3. Área por defecto (inferior).**

Para la función $x^2 + 1$ procedemos a la construcción de rectángulos y el cálculo de sus áreas que se conocen como Suma Superior (Upper) y Suma Inferior (Lower). Para calcular el resultado de la integral $x^2 + 1$ en el intervalo $[0,4]$, seguimos el mismo procedimiento que antes. La integral definida de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ es igual a la diferencia entre la antiderivada de $f(x)$ evaluada en b y en a. Primero, encontramos la antiderivada de $x^2 + 1$. La antiderivada de x^2 es $\frac{1}{3}x^3$ y la antiderivada de 1 es x. Por lo tanto, la antiderivada de $x^2 + 1$ es $\frac{1}{3}x^3 + x$.
Luego, evaluamos esta antiderivada en los límites del intervalo $(0, 4)$:

$$\int_0^4 (x^2 + 1)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^4 = \left[\frac{1}{3}(4^3 + 4)\right] - \left[\frac{1}{3}(0^3 + 0)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{3}(64) + 4\right] - [0 + 0] = \left[\frac{64}{3} + 4\right] - [0] = \left[\frac{64}{3} + 4\right] = \left[\frac{64}{3} + \frac{12}{3}\right] = \left[\frac{76}{3}\right]$$

Entonces, el resultado de la integral es $\left[\frac{76}{3}\right]$.

Ecuación 1. Integral $F(x)$ $\int_0^4 (x^2 + 1)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^4 = \left[\frac{64}{3} + \frac{12}{3}\right] = \left[\frac{76}{3}\right] \approx 25.33333$

Estas reflexiones son fundamentales, tomando en cuenta el papel que juegan las definiciones y las representaciones mentales en la comprensión y construcción de los

ISSN 2448 – 7945

conceptos matemáticos. Con relación a las definiciones éstas representan, más que cualquier otro aspecto, el conflicto entre la propia estructura de la Matemática y los procesos cognitivos necesarios para la adquisición de un concepto matemático (Vinner, 1991).

Con el uso de Geogebra se puede simplificar y obtener valores muy próximos al valor que se obtiene de forma analítica resolviendo la integral, como se ilustra en la Figura 4, donde el valor $25.01 < A < 25.65$ con $n = 100$ subintervalos. Pero lo más interesante es pensar que el valor exacto del área de la región es el número al que tienden las aproximaciones cuando n tiende a infinito.

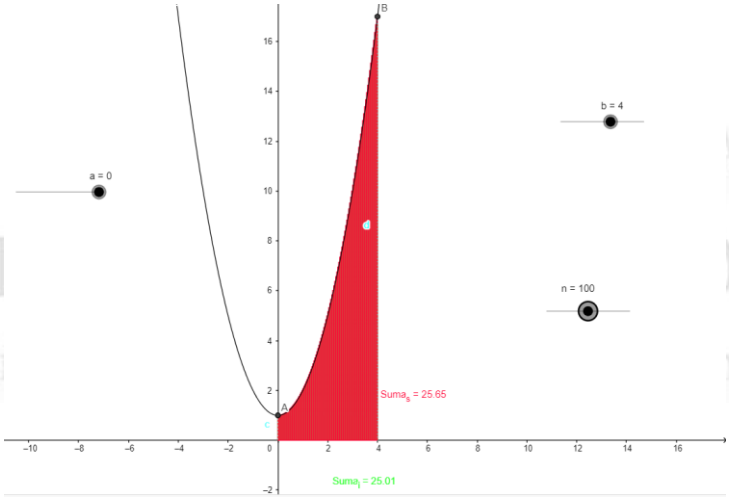


Figura 4. Función $f(x) = x^2 + 1$, con $n = 100$.

En las representaciones gráficas anteriores es posible determinar que:

1. Se puede obtener cada una de las áreas de cada intervalo de forma gráfica.
2. Cuando los subintervalos son pequeños, n es grande y se tiene una mejor precisión lográndose visualizar de forma dinámica.
3. Comprender y apropiarse del concepto cuando se dice que un número n tiende a infinito.

4. Conclusiones

La inclusión de software matemático en la creación de contenidos educativos en el salón podría motivar a los estudiantes a reflexionar y promover un aprendizaje significativo. El valor que se busca es la suma de los valores de los rectángulos superiores e inferiores. Cuando $n \geq 2$, el desarrollo algebraico se vuelve más complicado para las expresiones de la forma x^n, ya que es necesario conocer el valor de las sumas de las terceras, cuartetas o $m - ésima$ potencias de los primeros n naturales. Esta forma de interactuar puede cambiar la forma en que los estudiantes ven las matemáticas; motivar y promover la enseñanza dinámica como una actividad recreativa y un medio para el desarrollo de habilidades; y valorar una forma diferente de evaluación. Los recursos esenciales el software como herramienta para el cálculo de datos finos que permiten

ISSN 2448 – 7945

una actitud y conocimiento por parte del docente como el estudiante, puede darse interrogantes, conjeturas: donde existe la apertura de los problemas, para llegar a la reflexión y análisis.

5. Índice de referencias

- Bastida Izaguirre, D. B. (2019). Adaptación del modelo 5E con el uso de herramientas digitales para la educación: propuesta para el docente de ciencias. *Revista Científica, 34*(1), 73-80. https://doi.org/10.14483/23448350.13520.
- Cen, C. (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato.* Tesis de Maestría no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.
- De Oteyza, E. (2006). *Conocimientos fundamentales para la enseñanza media superior.* México: Pearson educación.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hill (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp.173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 24, 139-162.
- Flores, R. (2005). *El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto.* Tesis de Maestría no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.
- Keisler, J. H. (2000). *Elementary calculus: An infinitesimal approach*. Recuperado de http://www.infinitesimals.com.
- Kleiner, I. (2003). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics*. 48 (2-3), 137 – 174.
- Leithold, L. (1987). *El cálculo con geometría analítica*. México: Editorial Harla.
- Smith R. T. y Minton R. B. (2003). *Cálculo diferencial e integral*. México: Mc Graw-Hill Interamericana.
- Suárez T. L. y Cordero O. F. (2009). *Modelación – Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio Socioepistemológico.* CFIE, CINVESTAV – IPN.
- Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología.* Tesis de Maestría no publicada del Programa de Maestría del CICATA-IPN.
- Vinner, S. (1991). The Rol of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D.Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 6-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

ISSN 2448 – 7945

USO DE LAS MATEMÁTICAS EN EL DISEÑO Y DESARROLLO DE LAS APLICACIONES WEB

Rosas Fonseca Rosalba Nancy[1*] Esquivel Gómez Erika Gabriela[2], Flores Pérez Judith Mayte[3], Pineda Becerril Miguel de Nazareth[4,], García León Omar[5,],
[1,2,3,4,5]*Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán C4*
Av. Teoloyucan San Sebastian Xhala 54840, Cuautitlán Izcalli Estado de México.

ID-POSM090

Resumen

Las matemáticas juegan un papel fundamental en el diseño web y su historia se remonta a los inicios de los años 90,en donde Tim Berners-Lee da inicio al diseño y desarrollo web creando el protocolo HTTP para implementar el lenguaje de marcado HTML, que a través del tiempo ha ido evolucionando significativamente; el objetivo de este trabajo es demostrar que las matemáticas son fundamentales en el diseño y desarrollo de aplicaciones web, se trabajó con la metodología centrada en el usuario (User-Centered Design, UCD), ya que desempeña un papel crucial para garantizar que las necesidades y expectativas de los usuarios finales sean el foco principal en todas las etapas del proceso. En la fase uno, las matemáticas pueden utilizarse en técnicas cualitativas y cuantitativas, como encuestas, entrevistas e identificación de patrones, en la etapa de diseño de interfaces y prototipos se puede trabajar con las proporciones y algoritmos interactivos, en la evaluación de pruebas se puede calificar la eficacia y eficiencia a través de métricas cuantitativas y en la última etapa de iteración y mejora continua, pueden utilizarse para analizar los datos recopilados en el diseño y desarrollo, al llevar a cabo este proceso se puede entender que las matemáticas están presentes todo el tiempo.

Palabras clave: *Matemáticas, diseño, desarrollo, web, usuario, metodología*

1. Introducción

En la actualidad, la mayoría de los dispositivos y sistemas de cómputo utilizan una interfaz gráfica de usuario para viabilizar la interacción entre el usuario y la computadora. En la creación de las Interfaces gráficas de usuario intervienen diversos factores de las matemáticas que nos ayudan a lograr que las interfaces sean utilizadas y generen una experiencia de usuario positiva, debido a que son una parte integral del diseño y desarrollo web, las utilizamos desde la disposición de los elementos, el diseño responsive hasta la seguridad, la optimización de rendimiento y la visualización de datos.

De hecho, si un sistema tiene un mal diseño en la interfaz gráfica genera una mala experiencia en el usuario, por tal motivo es indispensable evaluar todas las

[1*] *Autor para la correspondencia. E-mail: nancy_fonseca1@hotmail.com tel. 5559976844.*

ISSN 2448 – 7945

funcionalidades requeridas, utilizando formatos de check list, diagramas de flujo, de navegaabilidad o UML y en cada uno de estos procesos estan presentes las matemáticas.

2. Metodología o desarrollo.

Se llevó a cabo una revisión sistemática del tema de estudio llevando a cabo el siguiente esquema.

Planteamiento de objetivos.

En esta fase, se definen los propósitos que se desean alcanzar, estableciendo criterios específicos del uso y aplicación de las matemáticas en el diseño y desarrollo web.

Criterios de inclusión.

Artículos o documentos de investigación que incluyan:

La importancia de las matemáticas en el diseño y desarrollo web.
¿Qué es y cómo funciona la metodología centrada en el usuario (UCD) para el diseño web?

Búsqueda de estudios.

Se utilizaron los siguientes buscadores: ScienceDirect y Google Scholar.

Análisis e interpretación de datos.

Se realizó un análisis de los documentos seleccionados y se extrajeron los datos necesarios.

Interpretación y conclusión.

Interpretación de los datos su aplicación y las conclusiones.

2.1 Importancia de las matemáticas en el diseño y desarrollo web.

Hoy en día se considera indispensable tener un entendimiento sólido de conceptos matemáticos para crear sitios web efectivos, atractivos y funcionales. El uso de conceptos geométricos como líneas, formas, ángulos y proporciones nos ayudan a crear diseños visualmente atractivos y equilibrados. El mejor ejemplo es el diseño responsive, que implica la adaptación de la interfaz de usuario a diferentes dispositivos y tamaños de pantalla, esto se logra a través del uso de fórmulas y cálculos, además el

ISSN 2448 – 7945

uso de ecuaciones y funciones nos ayuda a controlar los movimientos, la velocidad y la interacción de diferentes elementos animados logrando efectos visuales impresionantes, además existen algoritmos de compresión de imágenes y videos que utilizan técnicas para reducir el tamaño de los archivos sin perder calidad, lo que ayuda a mejorar los tiempos de carga y la velocidad de la página.

Las matemáticas juegan un papel crucial en la seguridad de los sitios web. Los algoritmos criptográficos, como RSA y AES, se basan en principios matemáticos para cifrar y proteger la información transmitida a través de Internet, garantizando la confidencialidad, disponibilidad y la integridad de los datos.

En el desarrollo web orientado a la analítica y la visualización de datos, las matemáticas son esenciales para procesar y presentar información de manera efectiva. El uso de estadísticas, gráficos y modelos matemáticos ayuda a interpretar y comunicar patrones y tendencias en los datos.

2.1.1 Aplicación de las matemáticas en el diseño web a través de la metodología centrada en el usuario (UCD).

Rubin & Chisnell (2011) mencionan que el UCD se basa en 3 principios básicos (a) un enfoque temprano en los usuarios y las tareas, donde se recopile información estructurada y sistemática con el apoyo de expertos en el área (psicólogos, psiquiatras, diseñadores, etc.); (b) medición empírica y evaluación del uso del producto con usuarios reales, a través de prototipos, cuyo objetivo debe ser medir la facilidad de aprendizaje y uso; y (c) el diseño iterativo, donde el producto es modificado y probado repetidamente y a partir de las pruebas con prototipos de los modelos conceptuales e ideas de diseño que realice una completa revisión y replanteamiento del diseño del producto.

Cuando utilizamos la metodología centrada en el usuario (UCD) debemos comenzar con un **análisis** para saber quiénes serán los usuarios finales de la interfaz e identificar sus necesidades, objetivos y contextos de uso. Para esto se recomienda utilizar técnicas cualitativas y cuantitativas a través de entrevistas, encuestas y observaciones para recopilar información sobre los usuarios y sus tareas.

Una vez realizada la investigación de los usuarios, definimos claramente los objetivos para que la interfaz satisfaga las necesidades de los usuarios. Esto incluye formulas, cálculos y funciones específicas, características de accesibilidad, entre otros aspectos.

Una ventaja relevante de las interfaces gráficas de usuario es que hacen el funcionamiento de un dispositivo más intuitivo, y por lo tanto más fácil de aprender y utilizar. (Kolhe et al., 2012).

En la actualidad existen herramientas de diseño que nos ayudan a crear prototipos y wireframes de la interfaz gráfica es aquí donde se trabaja con las proporciones y

ISSN 2448 – 7945

algoritmos interactivos. Estos prototipos son versiones preliminares de la interfaz que permiten visualizar la estructura y el diseño general, sin preocuparse por los detalles de la implementación.

En la etapa de **diseño** de una aplicación son indispensables las pruebas de usabilidad con usuarios representativos que nos permiten evaluar la efectividad y la facilidad de uso de la interfaz. Se recomienda observar cómo interactúan los usuarios con el prototipo, recopilar datos, generar estadísticas, diseñar gráficos que nos ayuden a interpretar los resultados.

Basándonos en los resultados de las pruebas de usabilidad, debemos iterar sobre el diseño de la interfaz, realizando ajustes y refinamientos según sea necesario. Continuamos haciendo una **evaluación** hasta que la interfaz satisfaga de manera efectiva las necesidades y expectativas de los usuarios.

Una vez que el diseño de la interfaz ha sido finalizado y validado a través de pruebas de usabilidad, procedemos con el **desarrollo e implementación** de la interfaz gráfica y medidas de seguridad a través de algoritmos criptográficos que son necesarios para el resguardo de los datos en el desarrollo de software y nos garantizan la calidad y la eficacia del producto final.

Después del lanzamiento de la interfaz, continuamos con la etapa de **despliegue** y recopilamos comentarios de los usuarios. Realizamos ajustes y mejoras según sea necesario para garantizar que la interfaz siga siendo efectiva y satisfactoria para los usuarios a lo largo del tiempo.

3. Resultados y análisis.

El Diseño Centrado en el Usuario (UCD) se centra en las necesidades, habilidades y preferencias de los usuarios finales en todas las etapas del proceso de diseño. Las matemáticas desempeñan un papel importante en varios aspectos:

1. Se utilizan en la recopilación y análisis de datos durante la investigación de usuarios. Esto puede incluir técnicas cuantitativas, como encuestas y análisis estadístico, como se muestra en la figura 1, para comprender las características demográficas, las preferencias y los comportamientos de los usuarios.

ISSN 2448 – 7945

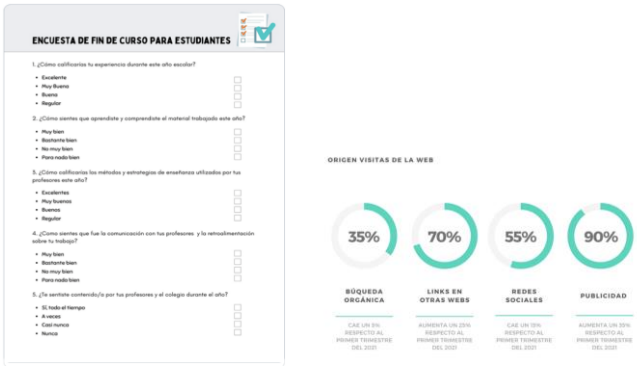


Figura 1. Encuestas y estadísticas

2. Son indispensables en el modelado y prototipado de soluciones de diseño. Esto puede incluir la creación de modelos matemáticos para representar sistemas complejos, así como el uso de herramientas de diseño asistido por computadora que utilizan principios matemáticos para crear prototipos digitales de interfaces de usuario y calcular las dimensiones (figura 2).



Figura 2. Interfaces de usuario

3. Ayudan a analizar los datos de uso y retroalimentación de los usuarios. Esto puede incluir el análisis de métricas de rendimiento (figura 3), como tiempos de tarea y tasas de error, utilizando métodos estadísticos para identificar áreas de mejora en el diseño.



Figura 3. Métricas de rendimiento e identificación de mejoras.

ISSN 2448 – 7945

4. Se utilizan para optimizar la experiencia del usuario a través de técnicas como la optimización de la interfaz de usuario y la personalización del contenido. Esto puede incluir el uso de algoritmos de encriptación (figura 4), recomendación y aprendizaje automático para proporcionar contenido relevante y personalizado a los usuarios.

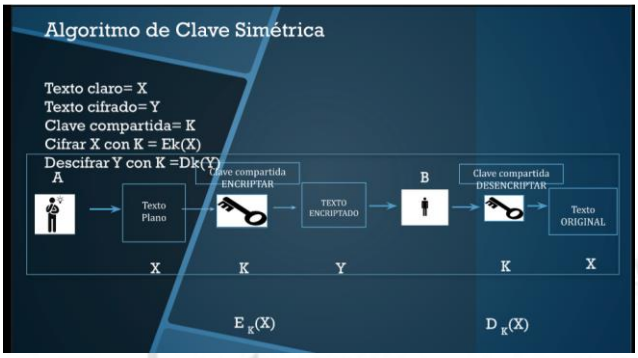


Figura 4. Algoritmo de encriptación

5. Se implementan en el diseño de interfaces accesibles e inclusivas. Esto puede incluir el uso de técnicas matemáticas para mejorar la legibilidad y la navegabilidad de la interfaz (figura 5), así como para garantizar que el diseño cumpla con estándares de accesibilidad como WCAG (Web Content Accessibility Guidelines).



Figura 5. Navegabilidad de la interfaz

Se puede observar que las matemáticas están presentes en diversas áreas del diseño y desarrollo web, por ejemplo, en el análisis de encuestas, donde se utilizan estadísticas y gráficas para proporcionar antecedentes de los datos utilizados por el cliente. En el diseño de páginas web, las dimensiones de los contenedores se gestionan mediante medidas de alto y ancho, reflejadas en el maquetado. Además, cuando hablamos de instrucciones definidas y ordenadas para resolver problemas, nos referimos a los algoritmos, en la figura 4 se muestra el uso de funciones matemáticas utilizadas para el cifrado y descifrado. En términos de legibilidad y navegabilidad, es esencial comprender la secuencia de las interfaces y generar un mapa de navegabilidad que muestre cómo se lleva a cabo el proceso y en el uso de bases de datos, administramos y

ISSN 2448 – 7945

analizamos todo el tiempo la información por tal motivo las matemáticas están presentes en todo momento.

4. Conclusiones

En conclusión, las matemáticas son una parte integral del diseño UCD, desde la investigación inicial de usuarios hasta la evaluación y optimización continua de la experiencia del usuario. Un entendimiento sólido de conceptos matemáticos y su aplicación en el diseño es esencial para crear productos y servicios centrados en las necesidades y expectativas de los usuarios finales.

Agradecimientos.

Agradecimientos por la elaboración de este trabajo al proyecto PAPIME PE 101623.

5. Referencias

Rubin, J., Chisnell, D., & Spool, J. (2011). *Handbook of Usability Testing: How to Plan, Design, and Conduct Effective Tests*. Wiley. https://books.google.com.mx/books?id=l_e1MmVzMb0C

Kolhe, P. R., Khetri, G. P., & Deshmukh, N. K. (2012). Study of standard assumptions of graphical user interface (GUI) based on usability, adaptability and security factors. *International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering*, *2*(12), 1-7.

ISSN 2448 – 7945

EL PROCTORING UNA TECNOLOGÍA QUE UTILIZA INTELIGENCIA ARTIFICIAL

Rosas Fonseca Rosalba Nancy[1, *] Aguilar Márquez Armando[2] , Vázquez Salazar María Guadalupe[3], Pineda Becerril Miguel de Nazareth[4], García León Omar[5]
[1,2,3,4,5]*Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán C4*
Av. Teoloyucan San Sebastian Xhala 54840, Cuautitlán Izcalli Estado de México.

AP-POSM091

Resumen

En la actualidad las evaluaciones a distancia forman parte fundamental en la educación, ya que hoy en día es necesario monitorear a los estudiantes mientras realizan un examen en línea, así como evaluar las habilidades y conocimientos adquiridos mediante el desarrollo de un curso, El proctoring es una tecnología que está ganando terreno en diversos ámbitos de la vida cotidiana, especialmente en aquellos donde se requiere una evaluación a distancia confiable y segura, en donde los actores puedan ser guiados, orientados y retroalimentados durante todo el proceso, evitando así que se sientan solos y estimulando el proceso enseñanza-aprendizaje. Una de las características de este software es que detecta los movimientos de la cabeza del participante evaluando la posición de los ángulos de la misma y dependiendo la configuración envía alertas en forma de mensaje o mediante voz, con la finalidad de mantener la credibilidad, la calidad y evitar la suplantación de identidad de los participantes, pero también puede ocasionar preocupaciones sobre la privacidad y la equidad, ya que algunos sistemas pueden ser intrusivos o sesgados, por tal motivo se debe tener precaución en su implementación.

Palabras clave: *Inteligencia artificial, evaluación, reconocimiento, tecnología, algoritmo, supervisión.*

1. Introducción.

En la última década la enseñanza virtual ha avanzado a pasos agigantados, los cambios educativos se han centrado en el proceso enseñanza-aprendizaje y han evolucionado, sin embargo el proceso de evaluación ha avanzado lentamente. Ahora nos encontramos con una evaluación a distancia en la que los procesos formativos se realizan en lugares remotos, diferentes ciudades, países e incluso continentes.

El proctoring es una tecnología que ha venido a apoyar el proceso de evaluación a distancia y presencial, utiliza inteligencia artificial para supervisar y monitorear a los estudiantes durante los exámenes ya sea en entornos presenciales o en línea. Utiliza cámaras web, micrófonos y otros sensores para detectar comportamientos sospechosos, como mirar fuera de la pantalla, movimientos inusuales o intentos de hacer trampa, analiza los datos recopilados por sensores y detecta patrones que puedan indicar actividades fraudulentas. Se apoya de algoritmos de reconocimiento facial para verificar la identidad del estudiante, análisis de movimiento para detectar actividades sospechosas y algoritmos de detección de plagio para comparar las respuestas de los estudiantes con otras fuentes en línea.

[1] * Autor para la correspondencia. E-mail: nancy_fonseca1@hotmail.com

ISSN 2448 – 7945

Si bien el proctoring basado en inteligencia artificial puede ser útil para garantizar la integridad de los exámenes en entornos en línea, Es importante implementar estas tecnologías con precaución y considerar cuidadosamente sus implicaciones éticas y prácticas.

2. Metodología o desarrollo.

Se llevó a cabo una revisión sistemática del tema de estudio llevando a cabo el siguiente esquema.

Planteamiento de objetivos.
En esta fase, se definen los propósitos que se desean alcanzar, estableciendo criterios específicos del uso y aplicación de la tecnología de proctoring, así como sus ventajas y desventajas.

Criterios de inclusión.
Artículos o documentos de investigación que incluyan:
¿Qué es y cómo funciona la tecnología proctoring?
Muestren las ventajas y desventajas de la tecnología proctoring.
Generen un algoritmo o modelo de Inteligencia artificial para el modelo proctoring.

Búsqueda de estudios.
Se utilizaron los siguientes buscadores: ScienceDirect y Google Scholar.

Análisis e interpretación de datos.
Se realizó un análisis de los documentos seleccionados y se extrajeron los datos necesarios.

Interpretación y conclusión.
Interpretación de los datos su aplicación, ventajas y desventajas y las conclusiones

2.1 ¿Qué es el proctoring?

El término proctoring proviene de la palabra “Proctor” que significa vigilar, supervisar o monitorizar. Si lo unimos a la realización de pruebas de evaluación, hablamos de una metodología para hacer exámenes en los que la vigilancia se realiza de forma remota. Por tal motivo el uso de la tecnología debe ser claro para evitar cualquier inconveniente por eso se recomienda llevar a cabo los siguientes pasos:

1. Antes del examen se deben establecer las condiciones y reglas que los estudiantes deben seguir durante la prueba. Esto puede incluir requisitos técnicos, como el uso de una cámara web y un micrófono, así como la prohibición de dispositivos adicionales, como teléfonos móviles, por lo que el educando debe estar de acuerdo en el proceso y firmar un documento para uso y resguardo de sus datos.
2. Al inicio del examen el estudiante comienza a responder, mientras el sistema de proctoring se activa y empieza a monitorear su actividad. Esto puede incluir el registro de la pantalla del ordenador, la grabación de audio y vídeo a través de la cámara web y el análisis en tiempo real de la actividad.
3. Si en el examen se detecta algún comportamiento sospechoso, el sistema puede generar una alerta para el asesor del examen. El asesor puede revisar

ISSN 2448 – 7945

la situación y tomar las medidas necesarias, como advertir al estudiante o interrumpir el examen.

2.2 ¿Cómo funciona la tecnología proctoring?

Una vez realizado el análisis podemos decir que funciona utilizando un algoritmo de detección de movimiento en un software de proctoring de esta forma lleva a cabo un seguimiento ocular para monitorear el comportamiento del estudiante durante un examen en línea y detectar posibles signos de trampa o movimientos sospechosos funcionando de la siguiente manera:

1. **Captura de video**: El software captura continuamente imágenes de la cámara web del estudiante durante todo el examen.
2. **Detección de movimiento**: El algoritmo analiza las imágenes capturadas para detectar movimiento. Utiliza técnicas de procesamiento de imágenes para comparar los fotogramas sucesivos y determinar si hay cambios significativos en la posición del estudiante o en el entorno.
3. **Seguimiento ocular**: Además de detectar movimiento general, el algoritmo también realiza un seguimiento del movimiento de los ojos del estudiante. Utiliza técnicas de visión por computadora para identificar la posición de los ojos en cada imagen y determinar hacia dónde mira el estudiante.
4. **Análisis de comportamiento**: El algoritmo analiza el movimiento general del estudiante, así como el movimiento específico de los ojos, para identificar comportamientos sospechosos. Por ejemplo, puede detectar si el estudiante mira hacia abajo fuera de la pantalla con frecuencia, lo que podría indicar que está consultando material no permitido.
5. **Generación de alertas**: Cuando se detecta un comportamiento sospechoso, el algoritmo genera una alerta para que el proctor humano intervenga y tome las medidas necesarias, como revisar la grabación de video o comunicarse directamente con el estudiante.

4. Resultados y análisis

El proctoring está siendo utilizado en muchas plataformas, podemos mencionar los MOOC (Massive Open Online Courses), que están conformándose como una herramienta muy eficaz para adquirir conocimientos de forma remota. Una de las principales plataformas es edX, utiliza esta metodología desde junio de 2017.
Existen otras herramientas informáticas que permiten visualizar la pantalla del ordenador donde el estudiante puede realizar la prueba, también, hay navegadores de internet especiales para el Proctoring que impiden que se salga de la pantalla del examen y no permite consultar otra aplicación o programa. Además, hay sistemas como Remote Proctor NOW (RPNOW), eProctoring o ProctorExams que controlan el ordenador en el que el alumno realiza la prueba.
La tecnología proctoring está en contínua evolución. Respecto a futuras líneas de trabajo, hoy se evalúa y utiliza el ‘monitoreo 360’, el cual “no solo debe garantizar la

ISSN 2448 – 7945

identidad del examinado, sino también la integridad general de la prueba". (Turani et al., 2020).

3.1 Ventajas.

Las ventajas son claras, ya que facilitan la realización del examen en los equipos de cómputo y el lugar de trabajo del estudiante.
Para las nuevas formas de enseñanza este método facilita enormemente la actividad al poder realizar los exámenes prácticamente de forma global.

3.2 Desventajas.

Las desventajas que se pueden mencionar son las siguientes:
No siempre el examen está bien preparado para realizarse bajo la modalidad de Proctoring, ni los vigilantes o los examinadores saben siempre cómo actuar, sobre todo cuando se presentan problemas de reacción del estudiante o de problemas en la comunicación.
(Adkins, et al., 2005) mencionan que una desventaja del uso del proctoring es la protección de datos.
Haciendo un análisis se puede determinar que el desconocimiento del entorno donde se realizará el examen puede causar mayor estrés en el estudiante. Por lo general, las condiciones o ubicaciones desconocidas de los centros de exámenes de supervisión pueden inducir a los estudiantes a experimentar una mayor e influir negativamente en su desempeño.

4. Conclusiones.

En el desarrollo de este artículo he podido confirmar que la implementación de las aplicaciones de proctoring ayudan a prevenir el plagio y a mantener el uso de las mejores prácticas entre los estudiantes al momento de hacer evaluaciones en línea.
Algo que podemos resaltar de la tecnología proctoring es que utiliza una combinación de tecnologías, como cámaras web, micrófonos y algoritmos de inteligencia artificial, para monitorear y supervisar la actividad de los estudiantes durante los exámenes, con el fin de garantizar la integridad del proceso de evaluación y constantemente se están desarrollando modelos matemáticos y algoritmos para mejorar el diseño de los exámenes y el proceso de vigilancia, (Al-yakoob et al., 2010) mencionan que las evaluaciones a distancia de contenidos teórico-prácticos: son aquellas que pueden llegar a asemejarse más a una situación de examen presencial, por lo que es importante tener en cuenta alternativas para plataformas educativas como Moodle, que no está diseñada para un uso masivo simultáneo, o las dificultades particulares de estudiantes y profesores. Pero en caso de ser necesario un nivel de identificación medio o alto, se pueden utilizar otras herramientas como lo son las videollamadas siendo recomendable limitar el tiempo y contemplarlo únicamente en grupos de menos de cuarenta estudiantes, sabemos que existen riesgos en toda evaluación, incluidas las pruebas online, se encuentra en las prácticas fraudulentas como la copia de

ISSN 2448 – 7945

respuestas de examen o los plagios. Pero la flexibilidad y la privacidad y resguardo de los datos deben estar presentes en todo momento, aunque nos enfrentemos a situaciones muy estresantes, se deben buscar estrategias que nos ayuden en este proceso.

Agradecimientos.

Agradecimientos por la elaboración de este trabajo al proyecto PAPIME PE 101623.

5. Índice de referencias

Revistas

- Adkins, J., Kenkel, C., Lim, C. (2005). Deterrents to online academic dishonesty. *The Journal of Learning in higher Education*, 1(1), 17-22.
- Al-yakoob, S., Sherali, H. D., & Al-jazzaf, M. (2010). A mixed-integer mathematical modeling approach to exam timetabling. *Computational Management Science*, 7(1), 19-46.
- Turani, A., Alkhateeb, J. & Alsewari, A. (2020) Students Online Exam Proctoring: A Case Study Using 360 Degree Security Cameras. *Emerging Technology in Computing, Communication and Electronics (ETCCE) 6(3),1-6.*

ISSN 2448 – 7945

PROTOCOLO DE ENRUTAMIENTO INTERIOR OSPF CON EL ALGORITMO DE DIJKSTRA

López Salazar Leonel Gualberto [1, *], Rico Castro José Juan [2], Rigaud Téllez Nelly [3], García León Omar [4] y Pérez Hernández Guillermo [5]
[1, 2,4 y 5] *Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. Av. Cuautitlán Teoloyucan s/n. km 2.5, San Sebastián Xhala, 54714 Cuautitlán Méx.*
[3]*Facultad de Estudios Superiores Aragón UNAM. Av. Hacienda de Rancho Seco s/n, impulsora Popular Avícola, 57130 Nezahualcóyotl, Méx.*

AP-POSM094

Resumen

Un grafo es una estructura que consiste en un conjunto de nodos o vértices y un conjunto de aristas. Las aristas representan conexiones o relaciones entre los nodos. Según las características que presente un grafo puede clasificarse de manera diferentes: grafo dirigido, no dirigido, cíclico y no ponderado. La topología de una red de computadoras puede representarse mediante un grafo y se establecen conexiones entre los diferentes router que la conforman. Los enlaces o conexiones entre los router representan las aristas y estas tienen diferentes métricas para determinar los caminos más apropiados para hacer llegar los paquetes de un nodo a otro. Los protocolos de comunicación son los encargados de realizar esta tarea como es el caso de OSPF o algoritmo Dijkstra. Mediante OSPF se construyen las tablas de enrutamiento para poder encaminar los paquetes por el enlace o arista apropiada.
El objetivo de este trabajo es mostrar el procedimiento que se implementa mediante el algoritmo de Dijkstra para calcular la ruta más corta para llegar de un nodo a otro en una red. Cada router mantiene una base de datos de enlaces y utiliza esta información para calcular la tabla de enrutamiento con las rutas más eficientes. El procedimiento puede realizarse mediante métricas utilizadas en OSPF como pueden ser el costo, que puede basarse en la velocidad del enlace o en otras consideraciones. En el contexto de OSPF, los router intercambian información sobre los enlaces a través de paquetes de estado de enlace (LSA, Link State Advertisement), y luego utilizan el algoritmo de Dijkstra para construir el árbol SPF y determinar las rutas más cortas. La conclusión es que este algoritmo permite que los router OSFP seleccionen las rutas eficientes para reenviar los paquetes en la red.

Palabras clave: *Red, protocolo, algoritmo, Dijkstra.*

1. Introducción

La teoría de grafos estudia las propiedades y las aplicaciones de los grafos. Un grafo es una pareja de conjuntos *G = (V, A)*, donde *V* es el conjunto de vértices (1, 2, 3, etc.) y *A* es el conjunto de aristas, este último es un conjunto de pares *(u, v)* de la forma tal que: $u, v \in V$ (Menéndez, 1998). Figura 1.

[1] *Autor para la correspondencia. E-mail: leonelguls@gmail.com*

ISSN 2448 – 7945

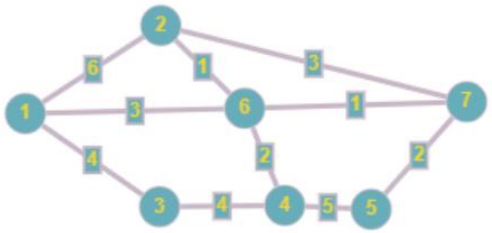


Figura 1. Grafo dirigido.

Los grafos además de poder modelar diferentes tipos de redes mediante vértices, aristas y pesos de cada una de las aristas, los grafos pueden modelarse mediante el uso de matrices para poder aplicar los conceptos relacionados, como el de la matriz de adyacencia. La matriz de adyacencia será llamada posteriormente matriz de distancia para recabar los datos relacionados con el grafo en cuestión. Definimos la matriz de adyacencia A de la siguiente manera (Fernández, 2005), ecuación 1:

Ecuación 1. $aij = \begin{cases} Número\ de\ aristas\ en\ i\ y\ j, si\ i \neq j \\ Dos\ veces\ el\ número\ de\ aristas\ en\ i \end{cases}$

La columna vertebral de la red de redes Internet está constituida por conjunto de encaminadores mejor conocidos como routers (vértices) que están interconectados entre sí mediante enlaces de comunicación (aristas) de muy diversas tecnologías, cada router puede tener instaladas y configuradas una o varias interfaces de red (puerto de red) para conectar los enlaces para su interconexión con otros dispositivos. Así un conjunto de routers interconectados puede modelarse mediante un grafo dirigido (Figura 2) y pueden aplicarse algoritmos para determinar los recorridos más eficientes entre los diferentes vértices.

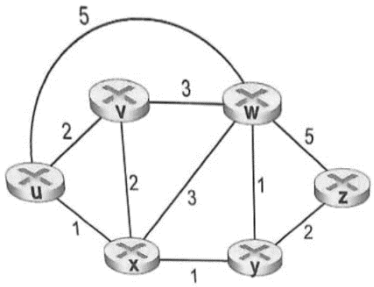


Figura 2. Modelo de grafo de una red de computadoras (Kurose y Ross, 2010).

La información se fragmenta en porciones pequeñas para poder circular en la red mediante una estructura de datos denominada paquete. De acuerdo con las necesidades y con los protocolos que intervienen en el proceso de comunicación el paquete deberá estructurarse de cierta manera. Entonces el proceso de comunicación

ISSN 2448 – 7945

en la red es reducido a un proceso de envío y recepción de paquetes de un origen a un destino con el apoyo de dispositivos intermediarios denominados dispositivos de interconexión, dentro de los que podemos mencionar en la capa 1 el hub, en la capa 2 el switch, en la capa 3 el router y en la capa 7 el firewall y otros más, esto según el modelo OSI.

Los dispositivos de interconexión proporcionan diferentes servicios de acuerdo con la capa que correspondan y son utilizados como apoyo en la entrega de paquetes cuando se utilizan tecnologías como Ethernet y WIFI entre otras variantes. Dentro de las funciones más representativas de estos dispositivos tenemos el reenvió, él encaminamiento y el enrutamiento. Los dispositivos capa 2 no están diseñados para realizar enrutamiento, pero si para realizar reenvió de paquetes.

El renvío se refiere al proceso que tiene que realizar un dispositivo de interconexión cuando recibe un paquete por una interfaz de origen y tiene que enviarlo por otra interfaz para que llegue a su destino. Los equipos capa 2 son considerados equipos de distribución en donde están conectados las computadoras y utilizan lo que se denomina tablas ARP para reenviar los paquetes entre diferentes equipos de cómputo. Los servicios del protocolo ARP y DARP son utilizados para construir estas tablas de control de interfaces en donde se guarda la información de cada equipo que esta conectado a la red.

De manera básica los puertos del router representan la frontera de una red TCP/IP a menos que estén agrupados mediante una *virtual local area network* VLAN. Cuando el reenvío de paquetes se realiza en la misma red no se requieren los servicios del router para reenviar los paquetes que circulan en la red, es decir, se utilizan servicios de capa 2 según el modelo OSI. Pero cuando los paquetes tienen que viajar a equipos fuera de la red son utilizados los servicios de la capa 3, reenvío, encaminamiento y enrutamiento.

Tanto el router como el switch realizan el reenvío de paquetes, pero lo realizan de manera diferente, el switch utiliza los datos de la cabecera capa 2 para hacer reenvío mientras que el router utiliza los datos de la cabecera capa 3 para realizar el reenvío de paquetes, la diferencia radica en que el switch reenvía paquetes entre equipos que están en una misma red mientras que el router reenvía paquetes a equipos que están en diferentes redes. Para poder decidir la interfaz apropiada por donde deben de reenviarse los paquetes en la capa 3 es necesario mantener la información de como llegar a las diferentes redes que están conectadas a las diferentes interfaces del router. Este trabajo lo realiza un protocolo de enrutamiento, en este caso es OSPF que utiliza el algoritmo SPF *Shortest Path First* comúnmente conocido como algoritmo de Dijkstra (Kurose y Ross, 2010, p. 375).

El objetivo de este trabajo mostrar cómo se calculan las rutas SPF mediante el algoritmo de Dijkstra en una red compuesta por vértices (routers) y aristas (enlaces), y mostrar el resultado en un modelo de red propuesto para ese ejemplo de aplicación.

ISSN 2448 – 7945

2. Metodología o desarrollo

Para resolver un grafo mediante el algoritmo de Dijkstra primero hay que modelarlo con un grafo a partir de la topología de red que presentan los router y después se deben de seguir los siguientes pasos (Taha, 2012).

Sea u_i *la* distancia más corta del router origen 1 al router i, y defina d_{ij} como la longitud del arco (*i*,*j*). El algoritmo define la etiqueta para un router *j* que sigue inmediatamente con las ecuaciones de Dijkstra (ecuaciones 2,3 y 4):

Ecuación 2. $[i\,, u_i] \;=\; [i\,, u_i \;+\; d_{ij}]\,, d_{ij}$ Ú 0

La etiqueta para el router de inicio es [-, 0], que indica que el router no tiene predecesor con distancia 0.
Las etiquetas de router en el algoritmo de Dijkstra son de dos tipos: *temporales* y *permanentes*. Una etiqueta temporal en un router se modifica si puede hallarse una ruta más corta al router. De lo contrario, el estado temporal cambia a permanente.

- **Paso 0.** Etiquete el router de origen (router 1) con la etiqueta *permanente [*-, 0]. Establezca *i* = 1.
- **Paso general *i*:**
- Calcule las etiquetas temporales:

  Ecuación 3. $[i\,, u_i \;+\; d_{ij}]\;\forall\; router\; j\; con\; d_{ij} > \;0$

  Siempre que j no esté etiquetado permanentemente.
- Si el router j ya tiene una etiqueta temporal existente [u_j, k] hasta otro router k y si:

  Ecuación 4. $[u_i \;+\; d_{ij}] \;< u_j\; reemplace\; [u_j,\; k]\; con\; [i, u_i \;+\; \;d_{ij}]$

- Si todos los routers tienen etiquetas permanentes deténgase. De lo contrario, seleccione la etiqueta [s, u_r] que tenga la distancia más corta entre todas las etiquetas temporales (rompa los empates arbitrariamente).
- Establezca i = r y repita el paso i.

Entonces tenemos la siguiente topología de red propuesta para resolver mediante el algoritmo SPF. Los valores de cada enlace serán propuestos en el modelo del grafo.

ISSN 2448 – 7945

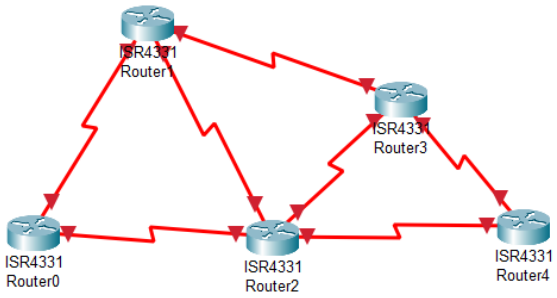


Figura 3. Topología de red propuesta.

Procedemos a modelar la topología propuesta mediante un grafo en la siguiente figura.

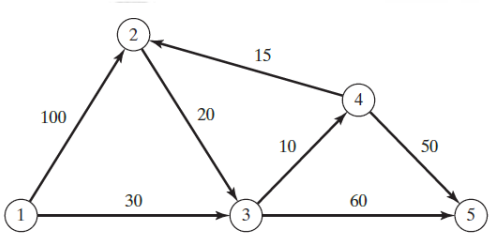
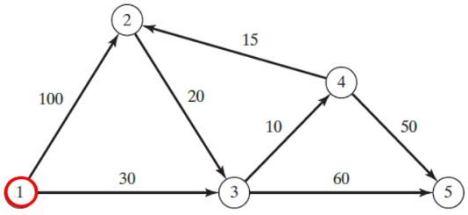


Figura 4. Grafo modelado relacionado con la topología de red.

Iniciamos el paso cero etiquetando el nodo 1 (router 0) con ningún nodo de antecesor - de la siguiente manera y añadimos la tabla para calcular la iteración 0:

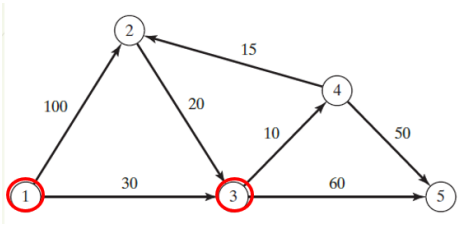


	Iteración 0	
Nodos	Ante	Dist
1	-	0
2		
3		
4		
5		

Figura 5. Iteración inicial.

Posteriormente pasamos al paso general en donde calculamos las etiquetas temporales como indica la ecuación 3, siempre que j no esté etiquetado permanentemente (las etiquetas permanentes son de color rojo). Nótese que la distancia menor la tenemos en el nodo 3 con nodo antecesor 1. Es la que etiquetamos.

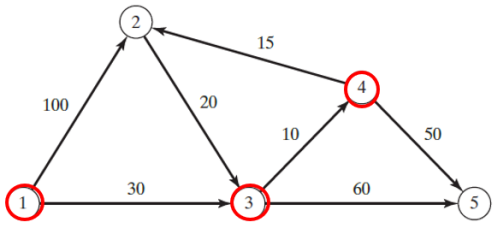
ISSN 2448 – 7945



	Iteración 0		Iteración 1	
Nodos	Ante	Dist	Ante	Dist
1	-	0	-	0
2			1	100
3			1	30
4			-	-
5			-	-

Figura 6. Primera Iteración.

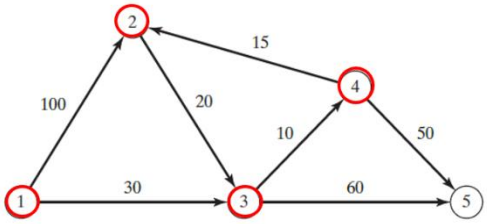
Nuevamente aplican el paso general calculando todas las distancias al siguiente nodo no etiquetado a partir del nodo 1. Hay que tener en cuenta que pudiera aparecer una trayectoria que pudiera mejorar una distancia, este es el mayor defecto del algoritmo que tendríamos que quitar una etiqueta permanente y convertirla en temporal. Para este ejemplo tenemos que el siguiente nodo es 4 con origen de 3.



	Iteración 0		Iteración 1		Iteración 2	
Nodos	Ante	Dist	Ante	Dist	Ante	Dist
1	-	0	-	0	-	0
2			1	100	1	100
3			1	30	1	30
4			-	-	3	40
5			-	-	3	90

Figura 7. Segunda iteración.

Para la iteración 3 aplicando el paso general tenemos que el nodo 2 el siguiente nodo que tiene el menor coste de los nodos no etiquetados y llegamos por el nodo 4.



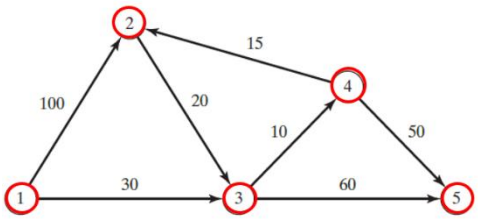
	Iteración 0		Iteración 1		Iteración 2		Iteración 3	
Nodos	Ante	Dist	Ante	Dist	Ante	Dist	Ante	Dist
1	-	0	-	0	-	0	-	0
2			1	100	1	100	4	55
3			1	30	1	30	1	30
4			-	-	3	40	3	40
5			-	-	3	90	3	90

Figura 8. Tercera Iteración.

3. Resultados y análisis

El resultado final se obtiene cuando todos los nodos estén etiquetados con una etiqueta permanente o en color rojo. Como en la siguiente figura.

ISSN 2448 – 7945



	Iteración 0		Iteración 1		Iteración 2		Iteración 3		Iteración 4	
Nodos	Ante	Dist	Ante	Dist	Ante	Dist	Ante	Dist	Ante	Dist
1	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0
2			1	100	1	100	4	55	4	55
3			1	30	1	30	1	30	1	30
4			-	-	3	40	3	40	3	40
5			-	-	3	90	3	90	3	90

Figura 9. Iteración final.

Al final tenemos la tabla de entradas con los costos asociados a cada destino partiendo del nodo 1. Entonces se lee de la siguiente manera. Para llegar al nodo 5 es por el nodo 3 con costo de 90, después para llegar al nodo 3 es por el nodo 1 con costo de 30, recuerde que los costos calculados son incrementales, es decir, se van sumando los costos que van apareciendo en la trayectoria que vamos siguiendo.

Entonces la tabla resultante es muy similar a una tabla de enrutamiento de un conjunto de router que necesitan conocer las trayectorias que deberían seguir los paquetes para llegar de un origen un destino, tomando como base las tablas de enrutamiento OSPF creadas mediante el protocolo llamado de la misma forma.

4. Conclusiones

El protocolo OSPF nos permite conocer las trayectorias que se deben de seguir para entregar paquetes de un router origen a un destino, la implicación directa es que este tipo de algoritmos nos permite interconectar redes de redes para el intercambio de información como se realiza en la Internet.

Dentro de las funciones de la capa 3 esta el enrutamiento, en donde el equipo activo tiene la responsabilidad de reenviar los paquetes que llegan por alguna de sus interfaces a la interfaz que permita hacer llegar el paquete a su destino de la mejor manera y para eso requiere conocer cómo realizar esta tarea. Este tipo de algoritmos implementado bajo la forma de un protocolo de comunicación es el responsable directo de proporcionar la información para realizar la tarea de reenvío de paquetes.

Existen algoritmos más eficientes que este como el de Floyd y pueden mantener tablas de encaminamiento más completas que la que deriva de este algoritmo, además de que existen otras métricas que pudieran determinar mejores trayectorias que superan a la métrica del coste.

Agradecimientos

Los primeros dos autores agradecen el apoyo para este trabajo proveniente del proyecto PAPIME PE 108322.

ISSN 2448 – 7945

5. Índice de referencias

- Fernández, E. (2005). Gráficas y matrices de adyacencia. *Actas del VIII congreso DR. Antonio A. R. Monteiro, (pp. 8,* 151-179).
- Menéndez, A. (1998). Una breve introducción a la teoría de grafos. *Revista Suma*, 28, 11-26.
- Kurose, J y Ross, K. (2010). *Redes de computadoras: Un enfoque descendente*. Pearson.
- Taha, H. (2012). *Investigación de operaciones*. Pearson educación.

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

MINIMIZACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VIABLES EN EL MÉTODO DE REGRESIÓN LINEAL USANDO MAPLE

Ramírez Montes Pedro Iván [1*], García León Omar [2], Hernández Castillo José Luz[3] y Aguilar Márquez Armando [4]
[1,2,3 y 4]*Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, Universidad Nacional Autónoma de México. Carr. Cuautitlán-Teoloyucan Km. 2.5, San Sebastian Xhala, 54714 Cuautitlán Izcalli, Edo. de Méx.*

EN-POSM096

Resumen

En este trabajo se desarrolla una propuesta de actividades que integra conocimientos de las asignaturas de cálculo, estadística y algebra haciendo uso del software matemático Maple. La secuencia comienza presentando el problema de la regresión lineal de un conjunto de puntos, considerando que el criterio de mejor ajuste es aquel que permite que la suma de los errores al cuadrado sea la mínima. La secuencia propone la construcción de una función de dos o tres variables que debe ser minimizada, el procedimiento requiere el computo de sus derivadas parciales y de la solución de un sistema de ecuaciones para encontrar los puntos críticos. El procedimiento se extiende después para el ajuste de un conjunto de puntos de una función cuadrática. Por último, se construye la gráfica de dispersión, la curva de ajuste y se calcula el coeficiente de determinación. Toda la secuencia de actividades se realiza empleando el software matemático Maple.

Palabras clave: *regresión, lineal, cálculo, Maple, mínimos, cuadrados.*

1. Introducción

La regresión lineal de un conjunto de datos es una operación que se encuentra automatizada en la mayoría de los programas de computadora estadísticos, su amplio uso es debido a que es un procedimiento útil, tanto para situaciones concretas, encontradas en la práctica profesional de las diversas ingenierías, como la calibración, así como para situaciones diversas en general, la relación no determinista, entre variables de un proceso (Walpole et al., 2012).

Para realizarla se eligen variables independientes (regresores) y una variable dependiente (respuesta), cuando se tiene una única variable independiente se denomina regresión simple. El método pretende determinar la mejor relación posible entre variables, evaluar la fortaleza de dicha relación, así como permitir predecir valores de respuesta. En este trabajo exploramos la relación lineal y la relación cuadrática entre dos variables.

[1] * *Autor para la correspondencia. E-mail: pedroivan_86@hotmail.com Tel. 55-56-23-19-04*

ISSN 2448 – 7945

2. Desarrollo

2.1 Modelo estadístico

Las Ecs. (1) - (2) muestran el modelo estadístico para la regresión lineal simple y la regresión cuadrática simple para la respuesta *Y* (variable aleatoria) y la variable no aleatoria independiente *x*.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon \quad \textbf{Ecuación 1.}$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \epsilon \quad \textbf{Ecuación 2.}$$

El modelo supone una distribución con esperanza matemática igual a cero para la variable aleatoria ϵ y una varianza constante denominada varianza residual o varianza del error (σ^2). Una estimación de los coeficientes para las ecuaciones de regresión puede obtenerse si se considera sustituir la variable aleatoria ϵ por un término de error que cuantifique la diferencia entre el valor observado (y_i) y el predicho por un modelo ($\hat{y}_{in}$) para cada uno de los valores, a este error se le denomina residual Ec. (3).

$$e_i = y_n - \hat{y}_n \quad \textbf{Ecuación 3.}$$

La respuesta que es tambien una variable aleatoria se sustituye por la estimación hecha por un modelo ($\hat{y}_n$) más el residual correspondiente obteniéndose las Ecs. (4) - (7) donde los parámetros son un estimado de los parámetros del modelo estadístico.

$$y_n = mx_n + b + e_n \quad \textbf{Ecuación 4.}$$

$$\hat{y}_n = mx_n + b \quad \textbf{Ecuación 5.}$$

$$y_n = a{x_n}^2 + bx_n + c + e_n \quad \textbf{Ecuación 6.}$$

$$\hat{y}_n = a{x_n}^2 + bx_n + c \quad \textbf{Ecuación 7.}$$

2.2 Mínimos cuadrados

En la mayoría de las aplicaciones se considera que residuales pequeños son indicativos de un ajuste adecuado del modelo, la sumatoria de residuales elevados al cuadrado se denomina suma de los cuadrados del error (*SCE*) respecto de la recta de regresión, considerando esta suma y al sustituir las Ecs. (5) y (7) en la Ec. (3) obtenemos respectivamente:

$$SCE = \sum_{n=1}^{k} (y_n - \hat{y}_i)^2 = \sum_{n=1}^{k} \left(y_n - (mx_n + b)\right)^2 \quad \textbf{Ecuación 8.}$$

ISSN 2448 – 7945

$$SCE = \sum_{n=1}^{k} \left(y_n - (ax_n{}^2 + bx_n + c)\right)^2 \qquad \textbf{Ecuación 9.}$$

las Ecs. (5) y (8) son funciones de dos y tres variables respectivamente que corresponden con las estimaciones para los parámetros del modelo, ya que es deseable que los residuales sean lo más pequeño posible el método consiste en encontrar un mínimo para dichas funciones.

2.2 Valores Extremos de la función *SCE*

Para el modelo lineal la función de dos variables *SCE* puede desarrollarse a partir de la Ec. (8) como:

$$SCE(m,b) = kb^2 + \sum_{n=1}^{k} m^2x_n^2 + 2bmx_n - 2mx_ny_n - 2by_n + y_n^2$$

Derivando parcialmente respecto a *b* y *m* obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial b}(SCE) = \frac{\partial}{\partial b}(kb^2) + \frac{\partial}{\partial b}\sum_{n=1}^{k}(m^2x_n^2 + 2bmx_n - 2mx_ny_n - 2by_n + y_n^2)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial b}(SCE) = 2kb + 2m\sum_{n=1}^{k} x_n - 2\sum_{n=1}^{k} y_n \,, \frac{\partial}{\partial b}(SCE) = 2m\sum_{n=1}^{k} x_n^2 + 2b\sum_{n=1}^{k} x_n - 2\sum_{n=1}^{k} x_ny_n$$

Igualando con cero y simplificando obtenemos las Ecs. (10) - (11) conocidas como ecuaciones normales, cuya resolución simultánea permite determinar la pendiente (*m*) y la ordenada a él origen (*b*) del modelo de regresión línea simple que minimizan la función *SCE* (Thomas, 2015).

$$kb + m\sum_{n=1}^{k} x_n - \sum_{n=1}^{k} y_n = 0 \qquad \textbf{Ecuación 10.}$$

$$m\sum_{n=1}^{k} x_n^2 + b\sum_{n=1}^{k} x_n - \sum_{n=1}^{k} x_ny_n \qquad \textbf{Ecuación 11.}$$

Cómo se mostrará en la sección 3, el uso del software matemático Maple permite omitir las fórmulas para *m* y *b* obtenidas a partir de las Ecs. (10) - (11), usando como ejemplo la regresión cuadrática simple ajustada por mínimos cuadrados. Considerando la resolución de sistema de ecuaciones podemos obtener una medida de la calidad del ajuste empleando una comparación entre el *SCE* y la llamada suma total de los cuadrados corregida *STCC*, la *STCC* representa la variación que el modelo es capaz de explicar para la variable de respuesta en cada punto. La fórmula para el coeficiente de determinación (R^2) se muestra en la Ec. (12).

ISSN 2448 – 7945

$$R^2 = 1 - \frac{SCE}{STCC} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^{k}(y_n - \hat{y}_i)^2}{\sum_{n=1}^{k}(y_n - \bar{y}_i)^2} \qquad \textbf{Ecuación 12.}$$

Cabe señara que la evaluación de un moldeo de regresión, empleando únicamente este coeficiente es altamente desaconsejado. Se sugiere a el lector interesado consultar un trabajo previo algunos de los autores de este trabajo donde se describe el uso de las TIC para el análisis de valores residuales en el análisis de varianza (García León, 2019).

3. Resultados y análisis

Usando Maple la Ec. (9) permite obtener la función de la diferencia de cuadrados que se desea minimizar, empleando las plantillas para cálculo se pueden determinar las expresiones de las derivadas parciales para cada uno de los parámetros del modelo.

Suma de los cuadrados del error para un modelo cuadrático y sus derivadas

$$SCE\_1 := \sum_{n=1}^{k} \left(y[n] - \left(a \cdot (x[n])^2 + b \cdot x[n] + c\right)\right)^2; A := \frac{\partial}{\partial a}(SCE\_1); B := \frac{\partial}{\partial b}(SCE\_1); C := \frac{\partial}{\partial c}(SCE\_1)$$

$$k\,c^2 + \sum_{n=1}^{k}\left(a^2 x_n^4 + 2\,a\,b\,x_n^3 + 2\,a\,c\,x_n^2 - 2\,a\,x_n^2 y_n + b^2 x_n^2 + 2\,b\,c\,x_n - 2\,b\,x_n y_n - 2\,c\,y_n + y_n^2\right)$$

$$\sum_{n=1}^{k}\left(2\,a\,x_n^4 + 2\,b\,x_n^3 + 2\,c\,x_n^2 - 2\,x_n^2 y_n\right)$$

$$\sum_{n=1}^{k}\left(2\,a\,x_n^3 + 2\,b\,x_n^2 + 2\,c\,x_n - 2\,x_n y_n\right)$$

$$2\,k\,c + \sum_{n=1}^{k}\left(2\,a\,x_n^2 + 2\,b\,x_n - 2\,y_n\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Figura 1. Suma de los cuadrados del error para un modelo cuadrático y sus derivadas.

En la Fig. (1) se muestra un ejemplo de la salida del software, cabe destacar que algunas de las ventajas del uso de este software es que buna parte de la notación matemática puede escribirse de manera muy similar a como se haría empleando el pizarrón, esto es parte del llamado paradigma de Clickable Math™ de Maple que permite un manejo intuitivo de diferentes problemas en matemáticas (Lopez, 2019), cabe resaltar que en este punto se realiza de manera simbólica para un numero *k* de puntos que se desea ajustar.

Una característica de Maple que resulta muy conveniente es la posibilidad de almacenar en variables cada una de las expresiones que se dese, ya sean ecuaciones o no. Para el ejemplo mostrado en esta sección también se decidió generar un arreglo

ISSN 2448 – 7945

equiespaciado de valores para la variable regresora empleando una muestra aleatoria de 17 valores (*k*) de una distribución uniforme continua con valores entre -8 y 8. Esto se realizó empleando el paquete "*RandomTools*", mediante el comando "*Generate*", el comando usa un parámetro en el que puede especificarse el tipo de objeto a generar (lista, vector, matriz, etc.) y alguna de las opciones para plantillas ("*flavors*") en este caso un valor aleatorio para la distribución uniforme, estos valores se emplearon para sustituirlos en una ecuación cuadrática con parámetros conocidos emprendo el comando "seq" y a cada valor se le añadió un error tomado de una distribución uniforme con valores de entre -2 a 2.

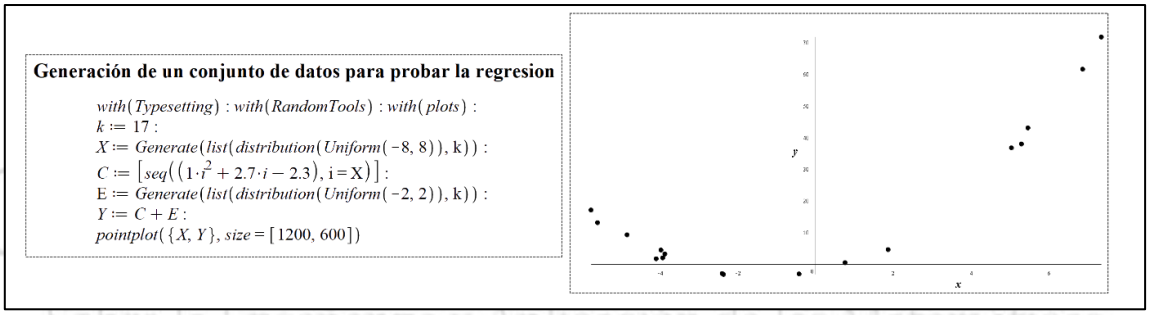


Figura 2. Generación de un conjunto de datos para ejecutar un análisis de regresión.

Finalmente, para obtener una gráfica de dispersión puede emplearse el paquete "*plots*", mediante el comando "*pointplot*", en la Fig. (2) se muestra un ejemplo de los comandos y la salida correspondiente.

Para determinar la forma final de las ecuaciones normales para el análisis de la regresión cuadrática simple se utilizaron los comandos "add" que permite sumar elementos en una lista (matriz, expresión, etc.) junto con las llamadas operaciones "Element-wise" que permiten realizar diferentes operaciones entre los elementos de uno o más arreglos y almacenarlos en un nuevo arreglo. En la Fig. (3) se muestran el resultado final de estas operaciones.

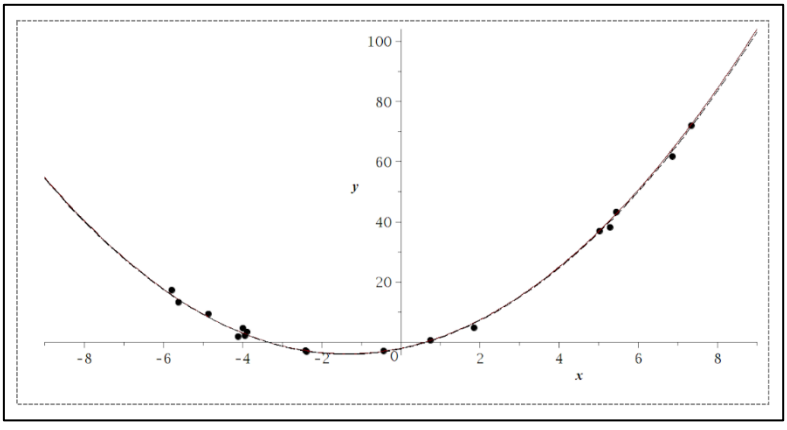


Figura 3. Curva de regresión cuadrática simple por mínimos cuadrados (rojo), función original (guiones) para los puntos generados previamente para el ejemplo.

ISSN 2448 – 7945

Maple permite comparar en el mismo documento (como se muestra en la la Fig. (4)) la expresión escrita en formato matemático y el respectivo uso de funciones para trabajar con los datos almacenados en los arreglos (*X* ,*Y*) generados previamente, las ecuaciones se almacena en tres variables para poder ser empleadas posteriormente con el comando "*solve*" este comando permite resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones así como desigualdades.

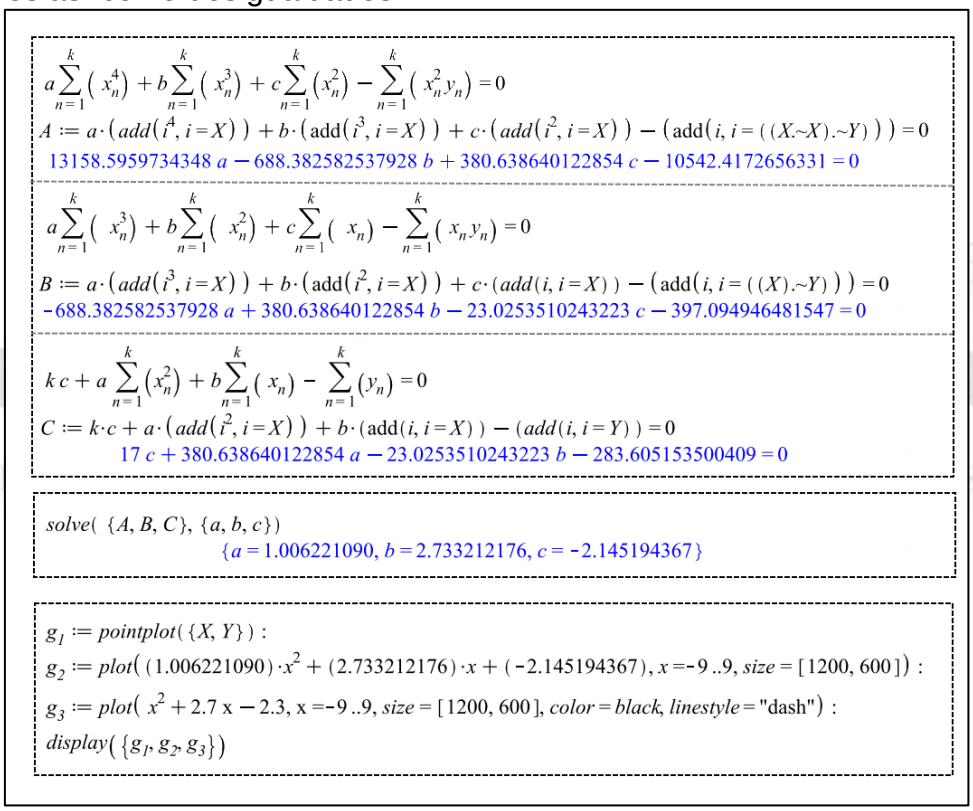


Figura 4. Uso de Maple para realizar las operaciones requeridas para la regresión cuadrática simple empleando los mínimos cuadraros como criterio de ajuste.

Finalmente, empleando la Ec. (12) nuevamente los comandos "*add*" y las operaciones "*Element-wise*" pueden emplearse para calcular el coeficiente de determinación (R^2) como se muestra en la la Fig. (5).

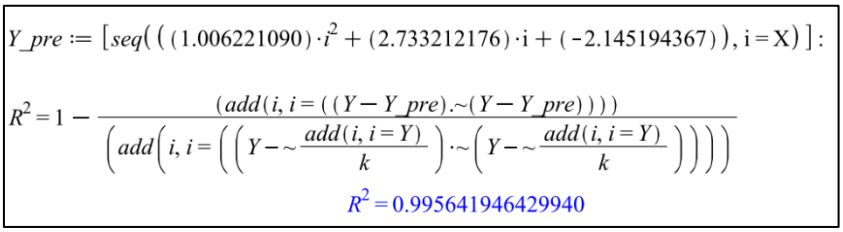


Figura 5. Uso de Maple para calcular el coeficiente de determinación como indicador de la calidad del ajuste.

ISSN 2448 – 7945

4. Conclusiones

La secuencia de actividades propuesta en este trabajo es útil para mostrar la conexión entre diversas asignaturas (algebra, cálculo vectorial y estadística) en el contexto de una actividad concreta (el ajuste de una curva).

La secuencia propuesta puede adaptarse para hacer mayor énfasis en algunos de los métodos particulares de las asignaturas mencionadas, por ejemplo, resolución de sistema por el método de Cramer, plantearse que el objetivo es maximizar la log-verosimilitud (método de la máxima verosimilitud), profundizar en las inferencias estadísticas que pueden hacerse sobre los parámetros ajustados.

Las actividades pueden desarrollarse enteramente empleando el software matemático Maple, destacando que su uso permite la posibilidad de realizar, visualizar y almacenar los cómputos necesarios, así como su representación en escritura matemática empleando un único documento.

Agradecimientos

Trabajo realizado con el apoyo del Programa FESC-PIAPIME 1.32.24.24.

Índice de referencias

García León, O., Ramírez Montes. P. I., León Rodríguez, F. M. (2019). Uso de las TICS para el análisis de valores residuales en el andeva. Memorias del Decimo Primer Congreso Internacional Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas.

Lopez, R. (2019). *The Next Phase of Technology—Maplesoft*. Recuperado el 15 de Marzo de 2024, de: https://www.maplesoft.com/contact/webforms/whitepapers/The_Next_Phase_of_Technology_download.aspx

Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Heil, C. (2015). *Cálculo: Varias variables* (A. E. García Hernández, Trad.; Decimotercera edición). México: Pearson Educación.

Walpole, R., Myers, R., Myers, S. and Ye, K. (2012). Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias. 9th ed. México: Pearson Educación.

ISSN 2448 – 7945

LIBRETAS JUPYTER PARA LA ENSEÑANZA DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES POR EL MÉTODO DEL PUNTO FIJO

Ramirez Montes Pedro Ivan [1,*], Pineda Becerril Miguel de Nazareth[2], León Rodríguez Frida María [3] y Ramírez González J del Carmen[4]
[1,2,3 y 4]*Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, Universidad Nacional Autónoma de México. Carr. Cuautitlán-Teoloyucan Km. 2.5, San Sebastian Xhala, 54714 Cuautitlán Izcalli, Edo. de Méx.*

EN-POSM097

Resumen

En este trabajo se presenta una propuesta de actividades usando las TIC para mejorar la enseñanza de las matemáticas, la secuencia presentada desarrolla el tema de resolución de ecuaciones empleando el método del punto fijo, este trabajo muestra como el uso de libretas Jupyter proporciona una plataforma ideal para enseñanza de este tema en el contexto de un curso de Cálculo Diferencial e Integral como los impartidos en diversas carreras de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM, ya que la mayoría de los estudiantes de estos curso aún no ha tomado un curso foral de computación la propuestas emplea el lenguaje de programación Python por su popularidad y facilidad relativa de uso en el ambiente de las libretas Jupyter.

Palabras clave: *Cálculo, TIC, Jupyter, punto, fijo, resolución.*

1. Introducción

Las libretas Jupyter (JN, por sus siglas en inglés) son una aplicación web y formato de documento que permite al usuario crear e interactuar con programas en lenguajes de programación como Python o R, mientras incorpora en la misma interfaz imágenes, video, ecuaciones y texto con formato, tan solo en 2021 se estimaba que había más de 10 millones de JN de acceso público cifra que da cuenta de su popularidad (Granger y Pérez, 2021). Algunos ejemplos del uso de esta TIC a la educación son en su implementación en cursos de posgrado de ingeniería química (Bascuñana *et al*., 2023), química analítica (Menke, 2020) y como curso virtual de apoyo a un curso presencial de álgebra lineal (Tang, 2021).

Una característica que hace atractivas a las JN en la educación es que estas permiten a los estudiantes observar, modificar y experimentar de forma interactiva con el código en la JN, en comparación con el software comercial que es empleado como una “caja

1 *Autor para la correspondencia. E-mail: pedroivan_86@hotmail.com Tel. 00-00-00-00, Fax 00-00-00-00*

ISSN 2448 – 7945

negra". En Particular para el área de las matemáticas e ingeniería se ha señalado que las JN son un entorno ideal, ya que permiten presentar la teoría empleando la notación matemática usual, mediante LaTeX como se muestra en la Fig. (1). Otra característica importante de las JN es que puede emplearse completamente en línea sin que los estudiantes requieran realizar ninguna instalación. En este trabajo hemos seleccionado el servicio de Google Colab, ya que tiene una versión gratuita, que únicamente requiere del uso de un navegado web, las JN en Colab pueden compartirse de la misma manera que cualquier otro archivo empleando Google Drive.

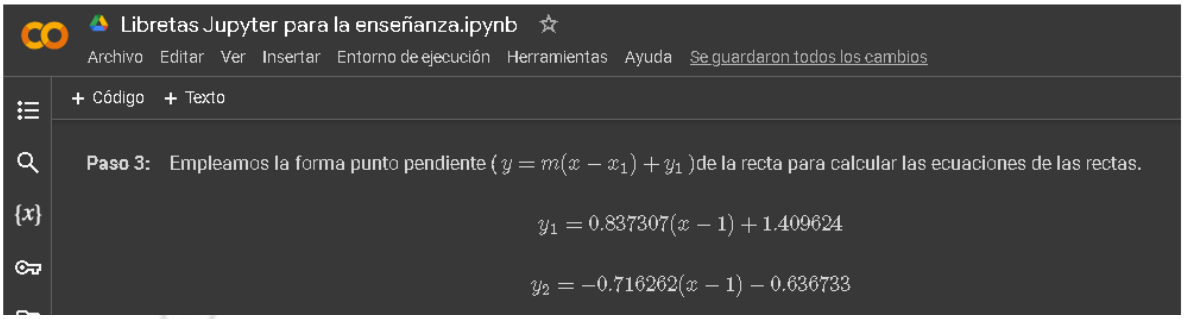


Figura 1. Captura de pantalla de una JN ejemplificando el despliegue de texto con formato y ecuaciones escritas en formato LaTeX en Google Colab.

Cabe señalar que las JN también puede instalarse para trabajar sin necesidad de una conexión a internet, por ejemplo, mediante la distribución Anaconda. En este trabajo desarrollamos una propuesta de secuencia didáctica que permite utilizar JN en Colab para la resolución de ecuaciones mediante el método del punto fijo.

2. Desarrollo

Algunas áreas de ingeniería donde se requiere de solución a ecuaciones no lineales son por ejemplo circuitos eléctricos, tanques de almacenamiento e industria química. Uno de los métodos más convenientes por su simplicidad para resolver esta clase de ecuaciones es el llamado método del punto fijo. En la siguiente sección desarrollamos el método y su aplicación a dos problemas que nos permiten mostrar su uso 1. En un curso de álgebra y 2. En curso de cálculo diferencial e integral.

2.1 Método del punto fijo

Considerando en general la Ec. (1), para la que se desea obtener alguna raíz real que denotamos como ($\bar{x}$). El primer paso del método consiste en transformarla algebraicamente en la Ec. (2).

$$f(x) = 0 \qquad \textbf{Ecuación 1.}$$

ISSN 2448 – 7945

$$x = g(x) \qquad \textbf{Ecuación 2.}$$

Cabe señalar que pueden existir distintos procedimientos algebraicos para una misma ecuación, resultando distintas ecuaciones equivalentes del tipo de la Ec. (2).

El segundo paso del método consiste en estimar algún valor cercano a $\bar{x}$ denotaremos este valor como x_0. El método de estimación puede ser por algún método como: inspección, ensayo y error (tanteo), bisección, considerando el significado físico de la ecuación, realizar un bosquejo de la gráfica de la función, análisis de la función y sus derivadas o bien elegir un valor aleatorio para iniciar.

El tercer paso es sustituir el valor estimado x_0 en el miembro derecho de la Ec. (2), como se muestra en la Ec. (3) obteniéndose un valor x_1.

$$g(x_0) = x_1. \qquad \textbf{Ecuación 3.}$$

Los valores para x_1 originan tres situaciones como se muestra en las Ecs. (4) - (6), la primera es que el valor obtenido sea igual a $\bar{x}$, indicando que el valor señalado corresponde con la raíz buscada (o alguna de las raíces buscadas en caso de ser más de una) y terminaría el método.

$$x_0 = x_1 = \bar{x} \qquad x_0 \neq x_1 \qquad g(x_0) = no\ definida \qquad \textbf{Ecuaciones 4-6.}$$

En el caso de que el valor obtenido sea distinto a x_0 este valor se sustituye nuevamente obteniéndose el esquema iterativo que se muestra en la Fig. (2).

Valor inicial	x_0
primera iteración	$x_1 = g(x_0)$
segunda iteración	$x_2 = g(x_1)$
tercera iteración	$x_3 = g(x_2)$
⋮	⋮
n-ésima iteración	$x_n = g(x_{n-1})$
⋮	⋮

Figura 2. Esquema iterativo del método del punto fijo.

Existe la posibilidad que el valor elegido o bien alguna de las iteraciones no pueda calcularse, en general el método es útil cuando se obtiene como resultado una sucesión, una manera de observar si la sucesión se aproxima a la raíz buscada es sustituyendo el valor en la Ec. (1) y que esta tienda a cero, deteniendo el proceso cuando se ha alcanzado algún criterio de convergencia, por ejemplo, $|f(x_n)| < \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$ apropiado al problema, otras posibilidades son establecer un número máximo de iteraciones, o bien comparar la distancia entre los últimos términos de la sucesión con algún valor apropiado como criterio de convergencia, estos esquemas de convergencia se muestra en la Fig. (3).

ISSN 2448 – 7945

Valor inicial		$f(x_0)$	
primera iteración		$f(x_1)$	
segunda iteración		$f(x_2)$	
tercera iteración		$f(x_3)$	
⋮		⋮	
n-ésima iteración		$f(x_n)$	
⋮		⋮	
Valor final	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert < \varepsilon$	$\lvert f(x_k)\rvert < \varepsilon$	$k = máx.\ núm.\ iter.$

Figura 3. Esquema para la convergencia del método del punto fijo.

La convergencia dependerá entre otras cosas de la función, pero es usual que no todas formas para la Ec. (2) conducirán a una raíz, un análisis detallado puede encontrarse en Domínguez y Nieves (2014).

3. Resultados y análisis

En esta sección demostramos el uso del método del punto fijo para obtener alguna solución a la Ec. (7).

$$(9\,x)^x = 9^{9^9} \qquad \textbf{Ecuación 7.}$$

Una razón que hace atractivo el ejemplo anterior es que versiones populares de sistemas de álgebra computarizada (CAS por sus siglas en inglés) en la enseñanza de las matemáticas como Maple o Mathematica (versión instalada computadora de escritorio convencional y la versión en la nube plan básico institucional de la UNAM) fallan al aplicar los métodos de solución que implementan principalmente porque no son capaces de almacenar en la memoria el número 9^{9^9} o bien las operaciones con dicho número requieren una enorme cantidad de tiempo de cómputo como se muestra en la Fig. (4). Motivando al estudiante a plantearse una estrategia distinta de solución.

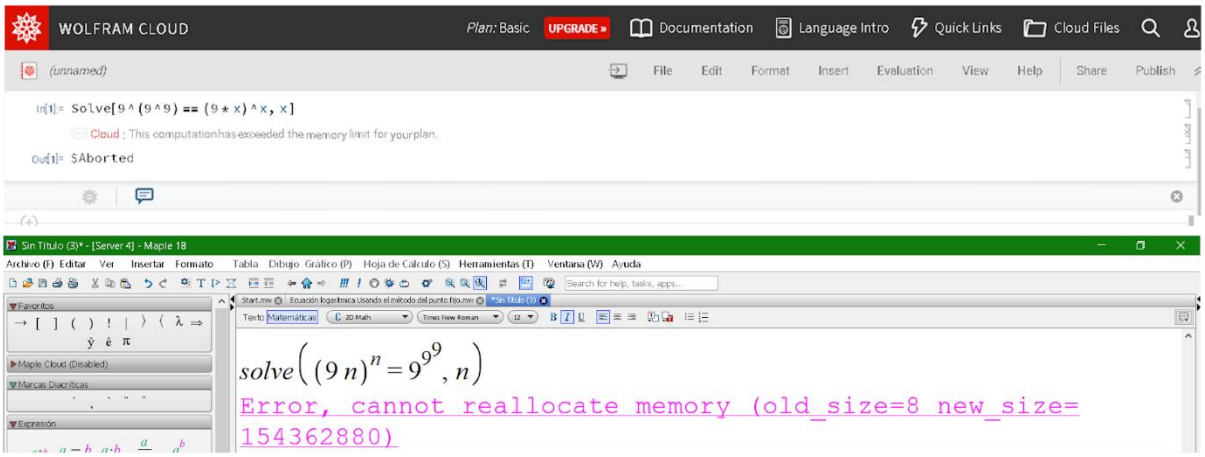


Figura 4. Capturas de pantalla para los resultados de resolver la Ec. (7) en Maple y Mathematica.

ISSN 2448 – 7945

Aplicando el logaritmo base 9^9 para ambos miembros de la Ec. (7), empleando las propiedades de los logaritmos, además de un cambio de base en algunos términos y agrupándolos todos en el lado derecho obtenemos una ecuación del tipo de la Ec. (3). Descrita en la sección anterior una de sus expresiones equivalentes se muestra en la Ec. (8).

$$\log_{9^9}((9\,x)^x) = \log_{9^9}\left(9^{9^9}\right)$$

$$\log_{9^9}((9)^x \cdot (\,x)^x) = \log_{9^9}(9^x) + \log_{9^9}(x^x) = x\log_{9^9}(9) + x\log_{9^9}(x)$$

$$\log_{9^9}\left(9^{9^9}\right) = 9 \quad \Longrightarrow \quad (9^9)^9 = 9^{9^9}$$

$$\log_{9^9}(9) = \frac{1}{9} \quad \Longrightarrow \quad (9^9)^{\frac{1}{9}} = 9$$

$$\log_{9^9}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(9^9)} = \frac{\ln(x)}{9\ln(3^2)} = \frac{\ln(x)}{18\ln(3)}$$

$$x\left(\frac{1}{9}\right) + x\left(\frac{\ln(x)}{18\ln(3)}\right) - 9 = 0$$

Observe que la Ec. (8) es solo una de las posibles ecuaciones que pueden usarse para el método del punto fijo, examinando la gráfica de la Ec. (8) y $f(x) = x$ para obtener un valor inicial cercano a la raíz buscada se llega a un resultado de $x = 31.51324$.

$$x = \frac{9}{\frac{1}{9} + \frac{1}{18}\cdot\frac{\ln x}{\ln 3}} \qquad \textbf{Ecuación 8.}$$

3.1 Diferenciación implícita.

En esta sección proponemos otra secuencia de actividades para mostrar el uso del método del punto fijo para obtener las ecuaciones de las rectas tangentes a la relación mostrada en la Ec. (9) cuando $x = 1$.

$$y^2 = x^2 + \sin(xy) \qquad \textbf{Ecuación 9.}$$

Se sugiere revisar el enlace para ver la JN correspondiente al ejemplo a través del enlace (https://Colab.research.google.com/drive/1PTnHaOk6Cl-Vl2iTe9zqdyyoCWAdq8O2?usp=sharing). La secuencia de actividades requiere un valor para y además de $\frac{dy}{dx}$. Considerando que el valor de $x = 1$ y rescribiendo la Ec. (9) podemos obtener las Ecs. (10) - (12).

$$y = \frac{1 + \sin(y)}{y} \qquad \textbf{Ecuación 10.}$$

$$y = \arcsin(y^2 - 1) \qquad \textbf{Ecuación 11.}$$

$$y = \pm\sqrt{1 + \sin(y)} \qquad \textbf{Ecuación 12.}$$

ISSN 2448 – 7945

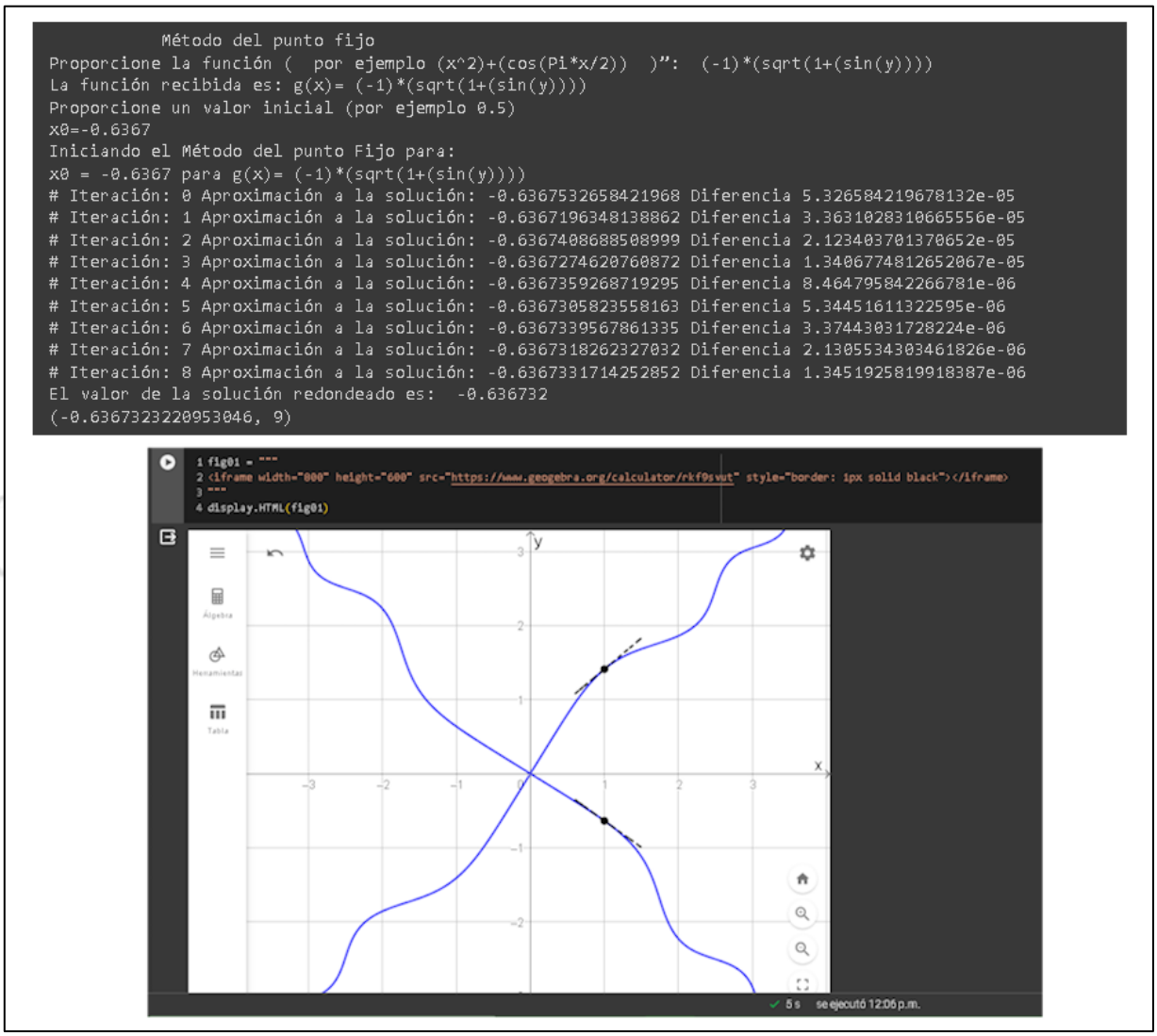


Figura 5. Capturas de pantalla de un JN mostrando la salida para un programa del punto fijo escrito en Python y la aplicación GeoGebra incrustada en la misma libreta, empleando una cuenta gratuita de Google Colab.

Consideramos que el ejemplo es muy útil para ejemplificar los posibles resultados del método del punto fijo (ver Ecs. (4) - (6)) únicamente la Ec. (12). muestra convergencia para obtener los valores buscados. Considerando el dominio de la función arco seno es posible explicar esto, ya que algunos de los valores en el rango de la función definida por la Ec. (11) no pertenecen a su dominio por lo cual no es posible calcularlos y el esquema de iteración se interrumpe sin haber llegado a un resultado. En el caso de la Ec. (10) solamente muestra convergencia para valores positivos.
Como se mencionó en la introducción las JN pueden emplearse utilizando únicamente un navegador, en la Fig. (5). mostramos una captura de pantalla de la salida del programa escrito en Phyton para realizar las iteraciones del método del punto fijo en

ISSN 2448 – 7945

la propuesta se utiliza como criterio de convergencia se utilizó la distancia entre dos valores consecutivos, el ingreso de la función es por parte del usuario y se hace uso del analizador sintáctico para expresiones matemáticas *pymep* (*pymep*, 2019), de manera adicional se colocó un límite de 100 iteraciones para detener el programa en caso de que no haya convergencia o esta sea extremadamente lenta. La Fig. (5) también muestra cómo puede incrustarse la versión web de la calculadora gráfica GeoGebra.

4. Conclusiones

La secuencia de actividades propuesta en este trabajo es útil para mostrar el uso de las libretas Jupyter como un entorno de enseñanza-aprendizaje eficaz cuando se requiere emplear algún método de solución numérico, ya que permite tener en un solo lugar un programa de computadora en Python, ecuaciones matemáticas, texto y gráficas interactivas.

La secuencia propuesta puede adaptarse para tener en cuenta la exposición previa de estudiantes a lenguaje de programación o escritura de ecuación en LaTeX o Markdown. Por ejemplo, retirando el programa del punto fijo y permitiendo que los estudiantes elaboren el propio, que los alumnos utilicen la Inteligencia artificial incorporada en Google Colab para que sea esta la que escriba el programa.

5. Índice de referencias

Bascuñana, J., León, S., González-Miquel, M., González, E. J., & Ramírez, J. (2023). Impact of Jupyter Notebook as a tool to enhance the learning process in chemical engineering modules. *Education for Chemical Engineers*, *44*, 155–163. https://doi.org/10.1016/j.ece.2023.06.001

Domínguez Sánchez, F., & Nieves Hurtado, A. (2014). *Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería* (4a, ed.). México: Grupo Editorial Patria.

Granger, B. E., & Pérez, F. (2021). Jupyter: Thinking and Storytelling With Code and Data. *Computing in Science & Engineering*, *23*(2), 7–14. https://doi.org/10.1109/MCSE.2021.3059263

Menke, E. J. (2020). Series of Jupyter Notebooks Using Python for an Analytical Chemistry Course. Journal of Chemical Education, 97(10), 3899–3903.

Tang, C. (2021). Computer-aided Linear Algebra Course on Jupyter-Python Notebook for Engineering Undergraduates. *Journal of Physics: Conference Series*, *1815*(1), 012004. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1815/1/012004

ISSN 2448 – 7945

EL CONOCIMIENTO NUMÉRICO Y SU INCIDENCIA EN LA ALFABETIZACIÓN FINANCIERA: ESTUDIO EMPÍRICO EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Hernández Mejía Sergio[1,*] ,
[1]*Universidad Cristóbal Colón. Carr. Veracruz-Medellín s/n. Boca del Río, Veracruz*

AP-POSM099

Resumen

Esta investigación tiene por objetivo analizar la incidencia del conocimiento numérico en la alfabetización financiera de estudiantes de educación superior. En esta investigación el conocimiento numérico se define como un procedimiento para aplicar cálculos numéricos y porcentuales según Martínez-Bustos (2020) y Jiménez (2022); la alfabetización financiera se define como la habilidad para calcular el interés financiero de un ahorro bancario, comprender el efecto de la inflación sobre el poder adquisitivo y determinar los intereses de una deuda, según el enfoque de Lusardi (2019) y Lusardi y Tufano (2015). La muestra está conformada por 294 estudiantes que estaban cursando el último año de licenciatura, matriculados en universidades públicas y privadas en Veracruz, México. Para el análisis de la incidencia se utiliza la regresión logística binaria. Los resultados descriptivos evidencian que sólo 50% de los estudiantes universitarios cuentan con alta alfabetización financiera. En el análisis correlacional se evidencia la incidencia positiva y significativa del conocimiento numérico de los estudiantes en la alfabetización financiera. Los estudiantes que obtuvieron puntuaciones por arriba del promedio en los indicadores de conocimiento numérico, comparados con su contraparte, es más probable que estén alfabetizados financieramente. Es decir, los estudiantes que cuentan con conocimientos matemáticos para realizar cálculos con fracciones y porcentajes, variación de cantidades y montos, operaciones de razones y proporciones, es más probable que comprendan el efecto de la inflación en el poder adquisitivo, logren calcular el interés devengado en un ahorro bancario y calcular el interés generado por una deuda. Los resultados de la investigación sugieren fortalecer el conocimiento numérico de estudiantes universitarios y su aplicación en conceptos financieros tal que les que permita tomar decisiones financieras informadas, tanto en el ámbito personal como laboral.

Palabras clave: *Conocimiento, numérico, alfabetización, financiera, regresión, logística.*

1. Introducción

En las últimas décadas, tanto los países en desarrollo como aquellos en vías de desarrollo han enfatizado sobre la importancia de que sus ciudadanos estén capacitados financieramente, tal que les permita realizar actividades financieras básicas en su vida diaria como utilizar una tarjeta de crédito, contratar un crédito o

[1] * *Autor para la correspondencia. E-mail: sergiohm@ucc.mx*

ISSN 2448 – 7945

elegir entre diferentes opciones financieras (OECD, 2020; OECD, 2023). De acuerdo a Lusardi (2019) y Lusardi y Tufano (2015 la alfabetización financiera que se define como la habilidad para calcular el interés financiero de un monto de dinero ahorrado, comprender el efecto de la inflación sobre el poder adquisitivo y determinar los costos financieros de una deuda.

En el proceso de toma de decisiones financieras, las habilidades matemáticas con las que cuentan los ciudadanos toman relevancia, ya que según la OECD (2019), la mayoría de las decisiones financieras implican el uso del dinero, por lo cual se requiere el conocimiento de saberes matemáticos. Así, en la evaluación de la alfabetización financiera de los individuos, los saberes matemáticos básicos esperados son aquellos que corresponden a las cuatro operaciones de la aritmética básica (suma, resta, multiplicación y división), con número enteros, decimales y porcentajes.

Martínez-Bustos y otros (2020) enfatizan la importancia de las competencias matemáticas genéricas, definida como una habilidad para utilizar y relacionar números, que le permitan a la persona plantear y resolver problemáticas en cualquier ámbito de estudio y en su vida cotidiana. Los autores enfatizan en el factor de conocimientos numéricos del tipo procedimental que definen como un medio para aplicar cálculos numéricos y porcentuales en un contexto determinado.

Los resultados de investigaciones en grupos de estudiantes de diferente nivel educativo resaltan una fuerte correlación entre el desempeño en temas financieros y las habilidades matemáticas con las que cuentan los estudiantes (Liang y otros, 2022; Villagómez e Hidalgo, 2017). En el reporte de OECD (2020) se evidenció una asociación entre la alfabetización financiera de los estudiantes y el conocimiento en saberes de matemáticas: aquellos estudiantes que obtuvieron un desempeño alto en matemáticas, también obtuvieron un buen desempeño en alfabetización financiera. En promedio, en los países pertenecientes a la OECD, la correlación entre alfabetización financiera y el desempeño en conocimientos matemáticos fue de 0.87.

Liang y otros (2022) identificaron que el desempeño en contabilidad y finanzas por parte de los estudiantes universitarios estaba asociado a los conocimientos que tienen los estudiantes de matemáticas. Para identificar cuál rama de las matemáticas (aritmética, geometría, álgebra, estadística y cálculo) es la que contribuye más al aprendizaje de contabilidad de los estudiantes utilizaron un modelo de regresión múltiple. Los resultados evidenciaron una relación positiva y significativa entre desempeño en contabilidad y finanzas, medida por la puntuación final obtenida, con las ramas de las matemáticas.

A partir de lo anterior se formula la siguiente hipótesis: el conocimiento numérico procedimental incide de manera positiva en la alfabetización financiera. A partir de lo anterior, se formula la pregunta de investigación: ¿Existe una relación entre la alfabetización financiera y los conocimientos numéricos de los estudiantes universitarios? Por lo tanto, el objetivo que persigue esta investigación es determinar

ISSN 2448 – 7945

la relación existente entre la alfabetización financiera con los conocimientos numéricos del tipo procedimental.

2. Metodología o desarrollo

Esta investigación tiene por objetivo analizar la incidencia del conocimiento numérico en la alfabetización financiera de estudiantes de educación superior. Los datos que se utilizan provienen de una muestra, obtenida por autodeterminación, conformada por 294 estudiantes universitarios, que estaban cursando el último semestre de su programa de licenciatura (enero- junio de 2022). La muestra se conforma tanto de estudiantes inscritos en universidades públicas como privadas, pertenecientes al Municipio de Veracruz, del Estado de Veracruz, México.

La recolección de datos se realiza a través de un cuestionario, aplicado en línea, a través de la herramienta Google forms. Las preguntas provienen de un instrumento híbrido de acuerdo a la propuesta de Lusardi y Tufano (2015) y Liang et al., (2022). En la tabla 1, se presentan las preguntas para medir alfabetización financiera.

Tabla 1. Preguntas para medir la alfabetización financiera de los encuestados

Variable	Enunciado de la pregunta	Opciones de respuesta
Interés simple	Si Verónica deposita $5,000.00 en su cuenta de ahorros con una tasa de interés anual del 9% y deja el dinero en la cuenta durante ocho años, ¿Cuánto interés generará su dinero? a) $360.00; b) $45.00; **c) 3,600.00;** d) 450.00	
Interés com-puesto	Suponga que tiene $ 100.00 en una cuenta de ahorros y la tasa de interés es del 2% anual. ¿Cuánto dinero cree que habrá en la cuenta bancaria después de 5 años, si no se realizaron depósitos ni retiros? **a) Más de $102.00**; b) Exactamente $102.00; c) Menos de $102.00; d) No sabe	
Inflación	Si tuviera una cuenta bancaria de ahorros con una tasa de interés del 1% anual y con tasa anual de inflación del 2%. ¿Qué podría comprar con el dinero de esa cuenta al término de 1 año en el que no se realizaron movimientos de retiros ni depósitos? a) Más de lo que puede comprar hoy; **b) Menos de lo que puede comprar hoy;** c) Lo mismo que compró el año anterior; d) No sabe	
Intereses de una deuda	Suponga que adquirió un préstamo de $12,000.00 por cinco años para adquirir un automóvil, con una tasa de interés de 6.5% por año. ¿Cuánto dinero pagará de interés? a) $780.00; b) $600.00; **c) $3,900.00** d) $4,900.00	

Fuente: elaboración propia con datos de Lusardi (2019) y Lusardi y Tufano (2015).
Nota: los números en negritas indican la respuesta correcta.

Para el modelo estadístico, se diseña una variable dicotómica para cada pregunta, la cual toma el valor de uno para la respuesta correcta y el valor de cero para la respuesta incorrecta. Se construye un indicador de alfabetización financiera obtenido como la

ISSN 2448 – 7945

suma de respuestas correctas. El indicador toma valores enteros en el rango de 0 a 4. El resultado que obtiene cada individuo se normaliza de la siguiente manera: (suma de respuestas correctas/4)*100. Se calcula el promedio del grupo y se conforman dos grupos. El grupo 1 está conformado por aquellos que obtuvieron un valor mayor al promedio, mientras que el grupo 2 está conformado por los que obtuvieron un valor menor o igual al promedio. El grupo 1 se denomina con alfabetización financiera alta, mientras que los del grupo 2 se denomina con alfabetización financiera baja.

Para medir el conocimiento numérico procedimental, se proponen 14 preguntas que involucran operaciones aritméticas y su aplicación en el contexto de las finanzas. La tabla 2 presenta la operacionalización del conocimiento numérico.

Tabla 2. Operacionalización de conocimientos numéricos en temas de finanzas

Conocimiento numérico	Operación	Número de preguntas/temas
X1: Suma y resta	Hacer sumas y restas	5 preguntas relacionadas al presupuesto personal, cargos financieros de préstamos e inversiones
X2: Fracciones y porcentajes	Calcular el porcentaje de un monto dado	3 preguntas relacionadas al cálculo de comisiones
X3: Variación	Calcular la variación porcentual y absoluta de una cantidad	3 preguntas relacionadas a la variación de porcentajes o cantidades
X4: Razón y proporción	Formular expresiones que involucran el concepto de razón	3 preguntas relacionadas a la razón y proporción de cantidades y montos monetarios

Fuente: elaboración propia

Para cada pregunta se diseña una variable dicotómica, se construye un indicador y se conforman dos grupos por cada tipo de conocimiento como en el caso de la alfabetización financiera.

2.1 El modelo matemático

Para explicar el comportamiento de la variable dependiente, denotada como y, que asume sólo dos valores ($y = 1$ y $y = 0$), se utiliza el modelo de regresión logística binario, tal como se indica en Gujarati (2010). Las variables independientes se denotan como $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$. La ecuación de la regresión logística se expresa de la siguiente manera:

Ecuación 1. $$E(y) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_2+\beta_3X_3+\cdots+\beta_pX_p}}{1+e^{\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_2+\beta_3X_3+\cdots+\beta_pX_p}} = \frac{e^{Z_i}}{1+e^{Z_i}}$$

ISSN 2448 – 7945

donde $E(y)$ es la media o valor esperado de y; $Z_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \cdots + \beta_p X_p$. Como los valores de la variable dependiente y son codificados como $y = 1$ y $y = 0$, el valor de $E(y)$ en la ecuación 1 proporcionará la probabilidad de que $y = 1$ para un conjunto dado de valores de las variables independientes $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$. Así, $E(y)$ se interpreta como una probabilidad y la ecuación de regresión logística se expresa de la siguiente manera:

Ecuación 2. $E(y) = P(y = 1|x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p)$

De las características de la ecuación 1, se destaca lo siguiente: i) a medida que Z_i se encuentra dentro de un rango $-\infty$ a $+\infty$, P se encuentra dentro de un rango de *0 a 1*, ii) P no está linealmente relacionado con Z_i (es decir con las X_i). Así mismo, a medida que $Z_i \to +\infty, e^{-z_i}$ tiende a cero, y a medida que $Z_i \to -\infty, e^{-z_i}$ aumenta indefinidamente. De la ecuación 1 y 2, se tiene que $\mathrm{E(y) = P(y = 1) = \frac{e^{Z_i}}{1+e^{Z_i}}}$, por lo tanto $\mathrm{P(y = 0) = 1 - P(y = 1) = \frac{1}{1+e^{Z_i}}}$. La razón de probabilidades

Ecuación 3. $\frac{P(y=1)}{P(y=0)} = e^{Z_i}$

indica la probabilidad de que ocurra la variable, $y = 1$ respecto de la probabilidad de que no ocurra, $y = 0$. Al tomar el logaritmo natural de la ecuación 3, se obtiene lo siguiente:

Ecuación 4. $\mathrm{\ln\left(\frac{P(y=1)}{P(y=0)}\right) = \ln(e^{Z_i}) = Z_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \cdots + \beta_p X_p.}$

Lo cual indica que el logaritmo de la razón de probabilidades no es sólo lineal en X_i, sino también lineal en los parámetros β_i. Este modelo, por su transformación se denomina Logit. Para efectos de la estimación, el modelo Logit, se escribe de la siguiente manera:

Ecuación 5. $\mathrm{\ln\left(\frac{P(y=1)}{P(y=0)}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \cdots + \beta_p X_p + u_i}$

Las variables y e x_i se indican de la siguiente manera: $y = 0$ si el encuestado obtuvo una puntuación menor o igual al promedio; $y = 1$ si el encuestado obtuvo una puntuación mayor al promedio; $x_i = 0$ si el encuestado obtuvo una puntuación menor o igual al promedio y $x_i = 1$ si el encuestado obtuvo una puntuación mayor al promedio con $i = 1,2,3,4$. Donde, $\mathrm{x_1}$: conocimiento numérico de suma y resta; $\mathrm{x_2}$: conocimiento numérico de fracciones y porcentajes; $\mathrm{x_3}$: conocimiento numérico de variación; $\mathrm{x_4}$: conocimiento numérico de razón y proporción; u_i: término de error.

Para la estimación de los parámetros del modelo, se aplica el método de máxima verosimilitud, para lo cual se utilizó el software Gretl, en su versión 2023. Para probar la significancia individual sobre los parámetros se utilizan los resultados de la regresión y el estadístico de contraste Z . A partir de ello se calcula la estimación Logit, denotada

ISSN 2448 – 7945

como $= \hat{g}(X_1, X_2, X_3, \dots, X_p) = b_0 + bX_1 + b_2X_2 + bX_3 + \cdots + b_pX_p$ y la ecuación de regresión estimada queda como:

Ecuación 6. $P(\hat{y} = 1) = \frac{e^{\hat{g}(X_1,X_2,X_3,\dots,X_p)}}{1+e^{\hat{g}(X_1,X_2,X_3,\dots,X_p)}}$

3. Resultados y análisis

La tabla 3 presenta los resultados de la alfabetización financiera. Del total de la muestra, se obtiene el porcentaje que responde correctamente las preguntas, interés simple (77.21%), intereses de una deuda (60.54%), interés compuesto (57.82%) e inflación (44.22%). El promedio de respuestas correctas del indicador de alfabetización financiera es 60%

Tabla 3. Resultados de la alfabetización financiera (%)

Variable	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas	Muestra (n=294)
Interés simple	77.21%	22.79%	100%
Interés compuesto	57.82%	42.18%	100%
Inflación	44.22%	55.78%	100%
Intereses de una deuda	60.54%	39.46%	100%
Promedio de respuestas correctas del indicador de alfabetización financiera = 60%			
Porcentaje de estudiantes con alfabetización financiera mayor al promedio = 51.36%			

Fuente: elaboración propia con datos de la encuesta

Los resultados de la tabla 4 indican una correlación positiva y significativa entre el indicador de alfabetización financiera con cada indicador de conocimientos numéricos. La mayor correlación es con el indicador de operaciones con fracciones y porcentajes y con el indicador de operaciones de razón y proporciones.

Tabla 4. Matriz de correlación entre indicador de alfabetización financiera y conocimientos numéricos

	Indicador de alfabetización financiera	Significancia estadística bajo la hipótesis nula de no correlación
Indicador de operaciones numéricas básicas (suma y resta)	Correlación= 0.17497460	t(292) = 3.03682, valor p a dos colas = 0.0026
Indicador de operaciones con fracciones y porcentajes	Correlación= 0.25141042	t(292) = 4.43867, valor p a dos colas = 0.0000
Indicador de operaciones que involucran variación porcentual y absoluta de una cantidad	Correlación= 0.19881899	t(292) = 3.46663, valor p a dos colas = 0.0006

ISSN 2448 – 7945

Indicador de operaciones de razón y proporción	Correlación= 0.25262817	t(292) = 4.46163, valor p a dos colas = 0.0000

Fuente: elaboración propia con datos de la encuesta

En la tabla 5 se presentan los resultados del modelo Logit. Se evidencia la incidencia positiva y significativa del conocimiento numérico de los estudiantes en la alfabetización financiera. Los estudiantes que obtuvieron puntuaciones por arriba del promedio en los indicadores de conocimiento numérico, comparados con su contraparte, es más probable que estén alfabetizados financieramente.

Es decir, los estudiantes que cuentan con conocimientos matemáticos para realizar cálculos con fracciones y porcentajes, variación de cantidades y montos, operaciones de razones y proporciones, es más probable que comprendan el efecto de la inflación en el poder adquisitivo, logren calcular el interés devengado en un ahorro bancario y calcular el costo financiero de una deuda.

Tabla 5. Estimaciones Logit y efecto marginal

	Coeficiente	*Desv. Típica*	*z*	*Efecto marginal*
Constante	−1.37816***	0.352716	−3.907	
X1: Suma y resta	0.521269*	0.282309	1.846	0.129452
X2: Fracciones y porcentajes	0.798969***	0.296530	2.694	0.196348
X3: Variación	0.540995**	0.273761	1.976	0.134379
X4: Razón y proporción	0.659636**	0.264036	2.498	0.163313
Z: Universidad Pública	−0.515397**	0.259557	−1.986	−0.128133
Media de la variable dependiente = 0.513605				
R-cuadrado de McFadden = 0.102135				
Número de casos 'correctamente predichos' = 200 (68.0%)				
f(beta'x) en la media de las variables independientes = 0.501				
Contraste de razón de verosimilitudes: Chi-cuadrado(5) = 41.6048 [0.0000]				

Nota: *,**;***: Significancia estadística al 10%, 5%, 1% respectivamente.

4. Conclusiones

Los resultados de esta investigación proporcionan evidencia de la relación entre la alfabetización financiera y los conocimientos numéricos del tipo procedimental por parte de la muestra de estudiantes universitarios considerados en esta investigación. El 51.36% de los estudiantes de la muestra obtuvo una puntuación en alfabetización por arriba del promedio de alfabetización financiera de la muestra (60%). Se evidencia la incidencia positiva y significativa del conocimiento numérico de los estudiantes en la alfabetización financiera. Los estudiantes que obtuvieron puntuaciones por arriba del promedio en los indicadores de conocimiento numérico procedimental, comparados con su contraparte, es más probable que estén alfabetizados financieramente. Los resultados de la investigación sugieren fortalecer las competencias matemáticas

ISSN 2448 – 7945

numéricas conceptuales y procedimentales de los estudiantes universitarios, enfocados en los temas de finanzas personales y administración del dinero, tal que permita promover la toma de decisiones financieras informadas.

5. Índice de referencias

- Gujarati, Damodar (2010). *Econometría*. México: Mc Graw Hill.
- Lusardi, A. (2019). Financial literacy and the need for financial education: evidence and implications. *Swiss J Economics Statistics* 155, 1 [En línea] Disponible en: https://doi.org/10.1186/s41937-019-0027-5
- Liang, S., Du, R., & Ma, Z. (2022). Which Math Skill Matters the Most in Accounting Learning?. *Journal of Accounting and Finance*, 22(2). [En línea] Disponible en: https://doi.org/10.33423/jaf.v22i2.5139
- Lusardi Annamaria, Tufano Peter (2015). Debt literacy, financial experiences, and overindebtedness. *Journal of Pension Economics and Finance*. 2015;14(4):332-368. [En línea] Disponible en: https://doi:10.1017/S1474747215000232
- Martínez-Bustos, P., Niebles-Núñez, W. & Niebles-Núñez, L. (2020). Competencias matemáticas como factor de éxito en la prueba pro en universidades de Barranquilla, Colombia. *Educación y Humanismo*, 22(38), 1-16. En línea] Disponible en: https://DOI: 10.17081/eduhum.22.38.3590
- OECD (2020). PISA 2018 Results (Volume IV): Are Students Smart about Money?, *PISA, OECD Publishing*, Paris. [En línea] Disponible en: https://doi.org/10.1787/48ebd1ba-en
- OECD (2019). PISA 2021 Financial Literacy Analytical and Assessment Framework. *PISA, OECD Publishing*. Published online. [En línea] Disponible en: https://www.oecd.org/pisa/publications/pisa-2021-assessment-and-analytical-framework.htm
- OECD (2023), PISA 2022 Assessment and Analytical Framework, *PISA, OECD Publishing*, Paris, [En línea] Disponible en: https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en.
- Villagómez Amezcua, A., & Hidalgo Everardo, J. (2017). Alfabetismo Financiero y Matemáticas: Un Estudio entre Estudiantes Mexicanos de Preparatoria. *Revista Mexicana de Economía y Finanzas Nueva Época REMEF*, 12(2). [En línea] Disponible en: doi:https://doi.org/10.21919/remef.v12i2.88

ISSN 2448 – 7945

LOS FRACTALES DE SIERPINSKI. UNA APLICACIÓN DEL CÁLCULO GEOMÉTRICO.

Oscar Gabriel Caballero Martínez[1,*], Adriana Dávila Santos[2]
[1 y 2] FES ACATLÁN, Alcanfores y San Juan Totoltepec s/n, Santa Cruz Acatlán, Naucalpan, Edo. de México, C.P. 53150. México

AP-POSM100

Resumen

El presente trabajo presenta una aproximación a los fractales de Sierpinski por medio de programación por computadora, vista desde un punto de vista geometría dirigida y al mismo tiempo programado desde el uso del cálculo geométrico, echando mano de la autosimilitud de los fractales mediante sistemas de funciones iteradas y con puntos atractores.

Palabras clave: *Sierpinski, fractal, programación, geometría, cálculo, autosimilitud.*

1. Introducción

Los fractales han sido objetos de estudio desde el siglo XX, la gran mayoría de los objetos fueron estudiados debido a su belleza y lo recurrente que es encontrarlos en la naturaleza, sin embargo, entre todos los tipos de fractales, los fractales que en este trabajo se abordarán, son los fractales de Sierpinski, los cuales se introdujeron por primera vez en 1916 por el Matemático Waclaw Sierpinski (Arenas-Sabogal, 2008).

En este trabajo se abordarán a los fractales y tapetes de Sierpinski que si bien son un tipo de conjunto de Cantor, en este trabajo se describirán en su gráfica desde el punto de vista del cálculo geométrico, pues si bien es cierto, los fractales de Sierpinski son un conjunto resultado de la autosimilitud generada por la intersección de un conjunto de triángulos generados a través de un proceso de autosemejanza, por otro lado, de acuerdo con Arenas-Díaz (2009) y Rodríguez (2003) también se pueden generar fractales mediante sistemas de funciones iterados y puntos atractores, que en el caso de los fractales de Sierpinski serán el abordaje con el cual se visualizará el triángulo y tapete de Sierpinski siguiendo a Caballero Martínez (2021) .

[1 *] *Lic. Oscar Gabriel Caballero Martínez. E-mail: camo6812@acatlan.unam.mx Tel. 55-13-36-81-34*

ISSN 2448 – 7945

2. Metodología o desarrollo

La metodología a seguir en este trabajo es la programación basada en funciones iteradas y puntos atractores, para luego graficar con cálculo geométrico en vectores dirigidos.

2.1 Triángulo de Sierpinski

Para construir el triángulo de Sierpinski, es necesario tener un triángulo que llamaremos S_0, comprendido por los puntos *A*, *B* y *C*; identificado como *ABC*, como se muestra en la figura 1.a). Si se encuentran los puntos medios entre los puntos de *A* y *B*; *B* y *C*; y *C* y *A*; e identificaremos como $W_1 = MAB$, $W_2 = MBC$ y $W_3 = MCA$, respectivamente. Se genera un triángulo $W_1W_2W_3$, y al eliminar el triángulo antes construido obtendremos la figura llamada S_1, que se muestra en la figura 1.b). En cada uno de los triángulos restantes de S_1 repetimos el proceso, y al continuar con este procedimiento de forma infinita, podremos tener un número de figuras S_1, S_2, S_3 ... Se define el **triángulo de Sierpinski** de la siguiente forma:

Ecuación 1. $S=\bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$

El triángulo de Sierpinski se puede visualizar en el triángulo que se generará como se observa en la figura 1.c).

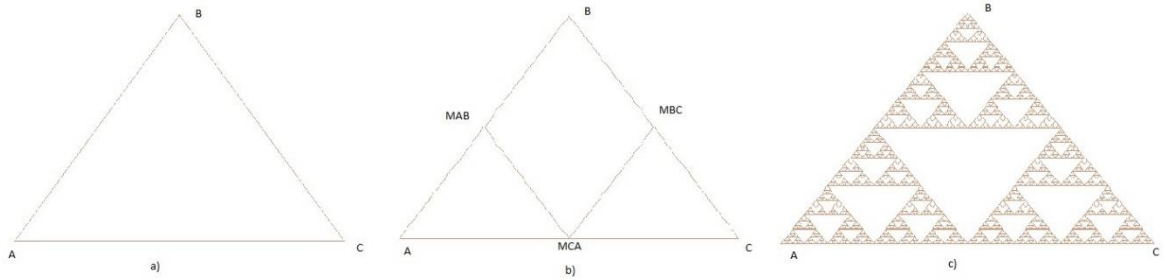


Figura 1 El triángulo de Sierpinski

Ahora, se ejemplifica este proceso, pero explicado con vectores, este proceso nos invita a pensar en el sistema de funciones direccionadas que generarán al triángulo.

Se definen los vectores: $\overrightarrow{0A}$, $\overrightarrow{0B}$ y $\overrightarrow{0C}$ como se muestra en la figura 2.a), se puede calcular el vector que va del vector $\overrightarrow{0A}$ al vector $\overrightarrow{0B}$ con la fórmula

ISSN 2448 – 7945

Ecuación 2. $\vec{w}=\overrightarrow{0B}-\overrightarrow{0A}$

Como se muestra en la figura 2.b), Se observa que el vector $\overrightarrow{0A}+\vec{w}$ es el vector $\overrightarrow{0B}$, como se muestra en la figura 2.c). Si se calcula la mitad del vector $\vec{w}$ y se le suma este resultado al vector $\overrightarrow{0A}$, se obtiene la figura 2.d); generando al punto medio *MAB*.

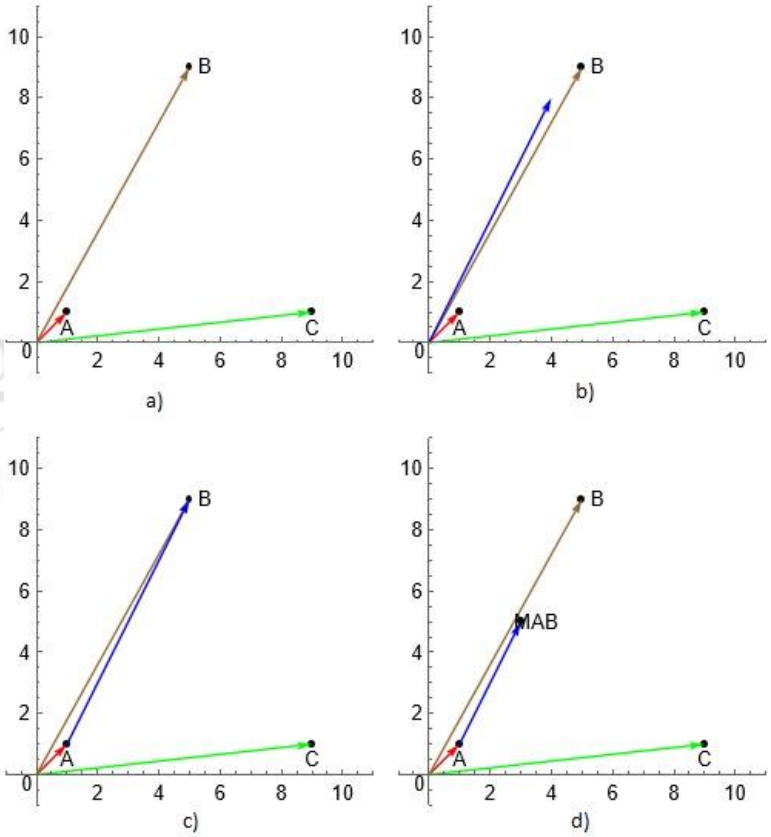


Figura 2. Operación para encontrar distancia media entre dos puntos.

Se puede observar el siguiente resultado, se supone que

Ecuación 3. $\vec{w}=\frac{\overrightarrow{0B}-\overrightarrow{0A}}{2}$

afirma que

Ecuación 4.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{0A}+\vec{w} &= \overrightarrow{0A}+\frac{\overrightarrow{0B}-\overrightarrow{0A}}{2}\\ &= \frac{2\overrightarrow{0A}+\overrightarrow{0B}-\overrightarrow{0A}}{2}\\ &= \frac{\overrightarrow{0A}+\overrightarrow{0B}}{2}\end{aligned}$$

ISSN 2448 – 7945

Que, si se consideran a los puntos *A* y *B*; es la función para calcular el punto medio entre los puntos *A* y *B*.

Se hace el mismo procedimiento para encontrar los puntos medios

Ecuación 5. $$MBC=\vec{0B}+\frac{\vec{0C}-\vec{0B}}{2}$$

y

Ecuación 6. $$MCA=\vec{0C}+\frac{\vec{0A}-\vec{0C}}{2}$$

para generar una gráfica como se muestra en la figura 3.

MEMORIAS DEL Congreso Internacional Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

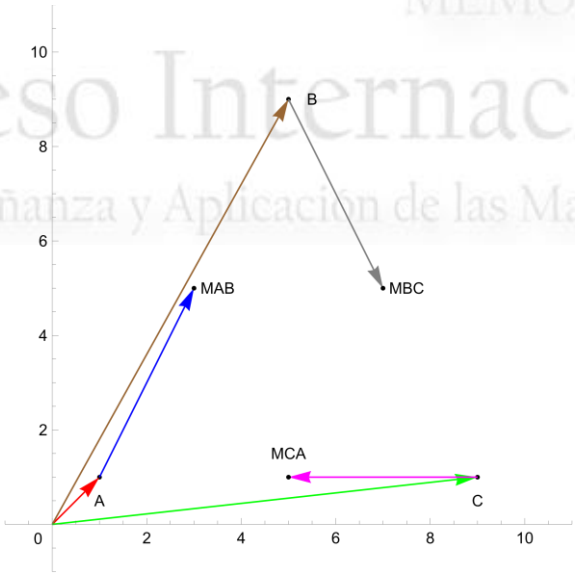


Figura 3. Puntos medios por cada par de vértices del triángulo.

Con esta serie de puntos generados por medio de los vectores, al unir los puntos *A*, *B* y *C* se genera la figura 1.a). Al unir los puntos *MAB*, *MBC* y *MCA* juntos con la gráfica de la figura 1.a); se genera la figura 1.b). Si se hace este procedimiento para todos los triángulos correspondientes, se generaría la figura 1.c).

Por otro lado, para generar el triángulo de Sierpinski con “Puntos Atractores”, a partir del análisis hecho con anterioridad, consideremos 3 puntos fijos *A*, *B* y *C*; que son los puntos atractores y se tiene a un punto *P* en cualquier parte del plano, como se muestra en la figura 4.a):

ISSN 2448 – 7945

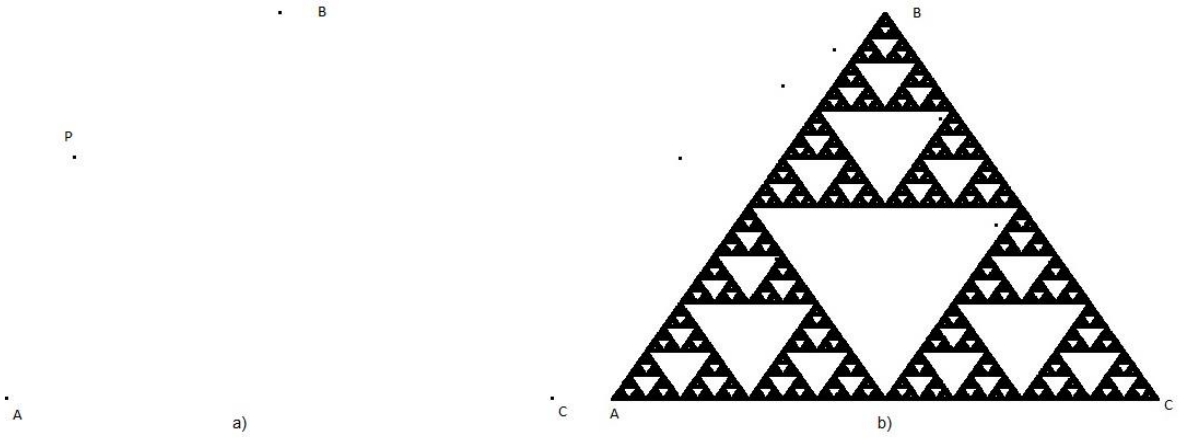


Figura 4. El triángulo de Sierpinski con puntos atractores.

Para generar el triángulo de Sierpinski se sigue el siguiente algoritmo:

Paso 1. Se toma un punto cual quiera de los 3 (*A*, *B* y *C*) aleatoriamente, y se toma al vector $\vec{w}=\frac{\overrightarrow{PX_i}}{2}$, para $\{X_1=A, X_2=B, X_3=C\}$.

Paso 2. Hacer que *P* sea igual al punto donde termina el vector $\overrightarrow{0P}+\vec{w}$.

Paso 3. Repetir paso 1 y 2 en este caso, 10000 veces.

Al concluir con el algoritmo, se genera la figura 4.b):

2.2 Tapete de Sierpinski

Siguiendo con la misma temática, para construir el "*Tapete de Sierpinski*" se parte de un cuadrado con vértices A, B, C y D como se puede ver en la figura 5.a), al dividir la distancia entre los puntos *A* y *B* en tres partes iguales y tomar dos tercios de la distancia *A* y *B*, mejor dicho, un tercio de la distancia entre *B* y *A*. Y así sucesivamente para los sectores comprendidos entre los puntos *B* y *C*, *C* y *D*, y por último entre los puntos *D* y *A*. El cual hace que el cuadrado inicial quede dividido en 9 cuadrados. Como se ve en la figura 5.b). Si se vuelven a repetir para los 8 cuadrados exteriores, y continuando así un número infinito de veces, se genera la figura 5.c) la cual es llamada Tapete de Sierpinski.

ISSN 2448 – 7945

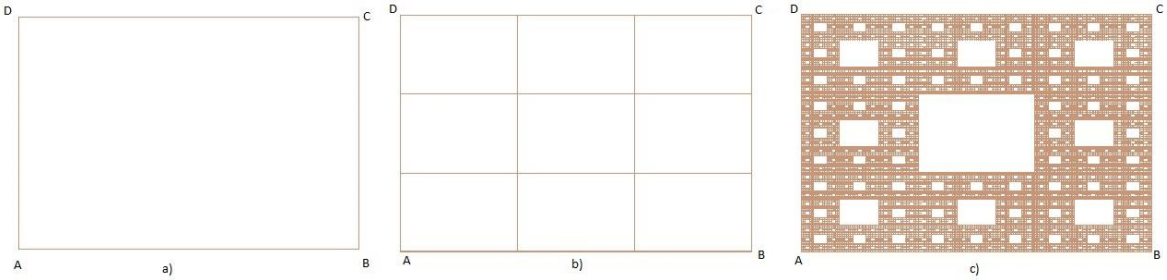


Figura 5. El Tapete (o alfombra) de Sierpinski

Llevando este último resultado, se realiza el análisis tomando cuatro puntos y generando vectores denominados $\overrightarrow{0A}$, $\overrightarrow{0B}$, $\overrightarrow{0C}$ y $\overrightarrow{0D}$ que se pueden ver en la figura 6.a). Y para encontrar los otros puntos por medio de vectores, habría que calcular los vectores que se dirigen de un punto a otro y tomar la tercera parte de éste, de la siguiente forma:

$$\vec{w}_1 = \frac{\overrightarrow{0B}-\overrightarrow{0A}}{3} \qquad \vec{w}_5 = \frac{\overrightarrow{0D}-\overrightarrow{0C}}{3}$$
$$\vec{w}_2 = \frac{\overrightarrow{0A}-\overrightarrow{0B}}{3} \qquad \vec{w}_6 = \frac{\overrightarrow{0C}-\overrightarrow{0D}}{3}$$
$$\vec{w}_3 = \frac{\overrightarrow{0C}-\overrightarrow{0B}}{3} \qquad \vec{w}_7 = \frac{\overrightarrow{0A}-\overrightarrow{0D}}{3}$$
$$\vec{w}_4 = \frac{\overrightarrow{0B}-\overrightarrow{0C}}{3} \qquad \vec{w}_8 = \frac{\overrightarrow{0D}-\overrightarrow{0A}}{3}$$

Ecuación 7.

Entonces, el primer punto que se desea encontrar se obtiene del punto final del vector $\overrightarrow{0A}+\overrightarrow{w_1}$. Y así sucesivamente, como se muestra en la figura 6.b).

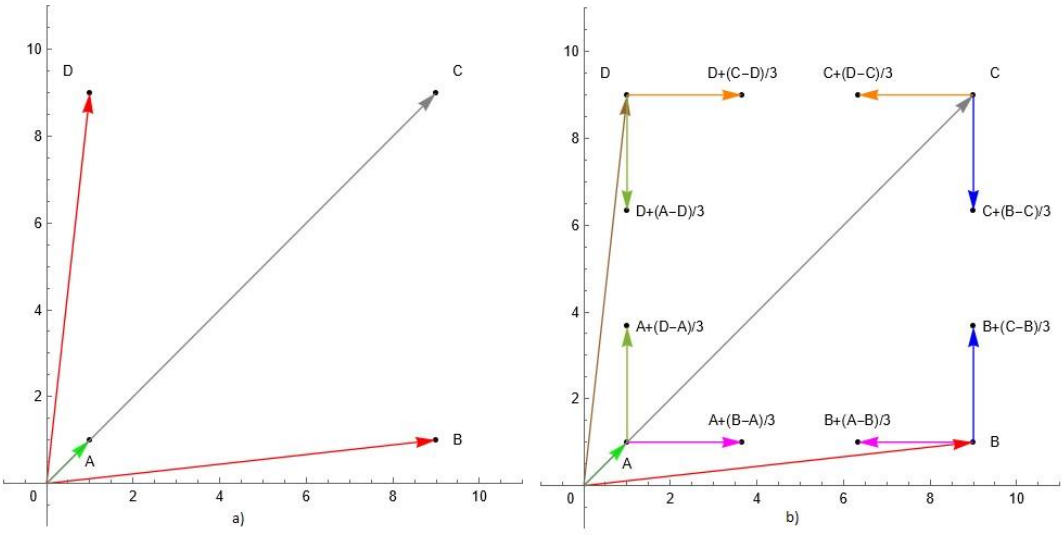


Figura 6 Calculo de un tercio de segmento

ISSN 2448 – 7945

Al obtener estos resultados, es posible generar los cuadrados en la figura 5.a) y 5.b); si se sigue este proceso con los 8 cuadrados exteriores, sucesivamente, después de hacerlo un número infinito de veces, se obtiene el cuadrado de la figura 5.c); o bien el "*Tapete de Sierpinski*".

Ahora, al tener en cuenta la información anterior y tomando los 4 puntos *A*, *B*, *C* y *D*; que son los puntos atractores para el Tapete. Y un punto fijo en el plano llamado P, como se muestra en la figura 7.a).

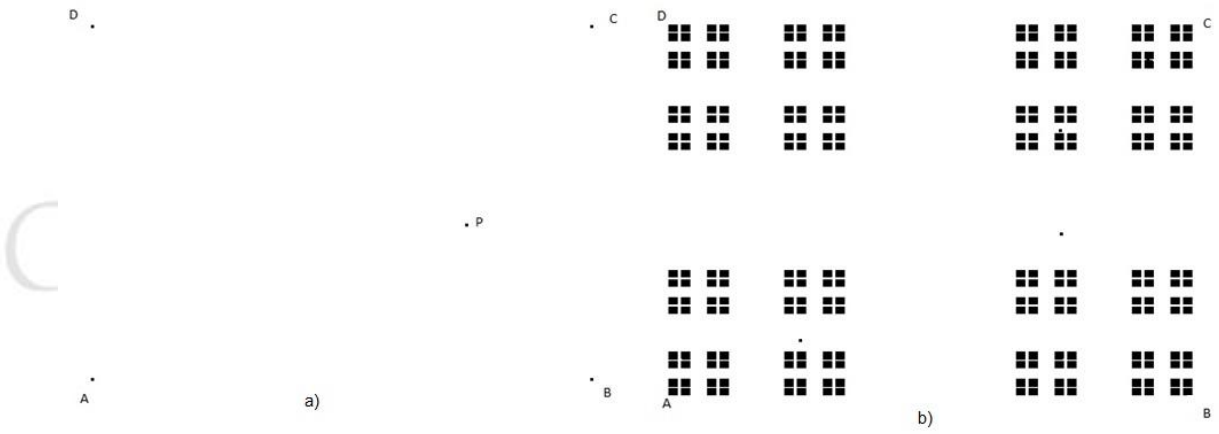


Figura 7. El tapete de Sierpinski con 4 puntos atractores

Para generar el Tapete de Sierpinski mediante puntos atractores se sigue el siguiente algoritmo:

Paso 1. Se toma un punto cual quiera de los 3 (*A*, *B* y *C*) aleatoriamente, y se toma al vector $\vec{w} = \frac{\overrightarrow{PX_i}}{3}$, para $\{X_1=A, X_2=B, X_3=C, X_4=D\}$.

Paso 2. Hacer que *P* sea igual al punto donde termina el vector $\overrightarrow{0P} + \vec{w}$.

Paso 3. Repetir paso 1 y 2, en este caso 10000 veces.

Al concluir con el algoritmo, se genera la figura 7.b).

Para generar la figura 5c) con puntos atractores, es necesario colocar cuatro puntos tractores, uno por cada par de vértices del cuadrado original. Lo cual se puede ver en la siguiente figura:

ISSN 2448 – 7945

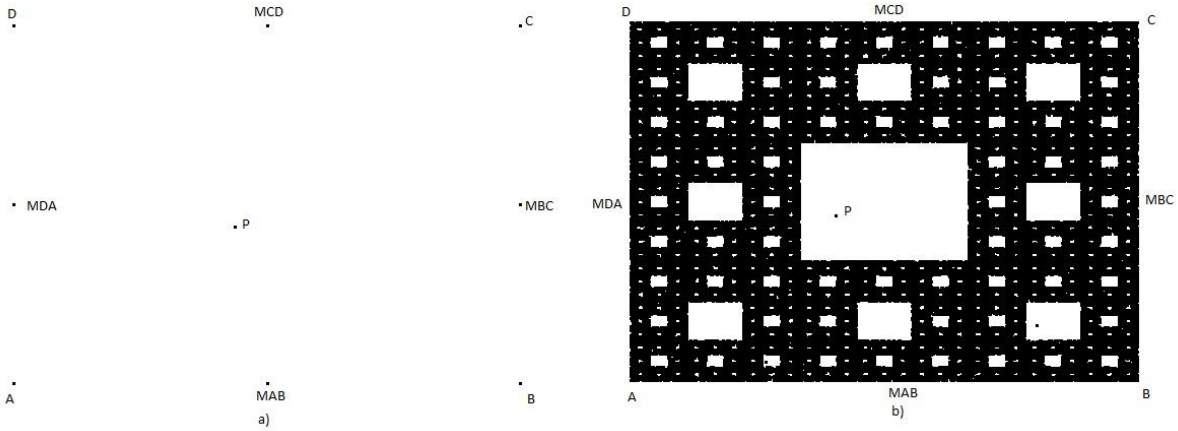


Figura 8. El tapete de Sierpinski con 8 puntos atractores

3. Resultados y análisis

Los fractales de Sierpinski se pueden visualizar mediante algoritmos basados en sistemas de funciones y puntos de atractores en combinación con algoritmos que programados con operaciones con vectores dirigidos.

4. Conclusiones

Una forma de visualizar a los conjuntos de fractales de tipo Sierpinski al utilizar operaciones con vectores dirigidos mediante sistemas de funciones y puntos de atractores, hacen que la geometría tenga una visibilidad mediante la matemática computacional al programar con algoritmos de tiempo de ejecución rápida.

5. Índice de referencias

- Caballero Martínez O. (2021). *Gráficos por Computadora usando JOGL*. México. FES Acatlán.
- C.L. Rodríguez. (2003). *Movimientos del atractor de un sistema iterado de funciones.* Monografía de grado, Licenciatura en Matemáticas, UIS, Bucaramanga.
- Arenas-Sabogal. (2008). *Una Introducción a la Geometría Fractal*, Universidad Industrial Santander.
- H. Mesa. (2001). *El triángulo de Sierpiński. Monografía de grado*, Licenciatura en Matemáticas, UIS, Bucaramanga.
- Arenas-Diaz G, (2009). Acerca del Triángulo de Sierpinski, Rev. Academia Colombiana de Ciencias Exactas, físicas y naturales, Vol 33. 1-8

ISSN 2448 – 7945

USO DEL ENFOQUE STEAM PARA MODELAR CON GRÁFICAS DE LABORATORIO VIRTUAL: LABU4

Lujambio Chávez Mariana[1*], Ortiz Marín Giovanni[2] y Lara Sáenz Noemí Ga[3]
[1,2 y 3]*Universidad Autónoma de Querétaro.*

EN-POSM104

Resumen

El enfoque STEAM (Science, Technology, Engineering, Art, Math) es cada vez más popular dentro de la didáctica y en particular la didáctica de las matemáticas, dónde una de la principal finalidad es transversalizar matemáticas, tecnología, arte y ciencias al desarrollar proyectos y actividades significativas para el estudiantado. En la experiencia didáctica que presentamos se realizó el ciclo de modelación matemática al aplicar las herramientas de la aplicación Lab4U cuando estudiantes de bachillerato la activaron durante los juegos mecánicos de un parque de diversiones, teniendo como resultados datos y gráficas de variables físicas que se pueden analizar con la finalidad de obtener aprendizajes significativos, planteados de la realidad de forma multidisciplinaria y con uso de la tecnología.

Palabras clave: *modelación, STEAM, gráficas, funciones, tecnología.*

1. Introducción

STEAM es un enfoque pedagógico, de pertinencia a nivel mundial, que por sus siglas en inglés (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemáticas) busca vincular dos o más de las áreas mencionadas. El enfoque STEAM ha representado un reto al ser introducido en las escuelas puesto que
"implica que los maestros planeen cuidadosamente las experiencias de enseñanza y aprendizaje a partir de los contenidos de ciencias y matemáticas que quieren introducir, utilizando la tecnología como una herramienta más del proceso de aprendizaje." (Ferrando; Hurtado; Beltrán;2018, pp.36).
Además, STEAM tiene la finalidad de propiciar un desarrollo integral del estudiantado considerando el mundo actual y los programas de desarrollo del país. El uso de la tecnología cuando se enseña con STEAM es fundamental por la pertinencia que tienen las aplicaciones y programas de computo en la modelación matemática. El mundo globalizado exige a las personas el manejo de herramientas tecnológicas, lo que justifica su uso en las escuelas.
El programa STEM Américas es implementado por la Fundación Panamericana para el Desarrollo (PADF), a partir de la metodología STEM se asocia con diferentes

1 *Autor para la correspondencia. E-mail: mariana.lujambio@uaq.mx Tel. 44-23-63-60-31.*

ISSN 2448 – 7945

empresas y corporaciones para promover y fomentar modelos de vida sostenibles y la competitividad educativa en Latinoamérica. En colaboración con LAB4 U, una empresa chilena que ha desarrollado una app para llevar al alcance de las y los estudiantes materiales y herramientas de calidad para aprender ciencias, el programa STEM Américas ofrece una convocatoria anual para implementar la tecnología STEM en el aula. Al ser beneficiados con este programa, es posible tener acceso a la aplicación para celular.

La Modelación Matemática es el proceso, estructurado y ordenado para partir de una situación real, que debe ser simulada con uso de la tecnología y a partir de los datos obtenidos se produzca un modelo matemático que explique lo mejor posible el contexto. Al respecto Muñoz (2014) comenta la posibilidad que ofrece la modelación matemática escolar en la comprensión del mundo que la rodea de tal forma que vean a las matemáticas de forma dinámica e inmersas en proceso y situaciones in situ, dándoles la posibilidad de incidir en el desarrollo de conceptos de una forma realista y auténtica.

De acuerdo con Molina (2017), la modelación matemática responde a las etapas clásicas del método científico: Observación, hipótesis, verificación y reajuste del modelo, conclusiones del problema.

Por su parte, los conocimientos de física sobre posición, rapidez y aceleración son primordiales en el estudio de la cinemática, y es intrínseca su relación matemática, siendo pertinente estudiarlos desde la interdisciplinariedad. Además, existe una gran importancia realizarlo con tecnología, dado que permite conectar a las y los estudiantes desde su experiencia y contexto. Así vislumbramos una oportunidad de realizar modelación de una experiencia atractiva para el estudiantado como lo es un viaje a un parque de diversiones, dónde las variables físicas mencionadas (posición, rapidez y aceleración), y muchas otras más, están presentes en los juegos mecánicos.

El objetivo de la presente experiencia didáctica consiste en mostrar los resultados de un proyecto áulico donde a partir de datos y gráficas obtenidas con la aplicación para celular Lab4U de las variables físicas medidas se podrá modelar con gráficas y por tanto hacer una interpretación de las magnitudes estudiadas.

2. Metodología o desarrollo

La experiencia didáctica se implementa en un grupo de 37 estudiantes de quinto semestre de bachillerato con edades entre 17 y 18 años, dónde colaboran de forma multidisciplinaria docentes de la materia de física II y Matemáticas V, esta última correspondiente a cálculo diferencial e integral.

El estudiantado realizó una serie de simulaciones en los juegos mecánicos del parque six flags México con la aplicación para celular Lab4U, la cual cuenta con una herramienta de rapidómetro, obteniendo así datos y gráficas de posición con respecto al tiempo y velocidad con respecto al tiempo Además de analizar con la herramienta del acelerómetro para obtener gráficas de aceleración con respecto al tiempo.

Con cada simulación se modelan 3 gráficas considerando que el objeto se mueve en el espacio, por lo que se entregan gráficas para los Ejes X, Y y Z.

ISSN 2448 – 7945

Las gráficas se comentaron en la clase de física, haciendo una reflexión en torno a las variables observadas, advirtiendo que ninguna de ellas es constante. Luego, en la clase de matemáticas se analizarán las gráficas entorno a la representación algebraica que pudieran representar y encontrando para cada grafica los máximos y mínimos de la función, esto en observancia con la gráfica, pues resulta complejo analizar algebraicamente la función.

La experiencia didáctica se desarrolló del 25 de octubre, día del viaje a six flags México, hasta el 10 de noviembre, posteriormente los resultados obtenidos fueron expuestos por las y los estudiantes en la jornada del saber, día donde se exponen proyectos académicos derivados de todas las materias, a finales de noviembre.

3. Resultados y análisis

Las y los estudiantes fueron capaces, con el docente como guía, de analizar el modelo gráfico simulado con la aplicación de Lab4U y propusieron el tipo de función aproximada a la gráfica y datos obtenidos. Además identificaron desde la aplicación los máximos y mínimos, reforzando la idea de dicho concepto.

Por su parte se expusieron los procesos y resultados a la comunidad estudiantil del plantel.

A continuación una de las gráficas obtenidas con la aplicación de Lab4 U, al activar la simulación en el juego mecánico El Joker, donde se puede ubicar uno de los máximos en la aceleración de 9.69 m/s^2 para el eje Z.

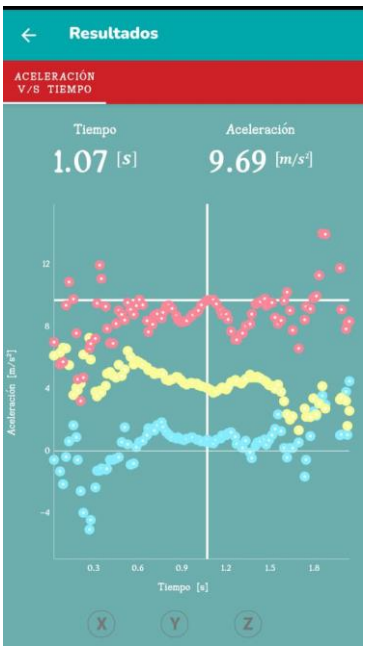


Figura 1. Simulación de juego mecánico "El Joker" X en azul, Y en amarillo y Z en rojo.

Se analizó en clase que la mayor variación en las aceleraciones es el Eje Z debido a que el juego da muchas vueltas estando sujeto al momento inercial.

ISSN 2448 – 7945

Otra gráfica con la que se pudieron realizar comentarios interesantes fue la siguiente, perteneciente al juego de las sillas voladoras.

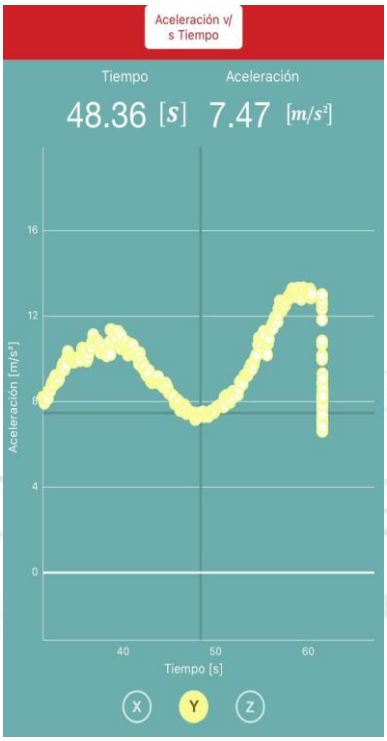


Figura 2. Simulación de juego mecánico "Sillas voladoras" ***Eje Y*** **en amarillo.**

Algunos estudiantes comentaron que podría modelarse con una alguna función trigonométrica, como seno y coseno por la repetición del ciclo casi con las mismas características. Además de poder observar un mínimo local de $7.47\ m/s^2$.

4. Conclusiones

La experiencia didáctica que compartiremos mostrará un proyecto que impacta directamente a los objetivos de las materias de física I y Matemáticas V, así como al desarrollo de competencias, habilidades y actitudes descritas en el programa y plan de estudios del bachiller donde se aplica. Transversalizando conceptos y conocimientos de ambas materias, con uso de la tecnología y de una forma que motiva a las y los estudiantes.

Una dificultad a la que nos enfrentamos fue la interpretación, y sobre todo la comprensión del análisis de cada gráfica por separado. Dado que la aplicación arroja una gráfica por cada eje (X,Y,Z), puesto que el objeto se mueve en el espacio, es importante que las y los estudiantes reconozcan la diferencia de estos ejes con los que se utilizan para graficar puntos de aceleración con respecto al tiempo y por tanto reconozcan que los máximos y mínimos no representan en la física las alturas, si no los momentos (en el tiempo) en que el carrito del juego aceleró más.

ISSN 2448 – 7945

Agradecimientos

El primer autor agradece a la fundación PADF por el apoyo otorgado para participar en programa STEM Americas.

5. Índice de referencias

Ferrando P., Hurtado S., y Beltrán M. (2018). Formación STEM en el grado de maestro: una experiencia docente. *@tic. revista d'innovació educativa*, 20, 35-42. DOI: https://doi.org/10.7203/attic.20.10946

Molina J. (2017). Experiencia de modelación matemática como estrategia didáctica para la enseñanza de tópicos de cálculo. *Uniciencia,* 2(31), 19-39. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.15359/ru.31-2.2

Muñoz, L., Londoño, S., Jaramillo, C., Villa-Ochoa, J.(2014). Contextos auténticos y la producción de modelos matemáticos escolares. *Revista Virtual Universidad Católica Del Norte*, (42), 48–67.

ISSN 2448 – 7945

PROPUESTA DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL INTERÉS COMPUESTO EN EL NIVEL BACHILLERATO

Vega Mondragón Luis Javier[1]* y Rodríguez Álvarez Cutberto[2]
[1 y2] *Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.*
Carr. Pachuca- Tulancingo s/n Col. Carboneras, CP 42184.

EN-POSM105

Resumen

La presente investigación se centra en el diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza del interés compuesto con el objetivo de apoyar la formación de profesores. La intención es que los conocimientos del profesorado se complementen y fortalezcan, fomentando la articulación con otros saberes. A través de una metodología cualitativa se busca respaldar la inclusión de referentes histórico-epistemológicos, la producción de una generalización para favorecer el razonamiento inductivo en los estudiantes y problemas contextualizados y articulados con otros saberes matemáticos dentro de la secuencia de aprendizaje. El diseño de la secuencia se fundamenta en un marco que toma elementos de la Teoría Antropológica de la Didáctica y aproximación teórica de la articulación de saberes matemáticos. Los resultados preliminares indican que algunos profesores no perciben la inclusión de referentes histórico-epistemológicos como esencial, mientras que otros encuentran desafíos al promover generalizaciones a partir de casos particulares. La mayoría de los profesores concuerda en que la inclusión de problemas contextualizados facilita la conexión del interés compuesto con situaciones de la vida cotidiana, permitiendo un aprendizaje más profundo. La articulación con otros saberes matemáticos se destaca como una estrategia valiosa, aunque algunos profesores enfrentan dificultades para llevarla a cabo.

Palabras clave: *articulación, saberes, secuencia, aprendizaje, interés compuesto.*

1. Introducción

Socialmente se reconoce la importancia de los conceptos que forman parte de la matemática financiera, específicamente, el interés compuesto. Esta importancia radica principalmente en que estos conceptos permiten modelar diferentes situaciones y fenómenos del ámbito financiero a gran escala, así como en situaciones de la vida cotidiana (Bocanegra et. al, 2013). A pesar de su relevancia, la enseñanza del interés compuesto en el nivel de bachillerato es limitada, lo que resulta en un conocimiento escaso sobre su génesis.

La falta de una transición clara y contextualización del interés simple al compuesto por parte de los profesores en las aulas, junto con la ausencia de referentes

[1] *Autor para la correspondencia. E-mail: ve477760@uaeh.edu.mx Tel. 55-13-19-32-12*

ISSN 2448 – 7945

epistemológicos y de articulación con otros saberes, contribuye a la presentación desarticulada y conceptualmente débil de estos temas (Rondero y Reyes, 2019). La formación docente actual se centra en competencias estudiantiles, descuidando la conceptualización histórica y el referente teórico de los saberes matemáticos, lo que afecta la calidad de la enseñanza.

Actualmente los planes de formación para el docente adolecen por la falta de conceptualización histórica y de un adecuado referente teórico de los saberes y los objetos matemáticos que coadyuven al profesor a la ampliación del Conocimiento Didáctico de Contenido (CDC), ya que se centran en el desarrollo de competencias en los estudiantes que en ocasiones no se pueden alcanzar, porque se mantienen vigentes los cursos basados en la mecanización y la memorización, minimizando el razonamiento lógico, el pensamiento creativo, la búsqueda de soluciones, la crítica y el procesamiento y análisis de la información (Montero et. al, 2015).

Incluir dentro de la enseñanza del interés compuesto los elementos históricos y epistemológicos le permitiría al estudiante conocer y valorar el sistema conceptual del cual somos herederos por parte de diferentes culturas ancestrales, y de siglos de historia de las matemáticas (Rondero, 2013). Un referente que puede sumarse a los referentes antes mencionados es la contextualización social de los saberes. Es importante ampliar la conceptualización de la matemática como una actividad humana asociada históricamente al devenir de las culturas ancestrales y a las sociedades actuales, como un lenguaje simbólico que es a su vez el lenguaje de la ciencia y un sistema articulado de conceptos.

La inclusión de referentes históricos de los objetos matemáticos en la enseñanza cobra relevancia cuando se busca observar cómo este sustento conceptual incide en el aprendizaje del alumno. Por lo anterior, este trabajo busca diseñar una secuencia de aprendizaje del interés compuesto para la formación del profesor de bachillerato en la cual se integren referentes histórico-epistemológicos, generalizaciones a partir de casos particulares y problemas del contexto real, con la idea de brindar un medio que facilite la comprensión y reconocimiento de aquellos aspectos históricos social y matemáticamente útiles y que deben ser del dominio y conocimiento del docente. brindar herramientas al docente para desarrollar estrategias de articulación con otros contenidos matemáticos, y ampliar su Conocimiento Didáctico de Contenido.

1.1. Marco conceptual

Con el propósito de respaldar la base teórica de este trabajo, se ha elaborado un marco conceptual (ver figura 1) que toma elementos de la aproximación didáctica de la Articulación de Saberes y del Enfoque Antropológico de la Didáctica de Chevallard (1999), también se emplean constructos como la alfabetización financiera y el Conocimiento Didáctico de Contenido (CDC) propuesto por Shulman (1986), el cual implica la comprensión de cómo determinados temas o problemas del contenido a enseñar se organizan, representan y adaptan a los diversos intereses y habilidades de los alumnos.

ISSN 2448 – 7945

La Teoría Antropológica de la Didáctica sitúa la actividad matemática, así como la actividad de estudio de las matemáticas, dentro del contexto más amplio de la actividad humana y las instituciones sociales (Chevallard, 1999). Al hacerlo, destaca la importancia de comprender las dinámicas sociales, culturales e institucionales que moldean la manera en que se enseña, se aprende y se aplica la matemática en diversos contextos educativos y sociales. Por otro lado, la articulación de saberes matemáticos implica la integración de conceptos y habilidades matemáticas con experiencias relevantes y significativas para los estudiantes. Este enfoque reconoce la importancia de conectar los conocimientos matemáticos no solo con otros saberes de la disciplina, sino también con contextos culturales y sociales, permitiendo una enseñanza más contextualizada y significativa (Rondero, 2013, p. 21). Al respecto, la NCTM (2000) indica que, si se adquiere una visión de las matemáticas como un todo conectado e integrado, disminuirá la tendencia a considerar por separado conceptos y destrezas.

El constructo del conocimiento didáctico de contenido, propuesto por diversas corrientes teóricas, destaca la importancia de comprender los procesos específicos de enseñanza y aprendizaje en disciplinas como las matemáticas, resaltando cómo los docentes transforman el contenido para que resulte accesible y comprensible para los estudiantes (Berry et al., 2016). La alfabetización financiera, por su parte, abarca más que la simple comprensión de términos financieros; implica poseer las habilidades necesarias para tomar decisiones informadas y reflexivas sobre presupuestos, ahorros, inversiones, créditos y planificación para el futuro económico.

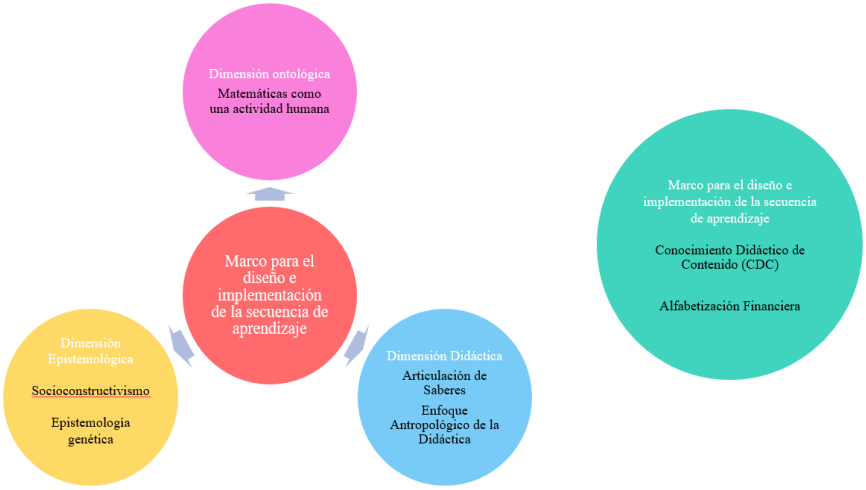


Figura 1. Representación gráfica del marco conceptual (elaboración propia)

2. Metodología o desarrollo

Se empleó una metodología cualitativa dividida en tres etapas. En primer lugar, se llevó a cabo una revisión y organización documental de tres libros de texto para

ISSN 2448 – 7945

identificar ausencias y presencias relevantes en la introducción o desarrollo del tema del interés compuesto. A continuación, se realizaron entrevistas semiestructuradas a cinco profesores de matemáticas financieras de nivel bachillerato con el objetivo de identificar sus percepciones sobre la integración de referentes histórico-epistemológicos, la inclusión de secuencias inductivas para el descubrimiento de fórmulas, la presentación de problemas contextualizados y la articulación con otros conocimientos matemáticos al abordar la enseñanza del interés compuesto. Finalmente, las categorías y referentes identificados se incorporaron en el diseño de la secuencia.

2.1. Revisión y organización documental

En el ámbito de la didáctica de la matemática, los libros de texto desempeñan un papel esencial en la enseñanza de diversos conceptos u objetos matemáticos, en el caso de la matemática financiera en el nivel bachillerato es una herramienta comúnmente utilizada por los profesores. De acuerdo con Rondero (2013), la presentación de los conocimientos en estos materiales carece, en muchas ocasiones, de un análisis detallado sobre su validez didáctica, incluyendo la consideración de los diferentes tipos de pensamiento matemático y las competencias necesarias para su comprensión.
Por ello, se realizará un análisis de tres libros de texto sugeridos por los profesores participantes con los cuales elaboran los materiales didácticos y extraen los ejemplos y ejercicios que se proponen en clase. Este análisis documental, mediante una configuración epistémica, permitirá identificar, organizar y registrar ausencias y presencias relevantes en la introducción y desarrollo de temas como el interés simple, progresiones aritméticas, progresiones geométricas y, con especial énfasis, el interés compuesto.

2.2. Entrevistas semiestructuradas

Se llevarán a cabo entrevistas semiestructuradas con profesores de bachillerato, con el propósito de explorar sus percepciones y prácticas en relación con la enseñanza del interés compuesto. Estas entrevistas proporcionarán información detallada sobre las estrategias utilizadas, las dificultades encontradas y sus percepciones con relación a la integración o la presencia de referentes histórico-epistemológicos, la implementación de secuencias inductivas para el descubrimiento de fórmulas, la aplicación de problemas contextualizados y las estrategias de articulación con otros saberes matemáticos. Para la recopilación de la información, se desarrollará una guía de entrevistas semiestructuradas que incluirá preguntas específicas relacionadas con las categorías descritas.
Para lograr una comprensión profunda y enriquecedora, se ha diseñado un protocolo de entrevista semiestructurada para guiar la exploración detallada de los enfoques didácticos de los profesores que aborda aspectos clave, los cuales se han establecido en categorías que encapsulan la esencia de cada pregunta. Estas categorías han sido identificadas como aspectos histórico-epistemológicos, el uso de una secuencia

ISSN 2448 – 7945

inductiva para hallar fórmulas, la articulación del tema de interés compuesto con otros saberes matemáticos y la inclusión de problemas contextualizados (ver tabla 1).

Tabla 1. Clasificación de las preguntas del protocolo de entrevista

Número de pregunta en la entrevista	Categoría de la pregunta
1, a, 2, b	Aspectos histórico-epistemológicos
3, a, b, c, d	Secuencia inductiva para hallar fórmulas
4, a, b, c	Inclusión de problemas contextualizados
5, a, b, c	Articulación de saberes matemáticos

2.3. Diseño de la secuencia didáctica

El diseño de la secuencia didáctica propuesta para la enseñanza del interés compuesto en el nivel de bachillerato se estructura con el objetivo principal de desarrollar estrategias efectivas que faciliten la comprensión profunda de este concepto matemático. La secuencia se organiza en sesiones específicas, cada una dirigida a alcanzar objetivos de aprendizaje particulares.

Tabla 2. Descripción de las sesiones específicas en la secuencia didáctica

Sesión	Objetivo de Aprendizaje	Descripción
1	Comprender los conceptos clave del interés compuesto	• Presentación teórica sobre el interés compuesto. • Discusiones sobre su importancia en la vida cotidiana. • Actividades prácticas para calcular el interés compuesto.
2	Explorar la importancia de los referentes histórico-epistemológicos	• Breve exposición sobre la evolución histórica del interés compuesto. • Discusiones grupales sobre la influencia de la historia en la comprensión actual.
3	Generalización mediante una secuencia inductiva o caso particular	• Introducción gradual de las fórmulas mediante una secuencia inductiva o un caso particular. • Ejemplos prácticos y resolución de problemas paso a paso. • Comprensión profunda de las fórmulas y conceptos asociados.
4	Articular el interés compuesto con otros saberes matemáticos	• Fortalecimiento de la comprensión y articulación de los contenidos matemáticos. • Ejemplos prácticos y ejercicios para ilustrar la relación entre el interés compuesto y la progresión geométrica y el crecimiento exponencial.
5	Aplicar el conocimiento del interés compuesto en situaciones del mundo real	• Presentación de problemas contextualizados proporcionados por profesores. • Discusiones en grupos sobre la aplicabilidad de los conceptos en contextos específicos.

ISSN 2448 – 7945

6	Evaluar la comprensión del interés compuesto y proporcionar retroalimentación	• Ejercicios y problemas para evaluar la comprensión de los estudiantes. • Retroalimentación grupal y revisión de los conceptos clave.
7	Reflexión sobre el aprendizaje y proponer mejoras a la secuencia de aprendizaje	• Reflexión grupal sobre la experiencia de aprendizaje. • Evaluación de la secuencia, identificación de áreas de fortaleza y propuestas de mejora.

3. Resultados y análisis

3.1. Revisión y organización documental

En los tres libros de texto analizados se remarcan y abordan los saberes matemáticos que sirven como conceptos previos para la comprensión del tema de interés compuesto, sin embargo, el referente histórico-epistemológico se ve muy reducido o nulo. Algunos utilizan secuencias inductivas para la obtención de fórmulas algebraicas requeridas para la solución algorítmica de los ejercicios y el uso de representaciones gráficas que otros no. Por otro lado, los libros presentan algunos problemas aplicados al mundo real, sin embargo, algunos se deben adecuar al contexto de los estudiantes para que se apropien de los significados, así como de los conceptos y el aprendizaje sea perdurable. Por lo anterior, los tres libros analizados se complementan, de alguna manera, en cuanto al contenido para la propuesta didáctica de esta investigación.

Tabla 3. Análisis de tres libros de texto de matemáticas financieras

Libro de texto	Tema consultado por el profesor	Aspectos histórico-epistemológicos	Secuencia inductiva para hallar fórmulas	Articulación de saberes matemáticos	Inclusión de problemas contextualizados
Fundamentos de Matemáticas Financieras (Molinares et al, 2009)	Interés simple e interés compuesto	No	No	Parcial: Crecimiento exponencial	No
Matemáticas Financieras (Villalobos, 2012)	Interés compuesto	Parcialmente	Sí	No	Sí
Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica (Swokowski y Cole, 2009)	Sucesiones aritméticas y geométricas	No	Sí	Sí	Sí

3.2. Entrevistas semiestructuradas

Las entrevistas realizadas a cinco profesores de bachillerato sobre la enseñanza del interés compuesto revelan una rica variedad de perspectivas, estrategias y experiencias. En este análisis, se centra en las diferentes respuestas proporcionadas por los profesores en cada sección de la entrevista, con el objetivo de comprender mejor sus enfoques pedagógicos y sus percepciones sobre este tema específico.
Los profesores entrevistados tienen diferentes niveles de experiencia en la enseñanza del interés compuesto, lo que se refleja en sus estrategias didácticas. Algunos profesores con más experiencia utilizan una combinación de enfoques tradicionales e

ISSN 2448 – 7945

innovadores, mientras que los profesores con menos experiencia tienden a inclinarse por un enfoque más tradicional.

Tabla 4. Análisis de respuestas de los profesores

Categoría	Profesor 1	Profesor 2	Profesor 3	Profesor 4	Profesor 5
Experiencia con el Interés Compuesto	10 años, enfoque tradicional e innovador	5 años, enfoque innovador	15 años, enfoque tradicional	2 años, enfoque innovador	8 años, enfoque equilibrado
Importancia de los referentes histórico-epistemológicos	Sí, para comprender el desarrollo y la relevancia del tema	No, no tiene claro lo que significa la parte epistemológica	No, no lo considera necesario pero la historia sí es importante	Sí, para contextualizar el tema	Sí, para fomentar el pensamiento crítico
Secuencias inductivas para el descubrimiento de fórmulas	No las utiliza, las considera complejas para los estudiantes	Sí, las utiliza para promover el pensamiento matemático.	No las utiliza, no tiene experiencia con ellas	No las utiliza porque les asigna un formulario	Las utiliza de forma ocasional, dependiendo del tema
Problemas contextualizados	Sí, los selecciona o diseña según las necesidades de los estudiantes	Sí, los utiliza para mantener el interés y la motivación	No los utiliza con frecuencia, prefiere un enfoque más teórico	Sí, los utiliza para facilitar la comprensión de los conceptos	Sí, los utiliza para conectar el tema con el mundo real
Articulación con otros saberes matemáticos	Sí, relaciona el interés compuesto con progresiones geométricas, ecuaciones exponenciales y logarítmicas	No, trata el tema de forma aislada	No lo considera necesario, se enfoca en el contenido básico	Sí, lo considera fundamental para una comprensión profunda pero no sabe cómo abordarlo	Sí, lo hace de forma gradual, adaptándose al nivel de los estudiantes

3.2.1. Aspectos histórico-epistemológicos

La epistemología en la enseñanza de conceptos financieros no resulta clara para muchos profesores, especialmente para aquellos que enfocan su atención en aspectos más técnicos de la asignatura. Estos educadores pueden no estar familiarizados con el concepto de *"referentes histórico-epistemológicos"*, lo que lleva a que no consideren su incorporación en la enseñanza del interés compuesto como una prioridad. La epistemología, en particular, puede parecer un término abstracto y menos directamente aplicable en contextos prácticos, generando un entendimiento no claro de este concepto.

Por otro lado, algunos profesores solo destacan que explorar la historia puede enriquecer la comprensión conceptual, mientras que otros consideran que este enfoque motiva a los estudiantes al mostrar la evolución del conocimiento.

3.2.2. Secuencias inductivas para el descubrimiento de fórmulas

No todos los profesores recurren a la generalización a partir de casos particulares para que los estudiantes descubran una fórmula y desarrollen un razonamiento inductivo. Algunos docentes perciben esta práctica como demasiado compleja para sus alumnos, temiendo que la demanda cognitiva pueda generar desinterés y frustración al no poder avanzar en la proposición de una conjetura. Mientras tanto, otros la consideran una

ISSN 2448 – 7945

herramienta valiosa para estimular el pensamiento crítico y la construcción del conocimiento.

3.2.3. Problemas contextualizados

La perspectiva de la mayoría de los profesores converge en la significativa importancia de incluir problemas contextualizados en la enseñanza del interés compuesto. Argumentan que estos problemas desempeñan un papel crucial al permitir que los estudiantes comprendan la aplicabilidad del tema en situaciones del mundo real, propiciando una conexión más directa con su entorno. Además, subrayan que la inclusión de problemas contextualizados contribuye a mantener el interés y la motivación de los estudiantes al mostrar la relevancia práctica del interés compuesto en su vida cotidiana. La confluencia de opiniones resalta la relevancia de este enfoque pedagógico y sugiere la necesidad de explorar más a fondo cómo los profesores implementan y perciben la integración de problemas contextualizados en sus prácticas docentes.

3.2.4. Articulación con otros saberes matemáticos

Los profesores expresan una variedad de opiniones en relación con la importancia de articular el interés compuesto con otros conceptos matemáticos. Por un lado, algunos docentes sostienen que esta articulación es fundamental para lograr una comprensión profunda del tema, argumentando que establecer conexiones con otros conceptos matemáticos enriquece la perspectiva del estudiante y fomenta una comprensión más holística. En contraste, hay profesores que la consideran como una necesidad más que como un aspecto fundamental, destacando que, si bien puede contribuir a una comprensión más completa, podría no ser esencial en todos los contextos educativos. Esta diversidad de perspectivas refleja la complejidad de la enseñanza del interés compuesto y la articulación con otros saberes matemáticos, evidenciando la necesidad de explorar en mayor profundidad las percepciones y enfoques individuales.

3.3. Secuencia didáctica para la enseñanza del interés compuesto

La construcción de la secuencia de aprendizaje incluye todas las categorías que están alineadas con la dimensión didáctica del marco de investigación. Estas categorías permiten el sustento conceptual de los saberes matemáticos, fomentan el razonamiento inductivo, facilitan la aplicación práctica del interés compuesto en diversos contextos y establecen la conexión entre distintos conceptos matemáticos. Además, contribuyen a la ampliación del Conocimiento Didáctico de Contenido (CDC) del profesor de matemáticas en el nivel de bachillerato. La implementación de esta secuencia busca que los estudiantes estén *alfabetizados financieramente*, es decir, que comprendan los conceptos financieros asociados con el manejo del dinero y la planificación financiera, sino que también promueve su aplicación práctica en situaciones de la vida cotidiana.

ISSN 2448 – 7945

La secuencia didáctica está diseñada para implementarse en siete sesiones de 60 minutos cada una. A continuación, se presenta la estructura de las tres primeras sesiones:

Tabla 5. Estructura de las tres primeras sesiones

SESIÓN 1	Descripción
Objetivo	Comprender los conceptos clave del interés compuesto.
Introducción	Presentación del tema y sus objetivos.
Exposición teórica	Definición y cálculo del interés compuesto.
Notas	• El interés compuesto se gana sobre el capital inicial y los intereses acumulados. • Se calcula multiplicando el capital inicial por una tasa de interés efectiva. • Puede generar un crecimiento exponencial del capital a largo plazo.
Discusión	Importancia del interés compuesto en la vida cotidiana.
Actividades sugeridas	• Proporcionar ejemplos del interés compuesto en ahorros, inversiones o préstamos. • Destacar casos cotidianos como cuentas de ahorro, tarjetas de crédito o inversiones.
Actividades prácticas	Interés compuesto en diferentes escenarios: • Ahorro: aproximar el interés compuesto y discutir su impacto en el crecimiento de los ahorros. • Inversión: aproximar el interés compuesto y compararlo con el escenario de ahorro. • Préstamo: explorar cómo el interés compuesto afecta el pago de intereses en un préstamo.
SESIÓN 2	**Descripción**
Objetivo	Explorar la importancia de los referentes histórico-epistemológicos del interés compuesto.
Introducción	Explicación de cómo la historia y el desarrollo histórico del interés compuesto han influido en su comprensión actual.
Breve exposición sobre la historia y evolución del interés compuesto	• Presentación de una breve línea de tiempo histórica del interés compuesto. • Destacar hitos importantes, contribuciones de matemáticos y momentos clave en su evolución.
Discusión guiada	Plantear preguntas que guíen la discusión, como: • ¿Cómo crees que se descubrió o desarrolló el concepto de interés compuesto? • ¿Cuál fue el papel de los matemáticos históricos en su comprensión? • ¿Cómo ha evolucionado la aplicación del interés compuesto a lo largo del tiempo?
Reflexión personal	Invitar a los estudiantes a reflexionar sobre cómo la historia influye en su comprensión individual del interés compuesto.
Conclusión	Recapitular las principales ideas discutidas durante la actividad.
SESIÓN 3	**Descripción**
Objetivo	Introducir gradualmente las fórmulas mediante una secuencia inductiva o caso particular.

Caso particular. Análisis de un caso concreto de inversión con interés compuesto y cálculo del interés y el monto final para diferentes periodos.

Caso sugerido:

• Invertimos $5,000 a una tasa de interés anual del 10%.
• El interés se capitaliza anualmente.
• Queremos calcular el valor de la inversión (M) después de 5 años.

Guiar la solución de modo que se dé oportunidad de identificar un patrón

Año 0: 5,000.00

Año 1: 5,000.00(0.10) (1) = 500.00

Año 2: (5,000.00+500.00) (0.10) (1) = 550.00

Año 3: (5,000.00+500.00+550.00) (0.10) (1) = 605.00

Año 4: (5,000.00+500.00+550.00+605.00) (0.10) (1) = 655.50

Año 5: (5,000.00+500.00+550.00+605.00+655.50) (0.10) (1) = 732.05

Total de interés: 500.00 + 550.00 + 605.00 + 655.50 + 732.50 = 3,052.55

Monto al final del periodo: 5000+3052.55 = 8052.55

Año	Capital inicial	Tasa de interés	Interés ganado	Monto final
0	$5,000.00	10%	$0	$5,000.00
1	$5,000.00	10%	$500.00	$5,500.00
2	$5,500.00	10%	$550.00	$6,050.00
3	$6,050.00	10%	$605.00	$6,655.00
4	$6,655.00	10%	$655.50	$7,320.50
5	$7,320.50	10%	$732.05	$8,052.55

ISSN 2448 – 7945

Generalización: La lógica de la tabla se puede generalizar para cualquier valor de capital inicial, tasa de interés, tiempo y frecuencia de capitalización. La fórmula que se propone se basa en la lógica de la tabla de amortización.

El capital final M se calcula multiplicando el capital inicial C por un factor que depende de la tasa de interés r, el tiempo t y la frecuencia de capitalización n. El factor se puede calcular como (1 + tasa de interés/frecuencia de capitalización)^(número de periodos de capitalización por año * número de años), es decir, $\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$

Así, la fórmula que resulta es: $M = C\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$

Donde:

M: monto final
C: capital inicial
r: tasa de interés anual
n: número de períodos de capitalización por año
t: número de años

Resolución de problemas	Ejercicios para comprender las fórmulas y conceptos asociados.
Análisis de diferentes casos	Cálculo del interés compuesto con diferentes periodos de capitalización, tasas de interés y montos iniciales.

Entre las actividades que se proponen para la sesión 4 para poder articular el interés compuesto con otros conceptos se encuentran las siguientes:

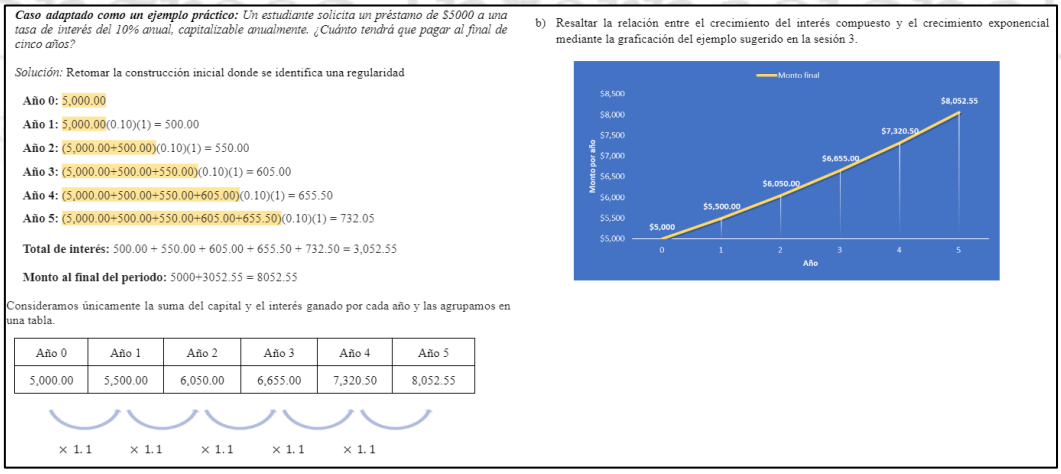


Figura 2. Actividades para articular el tema con la progresión geométrica (izquierda) y con el crecimiento exponencial (derecha)

Algunos problemas para la sesión 5 donde se pretende aplicar el conocimiento del interés compuesto en situaciones del mundo real son los siguientes:

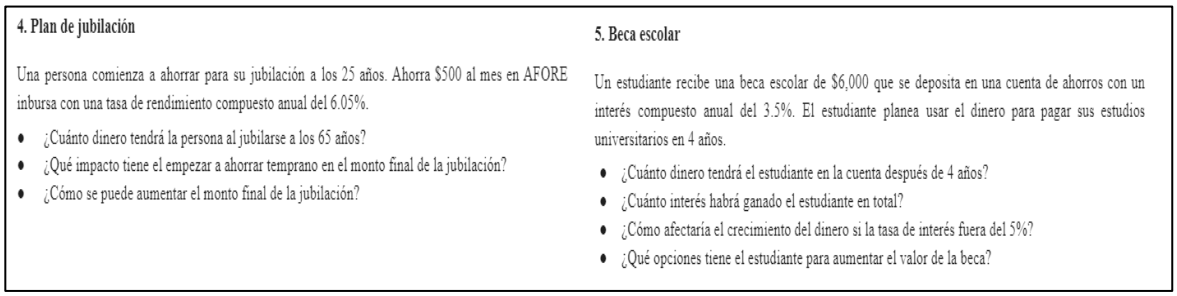
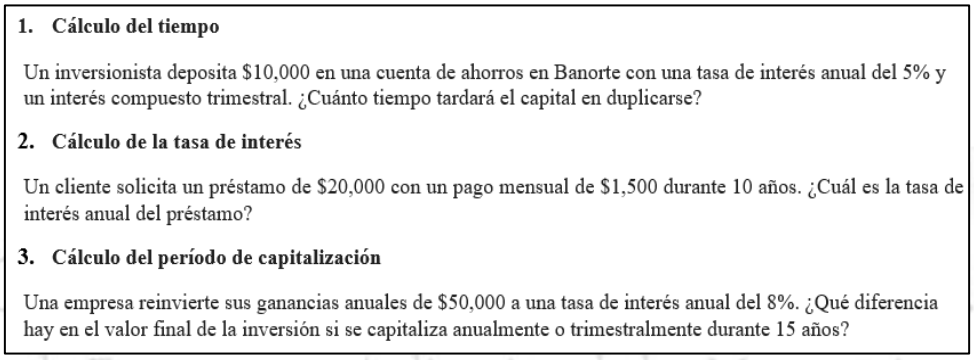


Figura 3. Ejemplos de problemas en la sesión 5 para aplicaciones en el mundo real

ISSN 2448 – 7945

Para la sesión 6 se propone una evaluación formativa mediante ejercicios y problemas. En este contexto, se recomienda al profesor sugerir problemas donde no sólo se calcule el monto sino todas las variables que intervienen en el desarrollo de estos problemas; el tiempo, la tasa de interés el periodo de capitalización y el capital inicial para reforzar la habilidad matemática fundamental que se aplica en muchas áreas, incluyendo las finanzas como es el despeje de variables de una ecuación. Se concluye con una sesión donde se evalúen preguntas de comprensión y finalmente una retroalimentación grupal y la revisión de conceptos clave.



1. **Cálculo del tiempo**

Un inversionista deposita $10,000 en una cuenta de ahorros en Banorte con una tasa de interés anual del 5% y un interés compuesto trimestral. ¿Cuánto tiempo tardará el capital en duplicarse?

2. **Cálculo de la tasa de interés**

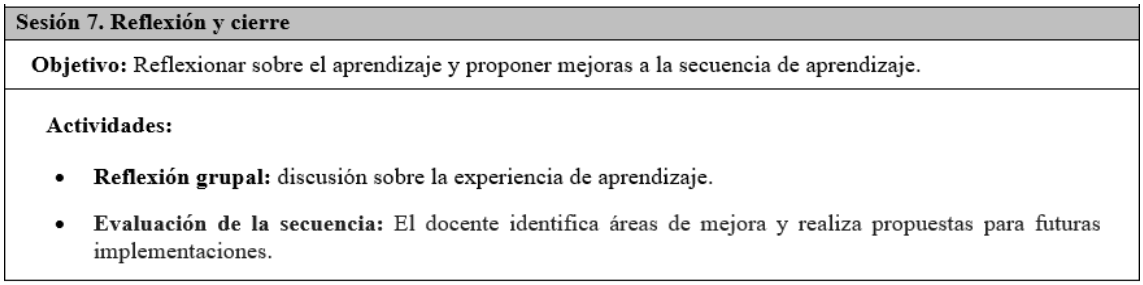
Un cliente solicita un préstamo de $20,000 con un pago mensual de $1,500 durante 10 años. ¿Cuál es la tasa de interés anual del préstamo?

3. **Cálculo del período de capitalización**

Una empresa reinvierte sus ganancias anuales de $50,000 a una tasa de interés anual del 8%. ¿Qué diferencia hay en el valor final de la inversión si se capitaliza anualmente o trimestralmente durante 15 años?

Figura 4. Ejemplos de problemas en la sesión 6 para despejar y calcular otras variables

Finalmente, para la sesión 7 se propone una reflexión grupal donde se discutan los aspectos más importantes sobre el aprendizaje. Posteriormente, el profesor deberá reflexionar sobre las fortalezas de la secuencia de aprendizaje e identificar las áreas de mejora para sugerir propuestas de diseño, inclusión o modificación de algún contenido en específico para las futuras implementaciones.



Sesión 7. Reflexión y cierre

Objetivo: Reflexionar sobre el aprendizaje y proponer mejoras a la secuencia de aprendizaje.

Actividades:

- **Reflexión grupal:** discusión sobre la experiencia de aprendizaje.
- **Evaluación de la secuencia:** El docente identifica áreas de mejora y realiza propuestas para futuras implementaciones.

Figura 5. Reflexión y cierre

4. Conclusiones

Las conclusiones del estudio destacan la inclusión del referente histórico-epistemológico en el aprendizaje como un elemento clave para lograr el sustento conceptual y la valoración de la historia de los conceptos y la disciplina que permiten una comprensión profunda del tema, contribuyendo así a una visión más integrada y holística del contenido. La generalización a partir de casos particulares en la

ISSN 2448 – 7945

enseñanza del interés compuesto ofrece múltiples beneficios. En primer lugar, esta estrategia promueve el pensamiento crítico al desafiar a los estudiantes a formular conjeturas y participar activamente en su proceso de aprendizaje. Además, al permitir que los estudiantes construyan gradual y significativamente su propio conocimiento, se fomenta un entendimiento más arraigado y duradero del interés compuesto. La implementación de secuencias inductivas para descubrir una fórmula también facilita la comprensión de las relaciones entre diferentes conceptos matemáticos. La contextualización emerge como un elemento clave para que los estudiantes aprecien la relevancia del conocimiento matemático en diversos escenarios de la realidad, mientras que la articulación con otros saberes matemáticos se presenta como un medio para reconocer a las matemáticas como un sistema articulado de conceptos.

En cuanto a las recomendaciones, se propone la implementación de la secuencia didáctica en diferentes contextos educativos, respaldada por el desarrollo de materiales didácticos complementarios que apoyen la estructura de la secuencia. Se destaca la importancia de proporcionar formación continua a los profesores, enfocándose en estrategias innovadoras para la enseñanza del interés compuesto. Además, se alienta a la comunidad académica a continuar investigando en el campo de la didáctica de la matemática, especialmente en aspectos relacionados con la enseñanza de temas financieros. A pesar de las limitaciones, se considera que este estudio ofrece una valiosa contribución al campo de la didáctica de la matemática, proporcionando una propuesta innovadora para la enseñanza del interés compuesto y promoviendo la alfabetización financiera entre los estudiantes de bachillerato.

Agradecimientos

Agradezco el apoyo al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnologías (CONAHCYT) por la beca otorgada para cursar el programa de Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica.

5. Índice de referencias

Libros

- Molinares, C., Barboza, M., Algarín, C., Meza, A. (2009). *Fundamentos de Matemáticas financieras*., Colombia: Universidad Libre Seccional Cartagena, GNÓSIS.
- Rondero, C. (2013). *Algunos elementos conceptuales sobre la formación de profesores*. México: Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo y Ediciones Díaz de Santos.
- Villalobos, J. L. (2012). *Matemáticas financieras 4 Edición*. Naucalpan de Juárez: Pearson Educación.
- Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2009). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, *12ª ed*. México: Edamsa Impresiones, SA de CV.

ISSN 2448 – 7945

Tesis

- Bocanegra, I., Galeano, D., Huérfano, H. (2013). *Diseño de una herramienta didáctica para la formación del profesor de matemáticas utilizando elementos históricos de lo logarítmico y lo exponencial.* Universidad Pedagógica Nacional, Colombia.

Revistas

- Berry, A., Depaepe, F., & Van Driel, J. (2016). Pedagogical content knowledge in teacher education. *International Handbook of Teacher Education: Volume 1*, 347 – 386.
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221 – 266.
- Montero, Y. H., Pedroza, M. E., Astiz, M. S., & Vilanova, S. L. (2015). Caracterización de las actitudes de estudiantes universitarios de Matemática hacia los métodos numéricos. *Revista electrónica de investigación educativa, 17*(1), 88 – 99.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for schoolMathematics.* Reston, Va.: NCTM.
- Rondero, C., & Reyes, A. (2019). Historia de las Matemáticas: incidencia en la formación de profesores. *In V Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática* (p. 39).
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher, 15*(2), 4-14.

Memorias del Congreso Internacional sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán
8 y 9 de mayo del 2024, Cuautitlán Estado de México
ISSN 2448 – 7945

CALCULAR ÁREAS ANALÍTICAMENTE POR EL MÉTODO DEL PRODUCTO VECTORIAL Y PROGRAMACIÓN JAVA

Zamora Cuapio Cándido [1, *], Casillas Flores Luis [2]
[1 y 2] *Instituto Tecnológico de Tlajomulco. Km 10 Carr. Tlajomulco, Cto. Metropolitano, Sur 45640, Tlajomulco de Zúñiga Jal.*

AP-POSM106

Resumen

El desarrollo temático del cálculo de áreas por producto vectorial en la asignatura de Calculo Vectorial en ingenierías causa dificultades en su estudio por la carencia de idealización geométrica y la aplicación del cálculo de estas áreas, idealizados mediante un modelo matemático y/o prototipo ingenieril representando regiones de análisis de esfuerzos y deformaciones nodales (vértices del triángulo) que ocurren en el área de una estructura y relacionadas con asignaturas como la estática, dinámica y mecánica tensorial, donde el objetivo es la representación y cálculo de las áreas o regiones triangulares en coordenadas rectangulares 3D. Para el cálculo analítico de estas áreas con los datos vectoriales (coordenadas) de un triángulo se utilizó el método de producto vectorial o producto cruz y programación Java de este algoritmo matemático y comparar los resultados con el cálculo de áreas en AutoCAD y gráficamente. Esta motivación de cálculo de las áreas con este método y relacionarse geométricamente con otras asignaturas de la parte ingenieril son de gran importancia en la comprensión del significado matemático en la ingeniería de forma tangible del cálculo de áreas y con una percepción más realista y aproximada de la realidad cuando se construyen estos modelos. Finalmente, se compararon los resultados del cálculo de áreas por el método analítico, programación Java, el software de AutoCAD y gráficamente, obteniendo resultados idénticos.

Palabras clave: *Cálculo Vectorial, producto vectorial, áreas, programación Java, AutoCAD, prototipo.*

1. Introducción

La enseñanza del cálculo vectorial en Matemáticas para el cálculo de áreas o regiones con el método de producto vectorial o cruz en ingenierías ha presentado generalmente la dificultad en su aprendizaje teórico y de comprensión de la asignatura, el cual tiene un campo amplio de aplicación ingenieril con las asignaturas de Ingeniería Civil y Mecánica, para obtener la magnitud física de esfuerzos en una región de un elemento estructural que puede ser representada en estudios de elementos finitos triangulares y en la Mecánica Tensorial. Esta dificultad para la comprensión del producto vectorial es por la carencia en la construcción de Modelos Matemáticos con el producto vectorial idealizando estructuras de aplicación ingenieril y así, observar de forma tangible el desarrollo matemático de la metodología del producto vectorial y su aplicación en la naturaleza de los sucesos o amenazas naturales. También se puede aplicar en estudios posteriores de la Ingeniería en Agronomía, para la identificación de vectores como la mosca blanca Bemisia tabaci (Gennadius) como plaga y vectora de virus en frijol común (Phaseolus vulgaris L.) y otros frutos vulnerables a este tipo de vectores.

[1*] *Cándido Zamora Cuapio. E-mail: candido.zc@tlajomulco.tecnm.mx Tel. 33 1608 5439, Numero. Institucional 33 29-02-11-30*

ISSN 2448 – 7945

Por la falta de idealización de áreas o regiones en estas estructuras frutales y su morfología que son sensibles en la parte protectora del fruto llamado pericarpio, sujeta a las acciones de viento y temperatura, lo cual puede generar problemas de anaquelado. Además, se puede ampliar este modelo matemático de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y esféricas y lograr una aproximación de la construcción de modelo más preciso o real en el estudio de regiones vulnerables a amenazas naturales. Por lo tanto, es de importancia el Método de producto vectorial para visualizarse físicamente mediante un prototipo representado por las coordenadas rectangulares construidas con vectores que representan la geometría de una región. Así, al generar modelos de prototipos matemáticos aplicados a las Ingenierías, motivarán el fomento de aprendizaje con una aproximación real. Y el estudiante sumará conocimiento significativo y cognitivo, entre la realidad y la idealización en la solución del modelo matemático aproximado de la naturaleza del problema. Así como los aprendizajes mediante estos modelos tendrá un fuerte impacto en la solución de problemáticas Ingenieriles, sujetos a la realidad. Y aun ir más al futuro, donde se fomente la Normatividad y Reglamentos, para lograr una estandarización en las diferentes áreas de Ingeniería. Finalmente, vincular este modelo de cálculo del producto vectorial con la programación JAVA, el software de AutoCAD y el Método gráfico, para el cálculo de áreas de un paralelogramo en la enseñanza Calculo Vectorial.

2. Metodología o desarrollo

El cálculo del producto vectorial tiene la propiedad de ser una herramienta fundamental en geometría, Ingeniería y física, ya que permite calcular áreas, volúmenes y momentos. Este método de producto vectorial está relacionado con el área del paralelogramo formado por dos vectores originales según Stewart J. (2012) "*La longitud del producto cruz a x b es igual al área del paralelogramo determinado por a y b" (p. 810)* como se muestra en la "Figura 1". En otras palabras, si tenemos los vectores $\vec{A}$, y $\vec{B}$ el módulo del producto cruz $\vec{A}x\vec{B}$ será igual al área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Esta propiedad es muy útil en geometría para calcular áreas de figuras planas, así como determinar el momento de inercia de objetos en física y es una operación esencial en el ámbito del espacio tridimensional.

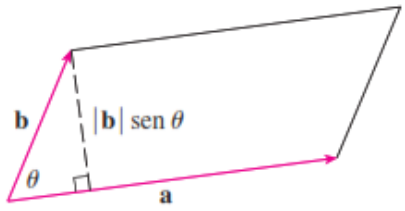


Figura 1. Si θ es el ángulo entre a y b (de modo que $0 \leq \theta \leq \pi$).

Para el cálculo de áreas en el espacio tridimensional se realiza utilizando matrices de dimensiones 3x3. Formándose un determinante utilizando las coordenadas de los

ISSN 2448 – 7945

vectores originales a, y b. Y su resultado representa el área de un paralelogramo en el espacio generado por esos vectores. Y se define por el producto de los vectores axb siendo este resultado otro vector que es perpendicular a “a”, y “b” como se observa en la “Figura 2”.

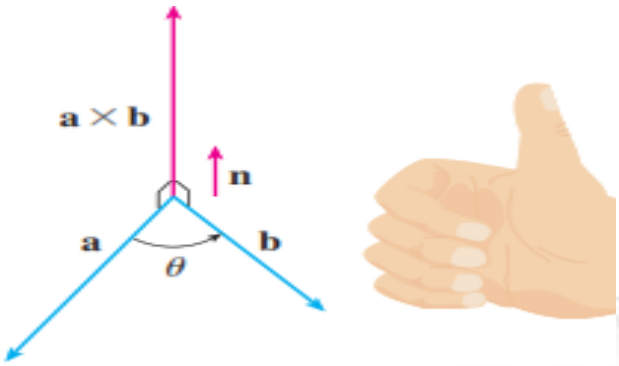


Figura. 2. Regla de la mano derecha da la dirección de axb.

Con base a lo anterior calculamos el área del paralelogramo mediante el producto vectorial de los vectores dados por: $\vec{A} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ y $\vec{B} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}$.

Se verifica el producto cruz de estos vectores para el cálculo del área del paralelogramo:

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}\hat{\imath} - \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix}\hat{\jmath} + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}\hat{k}$$

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}\hat{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}\hat{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\hat{k}$$

$$\vec{A}x\vec{B} = -22\hat{\imath} + 11\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

El área del paralelogramo con los lados adyacentes $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es la magnitud de este producto cruz.

$$A = \left\|\vec{A}x\vec{B}\right\| = \sqrt{(-22)^2 + (11)^2} = \sqrt{484 + 121} = \sqrt{605} = 24.5967477$$

$$A = 24.5967477\ \boldsymbol{u.a}$$

Para este caso de estudio sólo se utilizó la mitad del área del paralelogramo para construir físicamente el prototipo. Por lo que tenemos:

ISSN 2448 – 7945

$$A = \frac{24.5967477}{2} = 12.2984\ u.a.$$

$$A = 12.2984\ u.a.$$

2.1 Calculo de área con software de AutoCAD

Cálculo del área de los vectores $\vec{A} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ y $\vec{B} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}$ de la mitad del paralelogramo con el software de AutoCAD. Como se muestra en las "Figuras 3 y 4" y realizando el cálculo del área con el comando de área. Dando como resultado 12.2984 u. a.

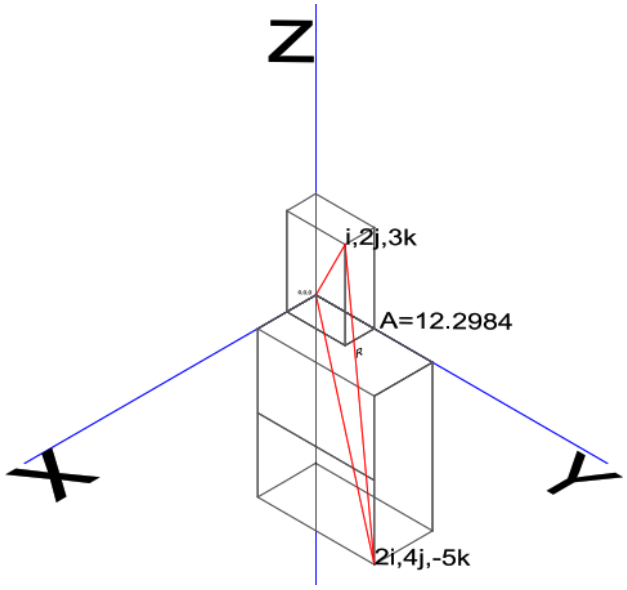


Figura 3. Dibujo en AutoCAD 3D.

ISSN 2448 – 7945

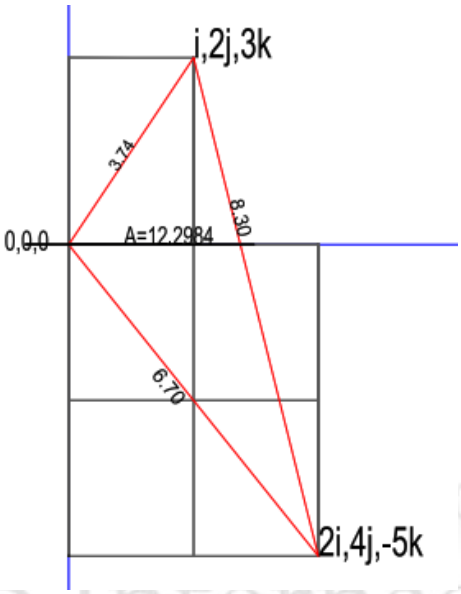


Figura 4. Perspectiva del paralelogramo en el plano YZ.

2.2 Construcción del Prototipo de los vectores

Se construyó el prototipo para el cálculo del área de la Figura.5 con la geometría de los vectores $\vec{A}$, y $\vec{B}$ dados por: $\vec{A} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ y $\vec{B} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}$. Y tomando en cuenta que en este modelo físico sólo se consideró la mitad del área del paralelogramo generado por el producto vectorial. Además, se tomó esta idealización triangular para modelar regiones triangulares de elementos discretos de elementos finitos y tensores de segundo orden según “Borisenko y Tarapov (1979, p.69)”. Así, tenemos que la mitad del área del paralelogramo físicamente está dada por: $\mathbf{12.2983\ u.a}$**. (Solo se considera la mitad del paralelogramo).**

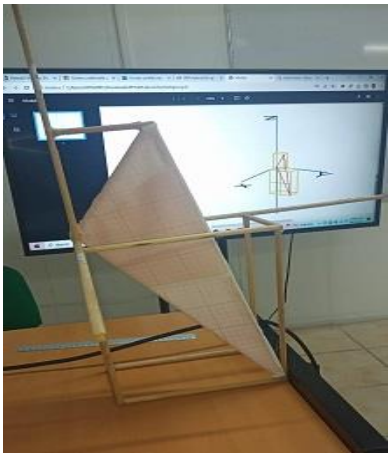


Figura 5. Prototipo de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

ISSN 2448 – 7945

2.3 Programación JAVA de los vectores

Se realizó el programa en código JAVA de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dados por: $\vec{A} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ y $\vec{B} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 5\hat{k}$. Para calcular la mitad el área del paralelogramo.

Código de Programación en JAVA de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

```
import java.util.Scanner;

public class calculovectores {

    public static void main(String[] args) {
        Scanner input = new Scanner(System.in);
        double[] vectorA = new double[3];
        double[] vectorB = new double[3];

        System.out.println("Ingresa las coordenadas para el vector A:");
        for (int i = 0; i < 3; i++) {
            System.out.print("Ingrese la coordenada " + (i + 1) + ": ");
            vectorA[i] = input.nextDouble();
        }

        System.out.println("Ingresa las coordenadas para el vector B:");
        for (int i = 0; i < 3; i++) {
            System.out.print("Ingrese la coordenada " + (i + 1) + ": ");
            vectorB[i] = input.nextDouble();
        }

        //Calcular el producto cruz de los 2 vectores
        double calculo_1 = +(vectorA[1] * vectorB[2] - vectorB[1] * vectorA[2]);
        double calculo_2 = -(vectorA[0] * vectorB[2] - vectorB[0] * vectorA[2]);
        double calculo_3 = +(vectorA[0] * vectorB[1] - vectorB[0] * vectorA[1]);

        //Mostramos el resultado de la suma de los calculos de arriba c1, c2 y c3
        System.out.println("Salida del producto vectorial: " + calculo_1 + "    " + calculo_2 + "    " +
calculo_3);

        //Calcular la raiz cuadrada del resultado de la suma de los 3 calculos
        double area = Math.sqrt(Math.abs(calculo_1 * calculo_1 + calculo_2 * calculo_2 + calculo_3 *
calculo_3));

        //Resultado
        System.out.println("El área total del paralelogramo formado por el vector A y B es: " + area);
        System.out.println("La mitad del area del paralelogramo es: " + area/2);
    }
}
```

ISSN 2448 – 7945

Resultado al ejecutar el código:

```
Ingresa las coordenadas para el vector A:
Ingrese la coordenada 1: 1
Ingrese la coordenada 2: 2
Ingrese la coordenada 3: 3
Ingresa las coordenadas para el vector B:
Ingrese la coordenada 1: 2
Ingrese la coordenada 2: 4
Ingrese la coordenada 3: -5
Salida del producto vectorial: -22.0    11.0    0.0
El área total del paralelogramo formado por el vector A y B es: 24.596747752497688
La mitad del área del paralelogramo es: 12.298373876248844
```

3. Resultados y análisis.

Los resultados calculados por el método de producto vectorial de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se validaron con la programación JAVA, AutoCAD y con el método grafico del prototipo construido físicamente de estos vectores y aplicando la fórmula para obtención del área del paralelogramo, resultando prácticamente iguales en los cuatro casos respectivamente.

4. Conclusiones

Se comprobaron los resultados esperados para el cálculo de la mitad del área del paralelogramo, siendo el área de un triángulo de acuerdo al modelo matemático de producto vectorial y su desarrollo analítico. Para realizar estudios futuros en los que se idealizaran elementos discretos con regiones triangulares y sus vértices llamados nodos.

5. Índice de referencias

- Stewart, J. (2012). *Cálculo de Varias Variables Trascendentes Tempranas.* México, D.F.: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.
- Borisenko A.I and Tarapov I.E. (1979). *Vector and tensor analysis with applications*. Dover publications, Inc. New York: Prentice-Hall.

ISSN 2448 – 7945

CORRELACIÓN LINEAL PARA OBTENER PARÁMETROS TERMODINÁMICOS DE LA ADSORCIÓN DE ESTRONCIO POR ELECTROCOAGULACIÓN

González Zamarripa Gregorio[1,*], Hernández Córdova Adriana [2], Aguilar Covarrubias Norma Araceli [3]

[1, 2 y 3]*Tecnológico Nacional de México: Instituto Tecnológico Superior de Monclova, Carr. 57 Km. 4.5, Col. Los 90, CP 25733 Monclova, Coahuila, México, Tel 8666490370. Ext 101*

AP-POSM107

Resumen

En este trabajo de investigación se implementa el diseño de un reactor electroquímico para remover estroncio proveniente de la Región Lagunera por el proceso de electrocoagulación utilizando electrodos de Hierro. Se utilizan conceptos básicos de Matemáticas, Física y Química para su aplicación en el modelo matemático de la isoterma de Langmuir. Se estudian las variables que más influyen como tiempo de residencia, concentración, tipo de electrodos, costo de energía y densidad de corriente para diseñar un estudio termodinámico donde se utiliza la isoterma de adsorción de Langmuir para determinar el modelo de correlación de los datos para obtener los parámetros termodinámicos como energía libre, entalpia y entropía. Paralelamente se caracteriza el lodo generado por difracción de Rayos X, para ver las fases presentes, Magnetómetro de muestra vibrante para obtener las propiedades magnéticas del material y Microscopia Electrónica de Barrido para ver la forma y tamaño de las partículas.

***Palabras clave*:** *Correlación, Langmuir, termodinámicos, caracterización*.

1. Introducción

La contaminación del agua por el Estroncio trae como consecuencia que la exposición a niveles altos de Estroncio puede alterar el crecimiento de los huesos. Existen técnicas para la adsorción de metales pesados en Hidróxidos metálicos producidos mediante medios electroquímicos (Vik et al.,1998), (por ejemplo, Electrocoagulación empleando electrodos de Fe o Al) o químicos (hidrólisis de $FeCl_3$) con facilidad de aplicación en tratamientos compactos, su relativo bajo costo y posibilidad de automatización (Moreno et al., 2007). La electrocoagulación presenta propiedades magnéticas con especies de Hierro impregnadas con Estroncio y permiten su uso o aprovechamiento económico, resultando por tanto una "tecnología limpia" (Scott, 1995). Las condiciones de operación de la Electrocoagulación son altamente dependientes de la composición química y del medio acuoso, especialmente en cuanto a pH y conductividad (Yousuf et al., 2004). Es importante el tipo de electrodo

[1] [*]*Autor para la correspondencia. E-mail: gregorio.gz@monclova.tecnm.mx Tel. 8666490370. Ext 101*

ISSN 2448 – 7945

a utilizar, tiempo de residencia, separación entre las placas y corriente suministrada. El fundamento teórico de la Electrocoagulación (Yousuf et al., 2004), consiste en que la precipitación se lleva a cabo al mismo tiempo que la desestabilización de coloides. Debido a esto se produce un desprendimiento de hidrógeno y oxígeno gaseoso en sus respectivos electrodos. Estos gases al ascender a la superficie provocan tres fenómenos (Matteson et al.,1995), 1) Separación rápida de coloides del electrodo, 2) Arrastre de coloides desestabilizados a la superficie formando lodos, posibilitando no sólo una extracción por sedimentación clásica, sino también, por flotación 3) Debido a las burbujas de gas se producen corrientes ascendentes y descendentes de la solución ocasionando una mejor superficie de contacto, provocando así un aumento en la eficiencia de desestabilización. Las reacciones químicas que ocurren en los electrodos se presentan a continuación, donde la generación de H_2 ocurre en el cátodo, y la de iones férricos o ferrosos y O_2 en el ánodo (Ibañez et al.,1995):

Ánodo:

Generación de iones metálicos

Ecuación 1. $4\,Fe_{(s)} \rightarrow 4\,Fe^{2+}_{(ac)} + 8\,e^{-} \qquad E^{0} = 0.45\ Volts$

El ion generado y el oxígeno disuelto reaccionan para formar Hidróxido Férrico

Ecuación 2. $4\,Fe^{2+}_{(ac)} + 10\,H_2O_{(ac)} + O_{2(g)} \rightarrow 4\,Fe(OH)_{3(s)} + 8\,H^{+}_{(ac)}$

Cátodo: Evolución de hidrógeno

Ecuación 3. $8\,H^{+}_{(ac)} + 8\,e^{-} \rightarrow 4\,H_{2(g)} \qquad E^{o} = 0.0\ Volts$

Global

Ecuación 4. $4\,Fe_{(s)} + 10\,H_2O_{(ac)} + O_{2(g)} \rightarrow 4\,Fe(OH)_{3(s)} + 4\,H_{2(g)}$

Algunos investigadores (Pretourius et al., 1991) han sugerido que la fase de la Magnetita puede ser formada a partir de la formación del Fe(OH)3(s), el cual en un paso subsiguiente puede ser reducida en el cátodo para formar Magnetita, el mecanismo de la reacción se puede expresar por la siguiente reacción:

Ecuación 5. $3\,Fe(OH)_{3(s)} + H^{+}_{(ac)} + e^{-} \rightarrow Fe_3O_{4(s)} + 5\,H_2O_{(ac)}$

Al utilizar electrodos de Fe, se generan iones $Fe^{3+}_{(ac)}$, por la oxidación electroquímica e inmediatamente sufren más reacciones espontáneas para formar iones monoméricos y complejos (Jiang et al., 2001).

ISSN 2448 – 7945

2. Metodología

Dentro de la metodología del proyecto se llevó a cabo mediante el siguiente esquema las actividades realizadas (Figura 1):

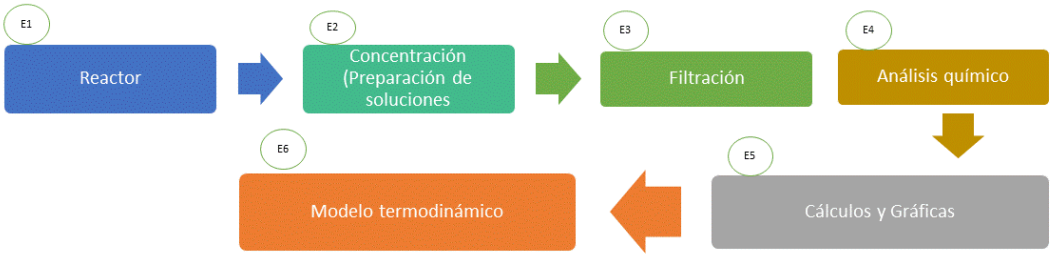
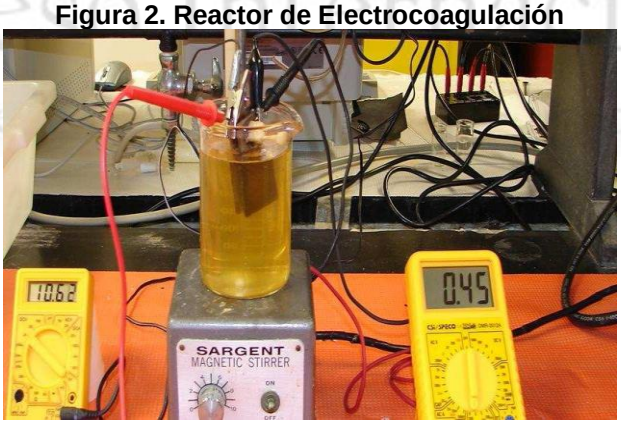


Figura 1. Metodología utilizada

E1: En esta etapa se realizó el montaje experimental (Figura 2):

Figura 2. Reactor de Electrocoagulación



*Nota: R*eactor utilizado para la remoción de Estroncio.

E2: En esta etapa se realizaron las mediciones de concentraciones iniciales y finales de proceso de remoción de estroncio a un tiempo de residencia de 30 min. y tres diferentes temperaturas de 25°C y 35°C y 40°C, como se muestra en la tabla 1:

Tabla 1.- Remoción de las muestras de agua contaminada con Estroncio

n	Temperatura: 25°C			Tempera-tura: 35°C	Temperatura: 40°C	
	C_{oSr}(mg/L) Conc. Inicial	C_{eSr}(mg/L) Concentración a los 30 m.	C_{eSr}(mg/L) Conc. inicial	C_{eSr}(mg/L) Conc. a los 30 m.	C_{eSr}(mg/L) Conc. inicial	C_{eSr}(mg/L) Conc. a los 30 m.
1	1.14	0.0056	1	0.004	1	0.03
2	1.18	0.043	2	0.03	3	0.05
3	1.25	0.058	5	0.32	5	0.38
4	10	0.588	10	0.45	10	0.52
5	20	1.545	20	1.38	25	0.73
6	40	3.826	40	3.25	40	0.79
7	50	5.211	50	7.34	50	0.85

ISSN 2448 – 7945

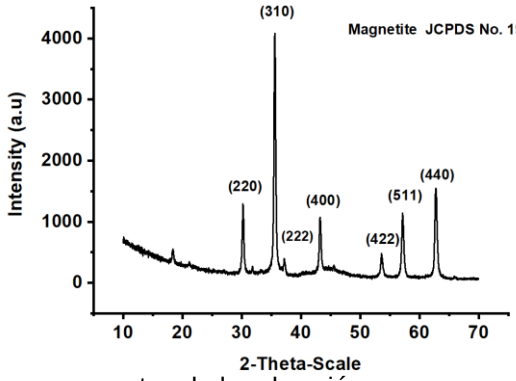
8	60	12.549	60	8.95	60	0.92

Nota: Datos experimentales de la emoción de agua contaminada con Estroncio con un tiempo de 30 minutos de tratamiento a 25°C, 35°C y 40°C.

3. Resultados y análisis

E3: La etapa posterior se realizó el estudio, Difracción de Rayos X (DRX) y Microscopio Electrónico de Barrido (MEB) para caracterizar los productos sólidos generados en la celda de EC, utilizando electrodos de Hierro. Los patrones de difracción para las muestras de Estroncio fueron obtenidos un difractómetro Phillips modelo X-PERT, mediante el software PC-APD 2.0 para Windows. La grafica se obtuvo utilizando el Software Origin 2018. La fase principal del polvo obtenido por electrocoagulación fue magnetita como se muestra en la figura 3.

Figura 3. Difractógrama Rayos X de polvo precursor.

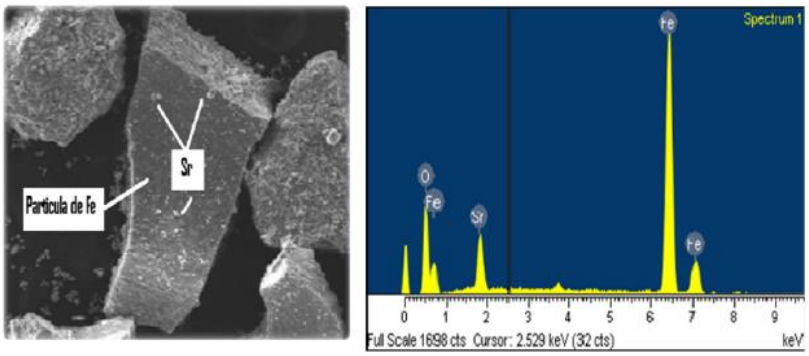


Nota: Fases presentes de la adsorción

Las especies identificadas fueron Magnetita y Magemita. El Microscopio Electrónico de Barrido utilizado para llevar a cabo la caracterización de la muestra es marca FEI Quanta 2000 (Oxford Instruments). La figura 4 es una micrografía que muestra las partículas porosas de Hierro revestida con Estroncio, el tamaño de partícula es de aproximadamente 250 µm, el microanálisis hecho con energía dispersiva de Rayos X (EDX), nos confirma la presencia de Fe y Estroncio.

ISSN 2448 – 7945

Figura 4. Micrografía de partículas de especies de Hierro impregnado con Estroncio (MEB)



Nota: Análisis de Rayos de Energía Dispersiva (EDX) muestran que la superficie esta revestida con Estroncio adsorbido durante la Electrocoagulación

E4: De acuerdo con los análisis químicos se escriben las ecuaciones que se utilizan para el cálculo de los parámetros termodinámicos a saber m y N, descritas a continuación:

La cantidad de Estroncio adsorbido sobre especies de Hierro en equilibrio *N* (mg/g) medio de la relación (Adamson, 1995):

Ecuación 6. $$N=\frac{(C_0\text{-}C)V}{m}$$

Donde C_0 y C (mg/L) son las concentraciones de la fase liquida del Estroncio inicial y en equilibrio, respectivamente, V es el volumen de la solución (L) y m es la masa del adsorbente utilizado, en este caso el Fe disuelto de la electrocoagulación). La relación entre la corriente eléctrica (Amp.), la masa (m) disuelta (g) y el tiempo de residencia se deriva a partir de la ley de Faraday (ec 7). (Donini et al., 1994):

Ecuación 7. $$m=\frac{itM}{nF}$$

La capacidad de adsorción calculada N en función de la concentración de equilibrio del adsorbato para el Estroncio es la ecuación 8. La isoterma de Langmuir se emplea para describir la adsorción en equilibrio del sistema (Tuvert y Talanquer, 2000).

Ecuación 8. $$N=\frac{N_{max}K_L\,C}{1+K_L C}$$

Donde N es la cantidad de Estroncio adsorbido sobre las especies de Hierro en equilibrio (mg/g), es la cantidad de adsorción máxima que el adsorbato cubre la capa monomolecular sobre la superficie (mg/g), *C* es la concentración en equilibrio de los iones metálicos en la solución en equilibrio y K_L es la constante de Langmuir (L/mg).

ISSN 2448 – 7945

E5: Gráficos y cálculos para determinar el valor de Nmax y K_L como sigue: Los resultados experimentales a temperaturas de 25°C, 35°C y 40°C para calcular la masa m con la ecuación (7), el valor de N con la ecuación (8) se muestran a continuación en la tabla 2, donde al graficar C/N en función de C en el software NCSS Statistics versión 25, se obtienen las correlaciones lineales a las temperaturas mencionadas.

Tabla 2. Valores experimentales para determinar parámetros termodinámicos

n	Temperatura: 25°C C/N= 0.015 C + 0.0117, R^2 = 0.9854				Temperatura: 35°C C/N= 0.017 C + .0139, R^2 = 0.9789				Temperatura: 40°C C/N= 0.0153 C + .0185, R^2 = 0.9641			
	I	m(g)	N	C/N	I	m(g)	N	C/N	i	m(g)	N	C/N
1	0.41	0.11	3.6	0.001	0.4	0.14	2.5	0.00	0.34	0.12	2.9	0.01
2	0.44	0.12	3.3	0.013	0.42	0.15	4.7	0.01	0.44	0.16	6.7	0.01
3	0.49	0.13	3.1	0.019	0.45	0.16	10.5	0.03	0.49	0.17	9.5	0.04
4	0.54	0.15	22.6	0.026	0.51	0.18	18.8	0.02	0.52	0.18	18.3	0.03
5	0.7	0.19	34.2	0.045	0.68	0.24	27.5	0.05	0.73	0.25	32.4	0.05
6	0.75	0.20	62.4	0.061	0.72	0.25	51.3	0.06	0.79	0.28	46.7	0.07
7	0.9	0.24	64.2	0.081	0.81	0.28	53.0	0.14	0.85	0.30	53.3	0.09
8	1	0.27	61.3	0.205	0.95	0.33	54.0	0.17	0.92	0.32	57.0	0.14

Nota: Ecuaciones lineales de la isoterma de Langmuir. Dónde: n= muestra, i= corriente, N= (mg/g)

La ecuación (8) se linealiza por medio de:

Ecuación 9. $$\frac{C}{N} = \frac{1}{N_{max} K_L} + \frac{C}{N_{max}}$$

Esta ecuación es la isoterma de Langmuir, la gráfica del cociente C/N como función de la concentración de equilibrio C da una línea recta de pendiente 1/Nmax que se iguala a los valores de .015,.017 y .0153 para obtener los valores de N_{max} de 66.67,58.82 y 65.35 mgSr/gFe respectivamente mientras que con la ordenada al origen de cada Temperatura 0.0117,0.0139 y 0.0185 se iguala a 1/*KN*max para obtener despejando la constante de Langmuir a saber 1.28,1.22 y 1.20 L/mgmol respectivamente como se muestra en la tabla 2. La tabla 3 muestra los resultados de la regresión lineal. El valor de N_{max} indica la cantidad máxima de Estroncio que se puede adsorber en un gramo de especies de hierro. El valor de K_L es el valor de la constante de Langmuir.

Tabla 3 Valores experimentales

T (K)	Nmax(mgSr/gFe)	K_L(L/mgmol)
298	66.67	1.28
308	58.82	1.22
313	65.35	1.20

Nota: Valores experimentales de N_{max} y K_L.

E6: Para finalizar, se calculan los parámetros termodinámicos como el cambio en

ISSN 2448 – 7945

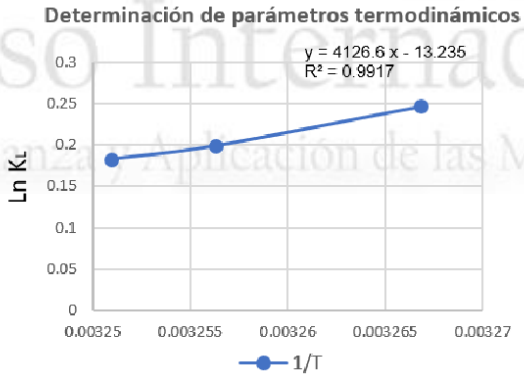
la energía libre de Gibbs (ΔG°), la entalpía (ΔH°) y la entropía (ΔS°) se determinaron utilizando las ecuaciones 10 y 11 (Partha et al., 2016), donde la ecuación 10 además se multiplica por mil por la conversión de miligramos a gramos:

Ecuación 10. $\Delta G^{0} = -RT\, Ln K_L(55.5)$

Ecuación 11. $\ln K_L = \frac{\Delta S^{0}}{R} - \frac{\Delta H^{0}}{RT}$

Donde R es la constante de los gases 8.31 J/mol K, T(K) es la temperatura absoluta. La figura 5 se obtuvo utilizando el software NCSS Statistic versión 25 en el cual se graficó Ln K_L contra 1/T para determinar los parámetros termodinámicos del proceso igualando la pendiente 4126.6 a -ΔHº /RT y despejar ΔHº para calcular la entalpia análogamente para calcular la entropía se iguala ΔSº /R a -13.23 y despejamos ΔSº.

Figura 5. Determinación de parámetros termodinámicos



Nota: Valores de energía libre, de Gibbs, Entalpia y Entropía.

La tabla 4 muestra el valor negativo de ΔGº que se calcula con la ecuación (10), tomando un promedio -28.33 kJ/mol de los 3 valores calculados -27.66, -28.46 y -28.88 kJ/mol indica que la adsorción de Estroncio sobre Fe por electrocoagulación es un proceso espontáneo. El valor negativo de ΔHº representa un proceso exotérmico y sugiere que ocurre una fisiadsorción de acuerdo con el calor liberado entre -20 y -40 KJ/mol (Mittal et al., 2007). El valor positivo de ΔSº muestra el aumento en la aleatoriedad de la interfase sólido-solución durante el proceso de adsorción.

Tabla 4. Parámetros Termodinámicos de la adsorción de Estroncio

ΔH_{ads} *(kJ/mol)*	ΔG_{ads} *(kJ/mol)*	ΔS_{ads} *(kJ/mol $\cdot$ K)*
-34.29	-28.33	109.94

Nota: Parámetros Termodinámicos de la adsorción de Estroncio sobre especies de Hierro.

4.Conclusiones

ISSN 2448 – 7945

La remoción de los iones Estroncio por el proceso de Electrocoagulación fue de 99%. Se obtuvieron valores de los parámetros termodinámicos: ΔG_{ads}= -28.33 kJ/mol, ΔH^o= -34.29 kJ/mol y ΔS^o=109.94 kJ/mol K. El valor negativo de ΔG° indica que la adsorción de Estroncio sobre especies de Fe es espontánea, el valor negativo de ΔH° representa un proceso exotérmico y sugiere que ocurre una fisiadsorción. El valor positivo de ΔS^0 muestra el aumento en la aleatoriedad de la interfase sólido-solución durante el proceso de adsorción. El Difractógrama muestra la presencia de Magnetita como la fase dominante. Las micrografías analizadas en el MEB muestran el Fe impregnado con Estroncio y un tamaño de partícula de 250 micras.

5. Índice de referencias

- Adamson, A. (1995). Physical Chemistry of Surfaces. USA: John Willey and Sons.
- Donini, J.C.& Szynkarczuk, J. (1994). The operating cost of Electrocoagulation, Can. J. Chem. Eng. 72, 1007–1012.
- Ibáñez, J.G.& M.M. Szafran (1995). Laboratory Experiments on Electrochemical Remediation on the Environment Part 4: Color Removal of Simulated Waste Water by Electrocoagulation-Electroflotation, J. Chem. Educ. 75, 1040-1041.
- Jiang, J.Q.& Gram, N. (2001). Laboratory study of electro- coagulation-flotation for water treatment, Water Research 36, 4064-4078.
- Matteson, M.J.&R.L. Glenn. (1995). Electrocoagulation and separation of aqueous suspensions of ultrafine particles, Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects 104 (1),101-10.
- Mittal, A. &Malviya, A. (2007). Studies on the Adsorption Kinetics and Isotherms for the Removal and Recovery of Methyl Orange from Wastewaters Using Waste Materials, Journal of Hazardous Materials 148, 230-232.
- Moreno, H.A.& Cocke, D.L. (2007). Electrocoagulation mechanism for COD removal. Sep. Purif. Technol. 56, 204– 211.
- Partha, S& Gupta, A. (2016). Determination of Thermodynamic parameters from Langmuir isotherm constant revisited, Journal of Molecular Liq. 225, 137-146.
- Pretorius, W.A. & Johannes, W. (1991). Electrolytic iron flocculant with a bipolar electrode in series arrangement, Water SA, 17 (2), 133–138.
- Scott, K. (1995) Electrochemical Processes for Clean Technology, The Royal Society of Chemistry, Cornwall, pp- 23-24.
- Tuvert, I. &Talanquer V. (2000). Sobre Adsorción, Para Saber, Experimenter y Simular, Facultad de Química, UNAM, vol. 6, pp.186-190.
- Vik, E.A. &Carlson, D.A. (1998) Electrocoagulation of potable water, Water Res. 18(11),1355–1360.
- Yousuf, M &Mollah, A.R. (2004) Fundamentals, present and future perspective of Electrocoagulation, Journal of Hazardous Materials B (114),199-210.

ISSN 2448 – 7945

OPTIMIZACIÓN DE UN TANQUE ABIERTO COMO UN PROBLEMA GEOMÉTRICO DE APLICACIÓN DE LA DERIVADA

Contreras Espinosa José Juan[1 *], Hernández Castillo José Luz [2] y Mata Vargas Iván Noe[3]
[1,2 y 3] *Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. Carretera Cuautitlán-Teoloyucan Km. 2.5, San Sebastián Xhala54714 Cuautitlán Izcalli, Edo. de Méx.*

EN-POSM115

Resumen

Con este trabajo se deja ver claramente una de las aplicaciones fundamentales del cálculo diferencial e integral, referente al tema de máximos y mínimos como una aplicación real, en el diseño de un tanque cilíndrico circular recto de almacenamiento de aceite o de cualquier fluido que se deseara. La solución se obtiene con el criterio de la segunda derivada para observar la bondad y rapidez de este criterio, si $f''(x) \neq 0$.

Palabras clave: *Ingeniería, matemáticas, optimización, derivada, software, enseñanza.*

1. Introducción

En la ingeniería es muy frecuente interesarse en los valores máximos y mínimos relativos de una función; en la realidad, una compañía siempre le va a beneficiar maximizar sus ganancias a la vez que minimiza los costos en la fabricación del algún producto. Observe que todas las latas que contienen, por ejemplo, 12 oz de alimento (355 ml) tienen el mismo aspecto físico. El hecho de que todas las latas de un volumen específico tengan la misma forma (mismos radio y altura) no es coincidencia, puesto que hay dimensiones específicas que minimizan la cantidad de metal usado y, entonces, reducen los costos de construcción de la lata a una compañía embotelladora. Esto no es tan simple como el que una empresa copie el éxito de otra empresa, sino, en vez de ello, que un gran número de ingenieros buscan el diseño que minimice la cantidad de material usado. (Zill,2011,p.235).

En general, la función que describe la cantidad que se quiere optimizar, al encontrar su valor máximo o mínimo, la definiremos como función objetivo. Una relación entre las variables en un problema de optimización (principalmente está relacionada con algún valor fijo o constante) se le denominara función restricción. La restricción es la que va a facilitar la eliminación de una de las variables en la construcción de la función objetivo, así también, impone una limitación sobre la forma en que las variables pueden modificar en la realidad.

[1] * *Autor para la correspondencia. E-mail: jjuncon@unam.mx Tel. 55-56-23-18-90*

ISSN 2448 – 7945

2. Metodología o desarrollo

Se quiere diseñar un tanque de forma cilíndrica circular recto de almacenamiento de aceite, se cuenta con 200 m^2 de lámina, ¿Cuáles serán las dimensiones de dicho tanque para que se pueda almacenar el máximo volumen de aceite? Nota: el tanque no tiene tapa ver figura 1. No tomar en cuenta el espesor del corte ni el desperdicio de material.

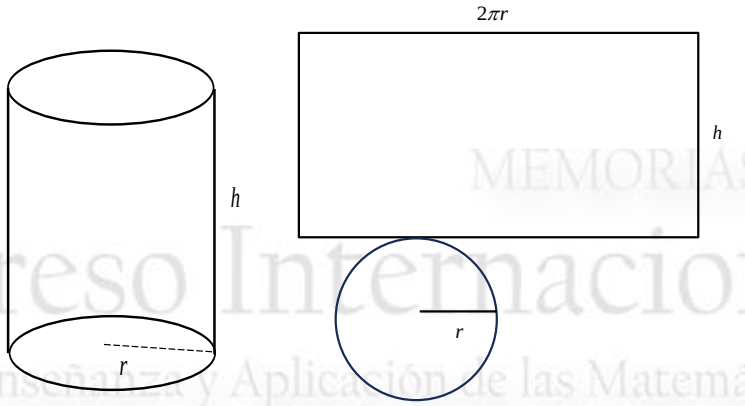


Figura 1. Volumen de un cilindro circular recto, con la representación del correspondiente volumen y áreas que definen al problema.

3. Resultados y análisis

El dominio práctico del experimento es $[0,2r]$. Ver figura 2. Lo que se desea optimizar es el volumen del tanque. Se sabe que el volumen de un cilindro circular recto está dado por

Ecuación 1. $V = \pi r^2 h$

Como el volumen depende de r y h, se deben tener relaciones auxiliares para dejar el volumen en función de r o de h.

Se conoce el área lateral de un cilindro circular recto

Ecuación 2. $Al = 2\pi rh$

y también el área de la base.

Ecuación 3. $Ab = \pi r^2$

Ahora se encuentra el área total del tanque.

Ecuación 4. $At = Al + Ab$

ISSN 2448 – 7945

Se sustituye la Ecuación 2 y Ecuación 3 en la Ecuación 4.

Se sabe que $At = 200\ m^2$ entonces

Ecuación 5. $2\pi rh + \pi r^2 = 200$

Se despeja h de la Ecuación 5.

Ecuación 6. $h = \dfrac{200 - \pi r^2}{2\pi r}$

Se sustituye Ecuación 6 y Ecuación 1.

Ecuación 7. $V = \pi r^2 \left(\dfrac{200 - \pi r^2}{2\pi r} \right)$

Realizando operaciones y simplificando.

Ecuación 8. $V(r) = (\cancel{\pi r})r \left(\dfrac{200 - \pi r^2}{2\cancel{\pi r}} \right) = \dfrac{r(200 - \pi r^2)}{2} = \dfrac{200r - \pi r^3}{2}$

Ecuación 9. $V(r) = \dfrac{200r - \pi r^3}{2}$

Entonces el volumen ahora quedó en función de la variable r, derivar el volumen, con respecto a r.

Ecuación 9. $V'(r) = 100 - \dfrac{3\pi r^2}{2}$

Se resuelve

Ecuación 10. $V'(r) = 0.$

Ecuación 11. $100 - \dfrac{3\pi r^2}{2} = 0$, se despeja r.

Ecuación 12. $-\dfrac{3\pi r^2}{2} = -100\,;\quad \dfrac{3\pi r^2}{2} = 100\,;$

Ecuación 12. $r^2 = \dfrac{100}{\frac{3}{2}\pi}\,;\ r^2 = \dfrac{200}{3\pi}\,;$

ISSN 2448 – 7945

Ecuación 13. $r^2 = \frac{2(3\pi)(100)}{(3\pi)^2}$;

Ecuación 14. $r = \frac{10\sqrt{6\pi}}{3\pi} = 4.6065\ m$

Se calcula la segunda derivada del volumen respecto a r.

Ecuación 15. $V''(r) = -\frac{6\pi r}{2} = -3\pi r$

Ahora se sustituye $r = \frac{10\sqrt{6\pi}}{3\pi}$ en la segunda derivada.

Ecuación 16. $V''\left(\frac{10\sqrt{6\pi}}{3\pi}\right) = -3\pi\left(\frac{10\sqrt{6\pi}}{3\pi}\right) = -10\sqrt{6\pi} < 0$

Por lo tanto, existe un valor máximo en $r = \frac{10\sqrt{6\pi}}{3\pi}$.

Como ya se conoce r se sustituye en Ecuación 6 para calcular h. Quedando.

Ecuación 17. $h = \frac{200 - \pi r^2}{2\pi r}$, $r^2 = \frac{200}{3\pi}$

Ecuación 18. $h = \frac{200 - \pi\left(\frac{200}{3\pi}\right)}{2\pi\left(\sqrt{\frac{200}{3\pi}}\right)} = \frac{\frac{200(3-1)}{3}}{2\pi\left(\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}}\right)} = \frac{\frac{200(2)}{3}}{\frac{20\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}}} = \frac{2(200)\sqrt{3\pi}}{3(20\pi\sqrt{2})}$

Ecuación 19. $h = \frac{20\sqrt{3\pi}}{3\pi\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{6\pi}}{6\pi} = \frac{10\sqrt{6\pi}}{3\pi}$

Ecuación 20. $h = \frac{10\sqrt{6\pi}}{3\pi}\ m$

Observar que

Ecuación 21. $r = h$.

MEMORIAS DEL Congreso Internacional Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

Calculando el volumen con r y h encontrados.

Ecuación 22. $$V=\pi\left(\frac{10\sqrt{6\pi}}{3\pi}\right)^2\left(\frac{10\sqrt{6\pi}}{3\pi}\right)=\pi\left(\frac{10\sqrt{6\pi}}{3\pi}\right)^3=\pi\left(\frac{1000(6\pi)\sqrt{6\pi}}{27\pi^3}\right)$$

Ecuación 23 $$V=\frac{1000(6\pi^2)\sqrt{6\pi}}{27\pi^3}=\frac{1000(2)\sqrt{6\pi}}{9\pi}=\frac{2000\sqrt{6\pi}}{9\pi}\ m^3$$

$V\approx 307.2059\ m^3$, es el volumen máximo que se puede almacenar con 200 m^2 de lámina.

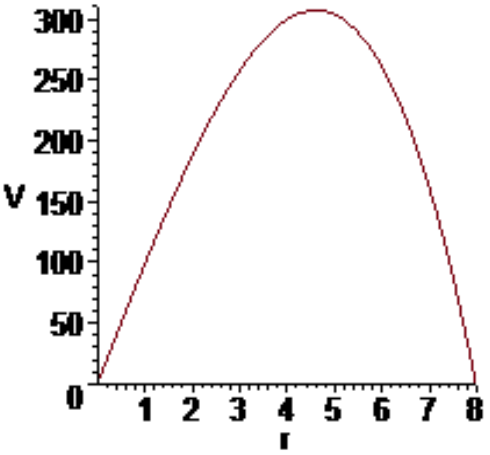


Figura 2. Gráfica de la función volumen. Donde se observa el volumen máximo.

4. Conclusiones

Los ejercicios de aplicación en ingeniería son esenciales para que los estudiantes adquieran habilidades prácticas, conecten la teoría con la práctica, apliquen conocimientos multidisciplinarios, se preparen para el mundo laboral, refuercen el aprendizaje y desarrollen habilidades de resolución de problemas. Estos ejercicios desempeñan un papel fundamental en la formación de ingenieros competentes y preparados para enfrentar los desafíos del campo de la ingeniería.

Además, la resolución de ejercicios de aplicación es muy importantes por que simula situaciones y desafíos que los estudiantes pueden encontrar en su futura carrera profesional. Esto les brinda la oportunidad de familiarizarse con los tipos de problemas que pueden enfrentar y les permite desarrollar habilidades y competencias relevantes para el mundo laboral.

ISSN 2448 – 7945

Agradecimientos (Opcional)

Trabajo realizado con el apoyo del programa UNAM-DGAPA-PAPIME 108322.

5. Índice de referencias

Libros

- Zill, D. (2011). Cálculo de una variable. Trascedentes tempranas. México. Mc Graw-Hill.

Información en línea

Disponible en: http://www.maplesoft.com

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

INCIDENCIA DE UNA METODOLOGIA INDUCTIVA EN MATEMÁTICAS EN EL SISTEMA DE BACHILLERATO ABIERTO

Diana Hernández Rivera[1 *]
[1]*Universidad Autónoma de Coahuila. Unidad Campo Redondo Edificio "H".*

INVESTIGACIÓN DEL PROCESO DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS-IP-POSM098

Resumen

El Instituto de Enseñanza Abierta es un bachillerato no escolarizado de la Universidad Autónoma de Coahuila, donde los docentes diseñan los materiales didácticos. Esta investigación tuvo el objetivo de comprobar la influencia de la metodología Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) en la motivación y estrategias de aprendizaje en el logro del aprendizaje de las Matemáticas mediante el diseño y aplicación de un material didáctico en Matemáticas I. Se plantearon dos hipótesis que señalaron que la intervención de ABP incide positivamente en la motivación y estrategias de aprendizaje, respectivamente. Se llevó a cabo bajo un diseño cuasi experimental, enfoque cuantitativo y tipología explicativa. La población es un censo de 98 estudiantes, entre 15 y 20 años, durante el semestre agosto-diciembre de 2022. Se empleó el Cuestionario de Motivación y Estrategias de Aprendizaje Forma Corta, validado con el coeficiente Alpha de Cronbach, con un valor de .908. Los resultados demostraron que la motivación no presentó diferencia en los niveles de significancia entre los grupos ($p>0.05$), de esto se desprendió que no existe influencia de factores para esta variable, en relación con los componentes de valor y componentes afectivos, según el instrumento aplicado. Sin embargo, en cuanto a las estrategias de aprendizaje sí se encontró diferencia estadísticamente significativa ($p<0.05$) en dos variables que corresponden a la dimensión de estrategias cognitivas y metacognitivas. Con base a ello, se rechazó la primera hipótesis de investigación y en contra parte, se aceptó la segunda hipótesis de investigación que sostuvo que la metodología de ABP incide positivamente en las estrategias de aprendizaje en el logro del aprendizaje de las Matemáticas. Este trabajo genera una aportación teórica, metodológica y pedagógica de trascendencia en las investigaciones educativas para el área de Matemáticas y a la vez, para los sistemas abiertos que se interesen en la ejecución de metodologías inductivas.

Palabras clave: Motivación, estrategias, aprendizaje, didáctica, *cognición, ABP.*

1. Introducción

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2019) declaró el catorce de marzo como el Día Internacional de las Matemáticas para promover la importancia del papel que desempeñan, en cuanto al desarrollo de habilidades del pensamiento enfocado a la resolución de problemas, la imaginación constructiva, el análisis que conduce a la conceptualización, la facultad de deducir conclusiones, comunicarse de manera efectiva y que a pesar de todo esto, se encuentran con una marcada resistencia en muchos estudiantes. Sin embargo, para encontrar gusto en ellas, basta aplicarlas y comprender su utilidad, tal como la

[1*]Autor para la correspondencia. E-mail: DIANA_HERNANDEZ@UADEC.EDU.MX

ISSN 2448 – 7945

observación, planificación, entendimiento, práctica de la lógica, toma de decisiones, en sí, el desarrollo de la mente orientado a cualquier situación de la vida cotidiana: lo que requiere que los sistemas educativos susciten procesos sólidos de enseñanza-aprendizaje, por lo que se reconoce el valor de la educación en esta ciencia para extender las oportunidades de niños y jóvenes, y asegurar su contribución decisiva en el desarrollo de esta y otras ciencias exactas.

El presente documento desarrolla un reporte de investigación llevado a cabo en el Instituto de Enseñanza Abierta Unidad Saltillo, que es una opción educativa de sistemas no escolarizados, en el que se proporciona la asesoría y se diseñan los recursos didácticos para su población estudiantil. A pesar de que la enseñanza abierta es una modalidad que ofrece oportunidades de desenvolvimiento a un completo desarrollo de las posibilidades personales de aprendizaje de cada estudiante, la mayoría de ellos se caracteriza por necesidades educativas específicas, en el sentido que el Instituto representa en mayor medida una elección temporal y algunas veces remedial para concluir el bachillerato.
Lo anterior expuesto lleva a plantear este estudio científico con el objetivo general de comprobar la incidencia de la metodología de ABP en la motivación y estrategias de aprendizaje, mediante el diseño de un material didáctico, en el logro del aprendizaje de las Matemáticas. Los objetivos específicos abarcan el definir los factores que motivan a los estudiantes, establecer las estrategias de aprendizaje que emplean, diseñar un material didáctico e implementarlo con la metodología de ABP y finalmente, evaluar el logro del aprendizaje en la asignatura de Matemáticas I. La primer hipótesis planteada refiere que la implementación de la metodología de ABP incide positivamente en la motivación y la segunda, que la implementación de la metodología de ABP incide positivamente en las estrategias de aprendizaje.

2. Metodología

El enfoque de la investigación es cuantitativo, de diseño cuasiexperimental y tipología explicativa. La población de estudio es un censo conformado por 98 estudiantes, de entre 15 y 20 años, con inscripción vigente en el Instituto de Enseñanza Abierta Unidad Saltillo durante el semestre agosto-diciembre de 2022, que cursan la asignatura de Matemáticas I. El instrumento de investigación fue propuesto por García et al. (1988), que abarca las dos dimensiones del instrumento, con 40 ítems medidos en escala Likert 5 puntos, que se descompone en cinco dimensiones y nueve indicadores. El cuál ha sido adaptado a la asignatura de Matemáticas y validado mediante el coeficiente Alpha de Cronbach, cuyo valor arroja un coeficiente de .908, lo que respalda una adecuada consistencia interna en este contexto Institucional.
Se convocó a la población de estudio a un curso-taller de Matemáticas I con duración de 2 horas a lo largo de 10 sesiones, en el mes de octubre de 2022, con 49 estudiantes, de los cuales fueron 26 mujeres y 23 hombres, que conformaron el grupo experimental. El resto de la población de estudio, 49 estudiantes, formaron parte del grupo control para propósitos comparativos,

ISSN 2448 – 7945

quienes tomaron asesorías académicas de Matemáticas I de forma regular a quienes se aplicó el instrumento de forma impresa, se dio como máximo diez minutos para la lectura y selección de respuestas. Implicó seis días hábiles para completar la totalidad de las aplicaciones. El trabajo con el grupo experimental durante la primera sesión del curso-taller, inició con la aplicación del instrumento se dio de forma similar al grupo control. Durante nueve sesiones, se realizaron tres intervenciones con la metodología de ABP de los “Siete Pasos” con la utilización del material didáctico diseñado. Para el cierre de las tres secuencias se solicitó de manera individual entregaran el material, que representó el producto como evidencia de consultas, argumentos, conjeturas y deducciones que los hicieron construir una vía de aprendizaje. En la última, se llevó a cabo la aplicación del mismo instrumento, a manera de postest, bajo las mismas instrucciones del pretest.

En cuanto al grupo control, se buscó a los 49 estudiantes en los cubículos de los asesores de Matemáticas para realizar la aplicación del instrumento postest, lo que tomó cinco días hábiles, hasta que fueron aplicados el total de cuestionarios. Para la matriz de los resultados del pretest, se calculó la medida de la prueba de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) y la prueba de esfericidad de Bartlett, cuyos resultados demostraron que existen variables que se correlacionan moderadamente y además es que es posible comprimir los datos de una forma significativa. Para las matrices de datos, se realizó el análisis factorial exploratorio: se extrajeron los factores por máxima verosimilitud, no se aplicó ningún método de rotación de la solución factorial y se estimó la puntuación de las dimensiones resultantes, en el que se suprimieron los coeficientes con carga factorial menor a .30 y se consideró un porcentaje de varianza total explicada mayor o igual a 40%. Se calculó la puntuación Z, para asegurar si los resultados obtenidos son posibles de generalizar a otras poblaciones con características similares a las de la muestra analizada. El análisis comparativo permitió realizar la comparación estadística para determinar si existen diferencias significativas entre las variables, mediante tres diversas pruebas de hipótesis en las que se consideró un nivel de significancia del 0.05. La prueba de hipótesis de normalidad fue la de Kolmogórov-Smirnov, la prueba de varianza de Levene y, por último, la prueba para la diferencia entre medias mediante la t de Student para muestras independientes, todas realizadas mediante SPSS versión 25.

3. Resultados y análisis

De la matriz de datos del pretest aplicado en el grupo control, se realizó la prueba de KMO a la dimensión *Motivación* y se obtuvo un coeficiente de .624. También se realizó la prueba de esfericidad de Bartlett cuyo valor es de .000 de significancia. Por otra parte, para la dimensión *Estrategias de Aprendizaje*, la prueba de KMO se obtuvo una medida .831 y la prueba de esfericidad de Bartlett resultó en .000.

La Tabla I muestra el resultado del análisis factorial exploratorio de la dimensión *Motivación* con las cargas factoriales en orden de fuerza de cada una de ellas.

ISSN 2448 – 7945

Tabla I. Análisis factorial de la dimensión *Motivación* en el grupo control

Variables	Factor 1
21. Siento una inquietud que me altera cuando realizo un examen.	.982
29. Siento palpitar rápidamente mi corazón cuando realizo un examen.	.734
3. Cuando presento un examen pienso en lo mal que lo estoy haciendo en comparación con otros estudiantes	.607
12. Cuando realizo un examen pienso en las consecuencias de fallar	.376

De la información anterior, se infirió que los estudiantes del grupo control presentaron incidencia en todos los factores afectivos, que se reflejaron a través de los indicadores al experimentar ansiedad durante la evaluación, principalmente reflejaron sentir inquietud que los altera al realizar un examen.

La Tabla II muestra el análisis factorial exploratorio de la dimensión *Estrategias de Aprendizaje* con las cargas factoriales de las variables. El grupo control manifestó en mayor medida cuestionarse para estar seguro de que entendieron lo que han estudiado, que consideran importante entender los contenidos, al surgir una duda leen nuevamente, la dedicación al avance de los contenidos y al estudiar, intentan identificar aquellos conceptos que no comprenden.

De acuerdo con los resultados obtenidos en la primera aplicación del instrumento en el grupo experimental, se ejecutó la prueba de KMO a la dimensión *Motivación*, de la cual se obtuvo un coeficiente de .698. Aunado a ello, se calculó la prueba de esfericidad de Bartlett que arrojó un valor es de .000 de significancia. Para continuar, se realizaron las mismas dos pruebas a la dimensión *Estrategias de Aprendizaje*, de la prueba KMO se obtuvo .834 y de la prueba de esfericidad de Bartlett .000.

La Tabla III, muestra las cinco variables que resultaron del análisis factorial efectuado en el grupo experimental, indicando sus respectivas cargas factoriales. Los estudiantes manifiestan, que sienten palpitar su corazón cuando realizan un examen, sienten inquietud que los altera y a la vez, piensan en las consecuencias de fallar, estas variables corresponden al indicador de ansiedad durante la evaluación, y coincide con los resultados del grupo control. Los resultados para la puntuación estándar Z revelaron en todos los casos un valor por encima de 1.96, esto es, que son variables consistentes y que los resultados se pueden transpolar a poblaciones con características semejantes a las de la muestra.

En la Tabla IV se muestran las doce variables y las cargas factoriales de la dimensión *Estrategias de Aprendizaje* en el grupo experimental. Del análisis factorial resaltó que las variables que mayor carga demostraron corresponden a la subdimensión de estrategias cognitivas y metacognitivas, particularmente al indicador de

ISSN 2448 – 7945

autorregulación a la metacognición, esto es que los estudiantes poseen la capacidad de auto reflexionar acerca de sus procesos de aprendizaje.

Tabla II. Análisis factorial de la dimensión *Estrategias de Aprendizaje* en el grupo control

Variables	Factor 1
32. Me cuestiono para estar seguro de que entendí lo que he estado estudiando del libro o en una asesoría.	.768
28. Para mí es importante entender el contenido de Matemáticas.	.744
7. Cuando estoy confundido sobre un detalle de un tema de Matemáticas, leo de nuevo y trato de aclararlo.	.739
2. Avanzo continuamente con el contenido de la asignatura y realizo las actividades del portafolio de evidencias.	.738
25. Al estudiar Matemáticas intento identificar qué conceptos no entiendo bien.	.729
16. Generalmente me interesa la asignatura de Matemáticas.	.674
30. Intento aplicar lo aprendido de esta asignatura en otras actividades académicas, como un proyecto.	.669
34. En una clase que me gusta, prefiero el material que me desafía para aprender cosas nuevas.	.664
35. Me interesa el área de las ciencias exactas, a la cual pertenecen las Matemáticas.	.663
11. Pienso que los materiales de estudio que me proporciona el maestro de la asignatura de Matemáticas son útiles para aprender.	.656
31. Siempre que leo, oigo una afirmación o conclusión en esta asignatura pienso en posibles alternativas.	.603
24. Relaciono mis ideas con lo que estoy aprendiendo.	.601
19. Entender los contenidos de Matemáticas me parece satisfactorio.	.587
18. Cuando estudio, fijo metas para dirigir mis acciones en cada período de estudio.	.585
33. Ya sea en la casa o en la escuela, tengo un lugar fijo para estudiar.	.575
14. Cuando estudio para la materia, es fácil encontrar las ideas más importantes.	.520
9. Me esfuerzo en contestar bien los portafolios de evidencias a pesar de que no me guste.	.513
17. Antes de estudiar una unidad nueva la reviso para ver cómo se organiza.	.500
13. Al estudiar para la materia, resumo las idas principales de la clase y lo que tengo en mi cuaderno.	.493

Tabla III. Matriz de análisis factorial de la dimensión *Motivación* en el grupo experimental

Variables	Factor 1
29. Siento palpitar rápidamente mi corazón cuando realizo un examen.	.904
21. Siento una inquietud que me altera cuando realizo un examen.	.844
39. Cuando las actividades del portafolio de evidencias son difíciles, solo hago lo más fácil.	.512
12. Cuando realizo un examen pienso en las consecuencias de fallar.	.492
3. Cuando presento un examen pienso en lo mal que lo estoy haciendo en comparación con otros estudiantes.	.339

ISSN 2448 – 7945

Tabla IV. Análisis factorial de la dimensión *Estrategias de Aprendizaje* en el grupo experimental

Variables	Factor 1
34. En una clase que me gusta, prefiero el material que me desafía para aprender cosas nuevas.	.782
30. Intento aplicar lo aprendido de esta asignatura en otras actividades académicas, como un proyecto.	.727
31. Siempre que leo, oigo una afirmación o conclusión en esta asignatura pienso en posibles alternativas.	.697
19. Entender los contenidos de Matemáticas me parece satisfactorio.	.663
18. Cuando estudio, fijo metas para dirigir mis acciones en cada período de estudio.	.657
32. Me cuestiono para estar seguro de que entendí lo que he estado estudiando del libro o en una asesoría.	.647
15. Cada vez que abordo un tema intento pensar en el por qué debo aprenderlo.	.642
38. Manejo adecuadamente el tiempo de estudio para esta materia.	.602
35. Me interesa el área de las ciencias exactas, a la cual pertenecen las Matemáticas.	.588
28. Para mí es importante entender el contenido de Matemáticas.	.545
17. Antes de estudiar una unidad nueva la reviso para ver cómo se organiza.	.520
40. Si tomo apuntes desordenados durante la asesoría, los organizo después.	.500

Los resultados para la puntuación estándar Z mostraron un valor por encima de 1.96, esto es, que son variables consistentes y que los resultados se pueden transpolar a poblaciones con características semejantes a las de la muestra.

Como resultado del análisis comparativo las variables 30 y 31 mostraron diferencia estadísticamente significativa a través de las aplicaciones del instrumento.

Como resultado de las pruebas estadísticas realizadas para la dimensión *Motivación*, se comprobó que las medias entre el grupo control y experimental fueron iguales, esto es, que la variable Motivación no mostró trascendencia en la población de estudio. Es importante destacar que los antecedentes de estudios principalmente cualitativos, Hernández-Huaripaucar y Yallico (2020), Borochovicius y Martins Tassoni (2021) y Gil-Galván et al. (2021), emplearon instrumentos como la observación y listas de cotejo, encontraron incidencia en la motivación para el aprendizaje a partir de la aplicación de la metodología de ABP.

Se lograron establecer las estrategias de aprendizaje que emplean los estudiantes ante la implementación de la metodología inductiva de ABP, ya que sí existe diferencia significativa entre las medias grupales, específicamente en los indicadores de las estrategias de autorregulación a la metacognición. Lo anterior se refuerza con lo que argumenta los teóricos Flavell (1979) y Zimmerman (1986), que los estudiantes analizan sus habilidades cognitivas y hacen uso de ese conocimiento, descubriendo la relación entre los contenidos de una asignatura y su aplicación en diversos contextos.

A diferencia de este trabajo y los trabajos de Zambrano y Naranjo (2020) y Pulido

ISSN 2448 – 7945

(2019), en las que se demostró que el ABP no fue eficaz como estrategia de enseñanza-aprendizaje, se evidenció su incidencia.
Referido al diseño e implementación de un material didáctico desarrollado mediante el ABP, se comprobó que sí tuvo efectos positivos en el aprendizaje, los cuales se manifestaron mediante los resultados del análisis de las variables que persistieron en el estudio a lo largo de las pruebas, antes y después de la intervención metodológica. Lo que es corroborado por Morales y Landa (2004) quienes enlistan como una de las ventajas del ABP, el facilitar la comprensión de nuevos conocimientos para lograr el aprendizaje significativo.
En cuanto al enriquecimiento de la teoría científica del estudio de la intervención con la metodología de ABP y la relación, demostrada estadísticamente, con las estrategias de aprendizaje, esta investigación hace una contribución en la disminución de los índices de reprobación y el aumento en la eficiencia terminal, lo que se sostiene con el argumento de Zimmerman (1986), indicando que los estudiantes con mejor desempeño académico emplean más estrategias de aprendizaje que los estudiantes de bajo rendimiento.

4. Conclusiones

El objetivo de este proyecto fue comprobar la incidencia de la metodología del Aprendizaje Basado en Problemas en la motivación y estrategias de aprendizaje, mediante el diseño de un material didáctico, en el logro del aprendizaje de las Matemáticas en estudiantes del bachillerato abierto del Instituto de Enseñanza Abierta Unidad Saltillo de la Universidad Autónoma de Coahuila durante el semestre agosto-diciembre de 2022. Para alcanzarlo, se realizó un estudio cuasiexperimental, que, de acuerdo con el análisis estadístico efectuado, en la Motivación no se encontró diferencia entre las medias de las variables medidas en ambos grupos y, por el contrario, en las Estrategias de Aprendizaje se comprobó la incidencia del ABP y resaltaron dos variables que presentaron diferencia, pertenecientes a la subdimensión de estrategias metacognitivas de los estudiantes, las que señalaron que ellos intentan aplicar lo aprendido en Matemáticas en otras actividades académicas y siempre que leen u oyen una afirmación/conclusión piensan en alternativas posibles. Por otro lado, se logró de manera efectiva el diseño y aplicación del material didáctico, bajo la forma de trabajo que propone la metodología de ABP.
El aporte teórico y metodológico de esta investigación sustentó que los resultados de este trabajo son factibles de generalizar a otras poblaciones con características similares a las del censo. Los resultados revelaron que los estudiantes de Matemáticas del sistema abierto logran manejar las estrategias de aprendizaje orientadas a trasferir los conocimientos adquiridos a otros contextos.
Este proyecto representa un contribución sustancial a la Educación Media Superior, ya que la investigación está orientada a mejorar el enfoque de trabajo dentro de las aulas mediante una aproximación metodológica que abarca problemas cruciales, como el logro de los aprendizajes, el rezago educativo y la deserción escolar, creando una aportación innovadora en un sistema de bachillerato abierto en la asignatura de Matemáticas.

ISSN 2448 – 7945

5. Índice de referencias

Borochovicius, E. y Martins Tassoni, E. C. (2021). Aprendizagem baseada em problemas: uma experiência no ensino fundamental. Educação em Revista - UFMG, 37. [En línea] Disponible en:https://doi.org/10.1590/0102-469820706

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American Psychologist*, *34*(10), 906–911. [En línea] Disponible en: https://doi.org/10.1037/0003-066X.34.10.906

Gil-Galván, R., Martín-Espinosa, I. y Gil-Galván, F. J. (2021). Percepciones de los estudiantes universitarios sobre las competencias adquiridas mediante el aprendizaje basado en problemas. *Educación XX1*, *24*(1), 271-295. [En línea] Disponible en: https://doi.org/10.5944/educXX1.26800

Hernández-Huaripaucar, E. M. y Yallico Calmett, R. M. (2020). El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) como estrategia didáctica innovadora en la enseñanza de la Anatomía Humana. *Horizonte de la Ciencia, 10*(19), 165-177. [En línea] Disponible en: https://doi.org/10.26490/uncp.horizonteciencia.2020.19.595

Morales, P. y Landa, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas. *Theoria*, *13*(1),145-157. [En línea] Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=29901314

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2019). Día Internacional de las Matemáticas. [En línea] Disponible en: https://www.unesco.org/es/days/mathematics

Pulido, D. A. (2019). Evaluación del Aprendizaje Basado en Problemas como un método para la comprensión del tema de cinemática. Tesis de Maestría. Universidad Externado de Colombia Facultad de Ciencias de la Educación), Bogotá, 2019. [En línea] Disponible en: https://bdigital.uexternado.edu.co/entities/publication/6ecdca70-c81e-476c-bf47-179b421cc65d

Secretaría de Educación Pública (2022). Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo de Pensamiento matemático. [En línea] Disponible en: https://dgb.sep.gob.mx/wp-content/uploads/2022/12/Progresiones-de-aprendizaje-Pensamiento-Matematico.pdf

Zambrano, V. E. C. y Naranjo, A. N. (2020). ABP: Estrategia didáctica en las matemáticas. *593 Digital Publisher CEIT*, *5*(1), 69-77. [En línea] Disponible en: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7901963

Zimmerman, B. J. (1986). Becoming a self-regulated learner: Which are the key subprocesses. *Contemporary Educational Psychology, 11*, 307-313. [En línea] Disponible en: https://www.leiderschapsdomeinen.nl/wp-content/uploads/2016/12/Zimmerman-B.-2002-Becoming-Self-Regulated-Learner.pdf

ISSN 2448 – 7945

MATERIAL DIDÁCTICO DE APOYO PERSONALIZADO PARA EL DESARROLLO DE HABILIDADES EN INTEGRACIÓN DE FUNCIONES REALES

Jorge Javier Jiménez Zamudio*[1] Jeanett López García[2]
[1]*FES Acatlán. UNAM. Alcanfores y San Juan Totoltepec, s/n. Sta. Cruz Acatlán.*

ID-POSM044

Resumen

Algunos organismos internacionales como el Banco Mundial, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico y el Banco Interamericano de Desarrollo se han pronunciado sobre la necesidad de una reforma de la educación superior; ésta, tiene que responder a las demandas actuales de la sociedad, al acelerado desarrollo de las tecnológicas y a la sostenibilidad. La tendencia mundial se orienta a la adopción de tecnologías educativas para el desarrollo de la enseñanza, aprendizaje e investigación, definiéndose ésta como las herramientas y recursos que se utilizan para mejorar la enseñanza, el aprendizaje y la investigación creativa, e incluyen tanto herramientas y recursos desarrollados expresamente para el sector de la educación, como otras herramientas adaptadas de otros fines que potencialmente sean útiles para el aprendizaje. Es indudable que la adopción de tecnologías está cambiando el panorama de la educación, haciéndola más accesible y personalizada. El aprendizaje adaptativo permite atender a la diversidad de requerimientos de cada alumno, con actividades complementarias de acuerdo con el reforzamiento de saberes que se necesita, implementando así la personalización del aprendizaje, así como también su evaluación. Dentro de los desarrollos tecnológicos se encuentran los Sistemas de Tutoría Inteligente (STI) que utilizan tecnologías avanzadas para ofrecer instrucción personalizada y apoyo educativo; entre ellos, para el área matemática se encuentran Cognitive Tutor, ASSISTments, ALEKS y Newton. El presente trabajo, presenta un material didáctico desarrollado en Power Point, de uso personalizado y adaptativo, que emula un sistema de tutoría, para el perfeccionamiento de habilidades en integración de funciones reales, que aborda las diferentes técnicas de integración. La aplicación es portátil y aplicable tanto en salón de clase como extramuros. En la aplicación, cada estudiante o profesor puede seleccionar el grado de dificultad y tipo de integrales y recibir retroalimentación del proceso paso a paso.

Palabras clave; *integrales, didáctica, tecnología, aprendizaje, personalizado, adaptativo.*

1. Introducción

La constante evolución del mundo actual demanda al sistema educativo, la permanente búsqueda de innovaciones que contribuyan a la mejora de los procesos que día a día se suceden en las aulas. Un recurso didáctico que destaca corresponde al uso de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) en las disciplinas en general y en particular en Matemáticas. La crisis ocasionada por la presencia de la Covid-19, obligó a vivir nuevas realidades y afrontar transformaciones

1 * *E-mail: jzamudio02@yahoo.com Tel 55 5451 7320*
2 *E-mail: jeanettlg@comunidad.unam.mx*

ISSN 2448 – 7945

educativas acompañadas del uso de las TIC, reforzando la tendencia de un cambio de referentes pedagógicos en el docente (Mantilla, 2022).

Se señala que la enseñanza de la matemática, a través de los años, ha sido un desafío para los docentes quienes, en busca de alcanzar el aprendizaje esperado por sus estudiantes, han empleado diferentes metodologías (Pérez, 2014). El uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas ha sido cada vez más relevante en el siglo XXI; se ve en ellas una alternativa a la solución de ciertos problemas asociados a la enseñanza y aprendizaje (López y López, 2016).

La historia de la humanidad y en particular de las matemáticas ha mostrado la intención de los investigadores y científicos de proveer de herramientas al quehacer científico que faciliten y ahorre tiempo en su trabajo; así, Napier dedicó 20 años a publicar su obra sobre logaritmos con objeto de evitar dedicar mucho tiempo a cálculos rutinarios, Blaise Pascal inventó en 1642 su máquina de aritmética. Actualmente se cuenta entre otras herramientas con el bot conversacional llamado ChatGTP (Generative Pre-trained Transformer) lanzado al público en 2022, que en el área de matemáticas tiene la capacidad de resolver integrales, proporcionar demostraciones de algunos teoremas, y hasta código, en diferentes lenguajes de programación, si se requiere de un cálculo numérico, debido a su gran base de datos. En consecuencia, el objetivo de este trabajo es presentar un material didáctico, basado en tecnología educativa, desarrollado en Power Point, de uso personalizado y adaptativo, que emula un sistema de tutoría, para el perfeccionamiento de habilidades en integración de funciones reales, que aborda las diferentes técnicas de integración, con la ventaja de que la aplicación es portátil, con peso menor a dos megabytes, y aplicable tanto en salón de clase como extramuros, donde cada estudiante o profesor puede seleccionar el grado de dificultad y tipo de integrales y recibir retroalimentación del proceso paso a paso.

2. Desarrollo del material

El material didáctico que se presenta en el trabajo se encuentra entre los extremos de la tecnología educativa, es decir, entre instrucción personalizada cuyo fundamento era *el condicionamiento operante* y las aplicaciones de la inteligencia artificial, entre ellos los *Sistemas de Tutoría Inteligente.* A continuación se esboza tanto el proceso de construcción como la forma de utilizarlo en el aula o extramuros.

2.1 Construcción del material

Se realizó una investigación bibliográfica (textos como El Cálculo de Louis Leithold; Cálculo de varias variables de James Stewart; Cálculo con geometría analítica de Larson, Hostetler y Edwards; entre otros) analizando los métodos de integración incluidos en los textos más utilizados en el nivel de educación media superior y de los primeros semestres de licenciaturas que incluyeran la materia de Cálculo Integral de funciones reales.

Dado que la determinación de una antiderivada depende analíticamente del empleo de una tabla de integrales, se seleccionó un conjunto de funciones a integrar que requirieran aplicar un poco de álgebra o trigonometría para llevarlas a estructuras tales que se pudieran aplicar las fórmulas de las tablas o bien, ciertos artificios de integración

ISSN 2448 – 7945

como serían la integración por partes, la aplicación de la teoría de las fracciones parciales o sustituciones convenientes.

Desde luego, para la consecución exitosa de una integral el estudiante tiene que razonar ordenadamente, tener una mente preparada para el pensamiento analítico, la crítica y la abstracción, lo cual favorece el desarrollo de capacidades intelectuales y cognoscitivas.

Marco teórico

La Tecnología Educativa surge en 1950 con la obra de Skinner: “La Ciencia del Aprendizaje y el Arte de la Enseñanza” y “Máquinas de Enseñanza”, impulsada por F. S. Keller con su sistema de instrucción personalizada cuyo fundamento era el condicionamiento operante. A través del tiempo, ha generado alternativas que posibilitan una mejoría constantemente en el diseño de los ambientes de aprendizaje. Entre sus ventajas se citan: que permite elegir tiempo, lugar y ritmo de estudio, favorece el acceso rápido a información cada vez es más completa y esto hace que el alumno tenga un mejor nivel académico (Olguín, 2015).

La tecnología educativa es un campo de estudio que se encarga del abordaje de todos los recursos instruccionales y audiovisuales; su objetivo es fortalecer los entornos escolares y promover la adquisición de nuevas competencias con herramientas tecnológicas que incluyen actividades digitales de aprendizaje, portafolios, elaboración de blogs, portales web y plataformas tecnológicas, entre otros; así las tecnologías educativas van más allá de la Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) cuya función es transmitir contenidos con valor educativo a un grupo de participantes o una sociedad (Torres, Beltrán, y Kendry, 2017).

Esteve-Turrillas, et al. (2016) señalan que la gamificación implica la utilización de mecánicas en ambientes no lúdicos para promover el desarrollo de ciertas habilidades y sus técnicas valiosas para motivar y apoyar el trabajo educativo en el aula de manera dinámica; apoya a los procesos de enseñanza/aprendizaje ya que estimula la participación de los estudiantes y motivar la participación constante, permitiendo que el propio alumno evalué su progreso.

La competencia entre estudiantes ha sido largamente utilizada en las aulas como medio para el aprendizaje y ha permitido su nivel de conocimientos y habilidades (Rojo, 2014). Los concursos hacen del proceso educativo un acto lúdico, generador de interés, que promueve a la creatividad y el desarrollo personal (Sampedro, 2022).

Ejercicios numéricos y operaciones de cálculo activan la parte horizontal del surco interparietal del cerebro (información recibida e información registrada). De esa información registrada conscientemente, la memoria guarda aproximadamente un 10%. La actividad cerebral aumenta, y aumenta la cantidad de respuestas que se despliegan ante la formulación de preguntas; se activan la motivación, la reflexión y la autoestima. Los recientes avances en neurociencia ponen de relieve las conexiones entre la emoción, el funcionamiento social, y la toma de decisiones que impactan directamente en materia de educación. Los aspectos de la cognición están directamente relacionados y afectados positiva o negativamente por los procesos de emoción que son parte de los procesos necesarios para la adquisición de los

ISSN 2448 – 7945

conocimientos que se transfieren en la escuela; la emoción positiva genera químicos que facilitan la transmisión de impulsos; querer saber y sentirse bien, aspectos fundamentales que la escuela debe poner a disposición del alumno. Las investigaciones neurocientíficas nos dicen que cuanto más se repite una acción, más se aumenta la capacidad de recordar (Fernández, 2010).

3. Resultados y análisis

A continuación se presenta la forma de construir un material similar, para que el profesor interesado elabore lo conducente de acuerdo con sus asignaturas que imparte y los temas que considere relevantes, incluso para enriquecer la propuesta a través de trabajos dentro de la academia.

3.1 Materiales desarrollados y forma de utilizarse

El material final consta de una presentación en *Power Point* conformado con diapositivas, con interacción (vínculos) entre ellas. Los métodos de integración que se abordan corresponden a niveles que pueden enseñarse en los últimos semestres del ciclo preuniversitario o en primeros semestres de una licenciatura, dependiendo de los planes de estudio de la institución en que el profesor labore o el estudiante curse sus materias. Así se presentan, un total de 192 integrales, clasificadas en una tabla de doble entrada, (Tabla 1) correspondiendo a las columnas a siete niveles de dificultad, desde muy fácil hasta muy difícil; las filas corresponden a 15 formas diferentes de resolver integrales, con intregrandos que se resuelven en forma cuasi-inmediata con la aplicación de fórmulas de integración contenidas casi en cualquier tabla *ad hoc*, hasta Integrales que requieren de un cambio de orden de integración, incluyendo integración en coordenadas polares; los números de cada celda corresponde a las integrales asociadas tanto a la forma de integración como al nivel de dificultad. El material fue piloteado a nivel licenciatura mostrando sus ventajas por su dinamismo y capacidad de personalización. Cada una de las integrales planteadas, van acompañadas por su respectiva solución.

3.2 Procedimiento para la utilización del material didáctico.

Paso 1. Abrir la presentación; la primera diapositiva presenta el *Índice* (Tabla 1). Cada celda contiene los números que corresponden a las integrales de dificultad similar. Seleccionar el tipo de integral a resolver (renglones) y asimismo seleccionar la dificultad de acuerdo con las capacidades personales del estudiante o las destrezas que un profesor considere ya cuenta el estudiante.

Paso 2. Escoger un número de los enumerados en la celda de la Tabla 1. Dar clic en la flecha de la Tabla 1, lo cual llevará a una diapositiva tipo tablero de ajedrez (Figura 1); al dar clic en el número escogido aparecerá la diapositiva con la integral a resolver. Por ejemplo, si se selecciona de la Tabla 1 una *integral doble* de dificultad "*fácil*", las opciones son las integrales identificadas con los números 83 y 84. De entre ellos, se escoge dar clic en el 84, lo cual lleva a la integral de la Figura 2.

ISSN 2448 – 7945

Tabla 1. Matriz para selección de la forma de integración como al nivel de dificultad de cada integral

Matriz de dificultad y método de integración

	Muy fácil	Fácil	Media --	Media	Media ++	Difícil	Muy difícil
	Sólo tabla elemental de integrales	Tabla y completar la integral o tabla y álgebra elemental	Hacer álgebra antes de aplicar tabla	Tabla y completar y cambio de variable	Tabla y completar y álgebra		
Integrales cuasi-inmediatas	2, 3, 4, 6, 21, 27, 28, 31, 32, 33, 119, 122, 123, 125, 126, 131, 144, 147, 151, 153,	1, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 23, 24, 26, 29, 30, 35, 36, 68, 132,133, 134, 145, 148, 149, 150, 152, 155,	10, 17, 18, 42, 59, 154, 156,	5, 19, 116, 157,	12, 38, 57, 60, 117, 118, 120, 121,	11, 20, 22, 124, 195,	39,
Completar el trinomio cuadrado perfecto				62, 63, 127, 128, 129,		69	
integración por partes	175	159, 161, 166, 170,	13, 41, 58, 160,	44, 61, 171,	67, 163,	162, 164, 165, 169, 177,	73, 173,
fracciones parciales			179, 183, 185, 187, 189, 191, 196, 197,		180, 181, 184, 186, 188, 190, 192, 193, 194,		
De diferenciales que contengan sólo potencias fraccionarias de x			109,	64, 105, 112,	106, 107, 108,	103, 104,	
De diferenciales que contengan sólo potencias fraccionarias de (a+bx)			111, 114,	110,	40, 101,	53, 66, 113, 115,	
integración de diferenciales trigonométricas	79	78, 80, 92,	158, 172,	95, 135, 136, 137, 139,	77,138,	74, 81, 82, 93, 94, 174,	56, 96, 97,
sustitución trigonométrica					98	88, 90, 91, 99,	
Integrales con expresiones de segundo grado ax^2+bx+c ó su raíz en el denominador y en el numerador expresiones de primer grado ax+b	142,	140, 141, 143,		65, 130,	43, 51, 69,	54, 55, 70,	
integrales dobles		83,84	34, 85, 86, 87,		75,		
Cambiar integrales dobles a polares					198,	199, 200	
Cambiar orden de integración				45, 46, 48, 167,	47, 50 71, 72, 168,		
Cambiar límites de integración					37		
Cambio de variable no obvio						52,	
Integrandos discontinuos			76	100,			

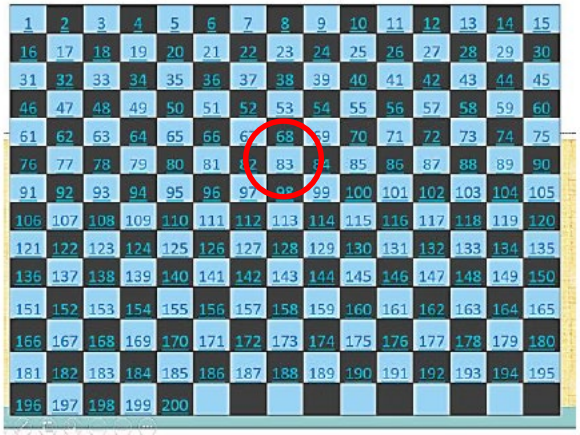


Figura 1. Tablero asociado a los números de la Tabla 1.

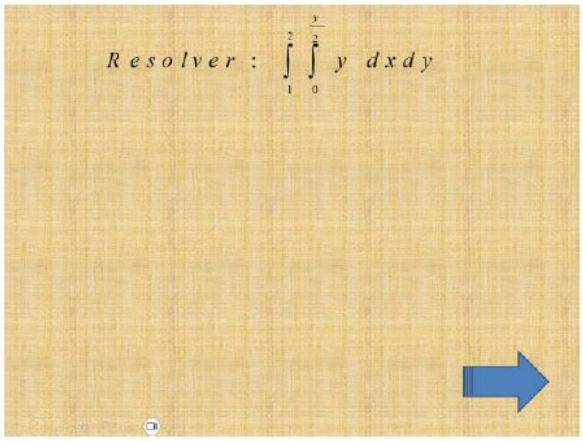


Figura 2. Listado oculto de integrales

Paso 3. Para conocer el resultado dar clic en cualquier parte de la diapositiva, excepto en la flecha de color azul; inmediatamente después se despliega el resultado; en este caso corresponde a la Figura 3.

ISSN 2448 – 7945

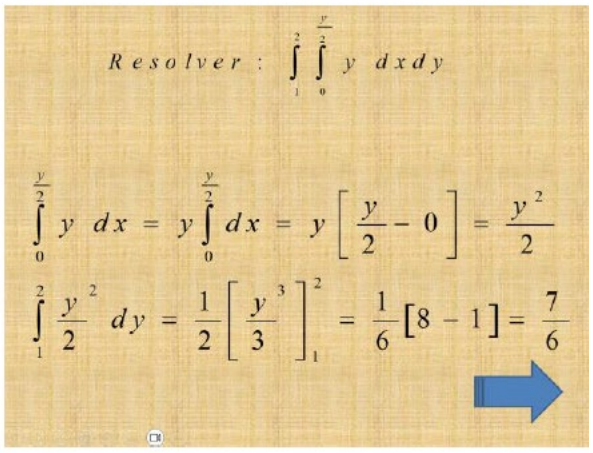


Figura 3. Solución desplegada de la integral.

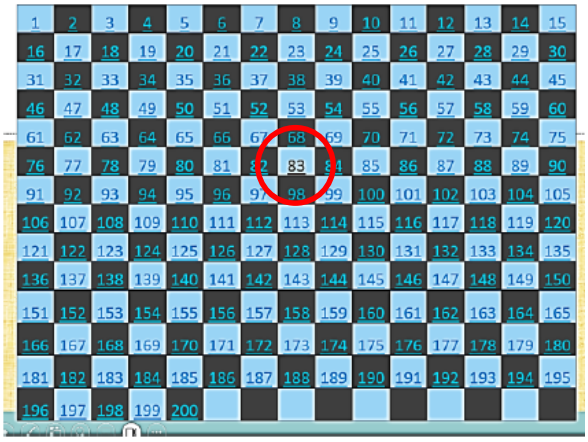


Figura 4. Tablero de integrales con cambio de color en el número 83.

Paso 4. Una vez revisada por el estudiante la solución, se debe dar clic en la flecha azul para regresar a la Tabla 1. Observe en la Figura 4 que el número 83 ha cambiado de color, lo cual significa que esa integral ya fue resuelta en la sesión de trabajo. Una vez que se cierra el archivo, el numeral 83 vuelve a su color inicial.

4. Conclusiones

La facilidad de portabilidad permite compartir el material didáctico entre un número no restringido de estudiantes y profesores.

El estudiante interesado en mejorar sus habilidades en integración de funciones reales tiene a su disposición un material que coadyuvará a sus metas.

Los profesores podrán utilizar el material tanto en forma personalizada con sus estudiantes o bien en concursos *ad hoc*.

La base de datos puede ser incrementada debido a la facilidad del proceso de construcción.

Con base en las neurociencias, se puede decir que la posibilidad que tiene el estudiante de trabajar en forma independiente y auto graduar la dificultad de las integrales permite generar emociones positivas ante el éxito de sus respuestas y la oportunidad de repetir una y otra vez los procesos acción de integración, aumenta la capacidad de recordar.

Agradecimientos

Los resultados presentados corresponden parcialmente al proyecto PAPIME PE101911 de la UNAM.

Referencias

- Esteve-Turrillas, F., Armenta, S., Cervera, M., De la Guardia, M., Pastor, A., Morales-Rubio, A. y Garrigues, S. (7 y 8 de julio de 2016). *Gamificación: El concurso como actividad grupal de enseñanza/aprendizaje*. Conferencia en In-Red 2016. Universitat

ISSN 2448 – 7945

Politècnica de València. España. Doi: http://dx.doi.org/10.4995/INRED2016.2016.4405.

- Fernández, J. (2010). Neurociencias y Enseñanza de la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación 51*(3), pp. 1-12.
- López, K. y López. J. (2016). Educación matemática y tecnologías empleadas para la enseñanza de las matemáticas. *REIIE 1*(2), pp. 59- 70.
- Mantilla, P. (2022). Enseñanza innovadora de la matemática con mediación tecnológica: experiencia en una institución de educación superior. *Educare 26*(2), 162-177.
- Olguín, E. (2015). Generalidades de la Tecnología educativa. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, pp. 1-8. [En línea] Disponible en http://www.uaeh.edu.mx/virtual
- Pérez, J. (2014). Empleo del software educativo y su eficiencia en el rendimiento académico del cálculo integral en la Universidad Peruana Unión, filial Tarapoto. *Revista de Investigación IV*(1), pp. 43-56.
- Rojo, J. (2014). *Contribución de los concursos educativos al aprendizaje*. Tesis de Especialidad. Universidad de Valladolid. España.
- Sampedro, J. (23 de junio de 2022). La enseñanza debe ser sobre todo, una provocación intelectual. *Instituto 512* Disponible en: https://512.com.do/storage/blog/June2022/h6EuhY5OvBjjhufE6KxJ.pdf
- Torres, P. Beltrán, C. y Kendry, J. (2017). Tecnología educativa y su papel en el logro de los fines de la educación. *Educere 21*(68), pp. 31-40.

ISSN 2448 – 7945

ESTUDIO DE LOS FUNDAMENTOS Y DEDUCCIÓN FÍSICA-MATEMÁTICA DE LA DEFINICIÓN DEL CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO CON MASA EN INGENIERÍA MECÁNICA

Villegas Rueda Verónica Lucero[1], Luevano Campos Montserrat Itzel[2], Rodríguez Gutiérrez Diego Derek[3], Zamorano Ulloa Rafael[4]

UPIITA. Av. Instituto Politécnico Nacional 2580, La Laguna Ticomán, Gustavo A. Madero, 07340 Ciudad de México, CDMX, México.
ESFM. Avenida Instituto Politécnico Nacional s/n Edificio 9 Unidad Profesional "Adolfo López Mateos" Col. San Pedro Zacatenco Del, Nueva Industrial Vallejo, Gustavo A. Madero, 07738 Ciudad de México, México.

AP-POSM059

Resumen

En este trabajo se muestra la deducción física-matemática completa de la definición de centro de gravedad de un cuerpo con masa desde conceptos fundamentales de equilibrio mecánico y su uso en análisis de mecánica. Utilizamos dos equivalencias para el cálculo de momento resultantes (M_{RO}) que es la rotación un cuerpo que debido a la fuerza resultante aplicada en un punto (r_{eq}) de equivalencia respecto a un sistema de referencia origen (0) que puede ser el punto de soporte del cuerpo y respecto al cual se rota, después del primer cálculo se traslada el sistema de referencia origen sobre el r_{eq}, sosteniendo al sistema desde la ubicación del r_{eq} dentro del cuerpo, para después desde ese punto de referencia (0') hacer nuevamente el cálculo de momento resultante dando como resultado un momento cero o dicho de otra forma, ya no rota o no gira sujetado desde 0'. En la equivalencia anterior, el origen de las fuerzas sobre el cuerpo puede ser de cualquier naturaleza como un resorte, una carga, una fuerza normal, de soporte, etc. Es en esta segunda equivalencia donde se debe considerar que la fuerza resultante tenga únicamente origen gravitacional (peso) y aplicando la segunda equivalencia exclusivamente para fuerza de la gravedad es que se deduce la definición matemática del centro de gravedad de un cuerpo, sin embargo, esto es el fundamento también para definir el centro de masa y el centroide del mismo cuerpo que puede ser el mismo o diferentes puntos dentro de él. Las definiciones y su base físico-matemático contribuyen a la difusión del conocimiento y comprensión de la información detrás del cálculo del centro de masa, debido a su importancia para su empleo en aspectos como la elaboración de estructuras o la simplificación de las interacciones de cuerpos complejos.

Palabras clave: *centro de gravedad, fuerza resultante, momento resultante, mecánica, centroide.*

1. Introducción

En el ámbito de la ingeniería mecánica, la comprensión de fenómenos físicos que influyen en el movimiento e interacción de los objetos es de suma importancia pese a las décadas. Parte de este estudio abarca el análisis de la masa y la influencia que ésta genera en los cuerpos que la contienen. Por ende, el concepto de centro

[1*] Autor para correspondencia: vvillegasr@ipn.mx

ISSN 2448 – 7945

de gravedad tiene un papel fundamental, ya que no solo es decisivo en el análisis del equilibrio estático, sino que también es crucial en la dinámica de los cuerpos, pero ¿qué sucede sino se tiene una definición clara del centro de gravedad? En el presente artículo se aborda el estudio del centro de gravedad, haciendo énfasis en las bases fisicomatemáticas, que hacen uso de la integración y cálculo vectorial, lo cual impacta en la comprensión de la definición del centro de masa y el centroide que son conceptos fundamentales para resolver sistemas mecánicos complejos en la física y la ingeniería. Para ello usamos dos equivalencias que se estudian en la ingeniería: la primera equivalencia de traslación de fuerzas a un punto anexando una llave por cada traslación y la segunda equivalencia del uso de la llave. De igual manera, gran parte del fundamento de la información que a continuación es sustentada en libros como “Mecánica del Centro de Masa” de Goldstein (1980) y “Estática” de Hibbeler (2010).

2. Primera equivalencia

Todas las fuerzas cuya línea de acción no pase por el origen (v. gr. $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$) se puede trasladar al punto origen (O) conservando su dirección si anexamos el momento de par correspondiente a esa fuerza y su brazo de palanca ($\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$, $\vec{M}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$), Figura 1. De tal modo que quedan todas las fuerzas en el mismo origen, lo que permite que se puedan sumar y tener una fuerza resultante ($\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \sum \vec{F}_i$, suma discreta); además que los momentos de par generados se suman a los momentos de par que estén actuando sobre el cuerpo ($\vec{M}$) para dar un momento de par resultante ($\vec{M}_{RO} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}$, suma discreta) que tiene el punto de giro en el origen O. Ambas resultantes de momento y fuerza actúan sobre el cuerpo: la fuerza resultante actúa trasladando el cuerpo y el momento resultante actúa haciendo girar el cuerpo respecto al punto O, Figura 1.

ISSN 2448 – 7945

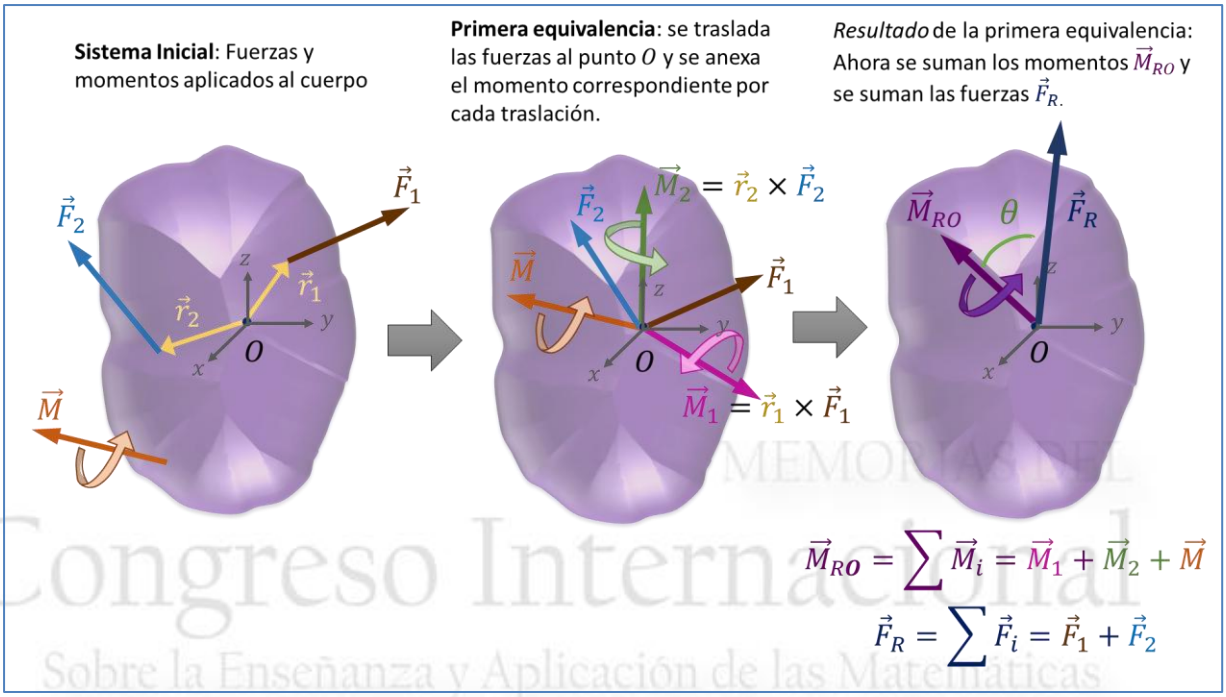


Figura 1. Primera equivalencia de traslaciones de las fuerzas al punto O, para tener todas las fuerzas en un sólo punto, por cada traslación se agrega un momento de giro y se suman por separado los momentos y las fuerzas, dando una fuerza y un momento resultantes. Adaptada de INGENIERÍA MECÁNICA. ESTÁTICA (p. 448), por Hibbeler, R. C. (2010), Pearson Education.

3. Segunda equivalencia

La fuerza resultante $\vec{F}_R$ y el momento resultante $\vec{M}_{RO}$ de la primera equivalencia se pueden relacionar mediante un único brazo de palanca $\vec{r}_d$, el cual puede ser propuesto y encontrado resolviendo la ecuación de la equivalencia $\vec{M}_{RO} = \vec{r}_d \times \vec{F}_R$. Esta reducción en ingeniería se conoce como reducción a una "llave". Para llevar a cabo la Segunda equivalencia se escriben en términos de componentes y se resuelve por Sistema de ecuaciones 1 y 2, al igual que se observa en la Figura 2.

$$\vec{M}_{RO} = M_{ROx}\hat{\imath} + M_{ROy}\hat{\jmath} + M_{ROz}\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ r_{xd} & r_{yd} & r_{xd} \\ F_{Rx} & F_{Ry} & F_{Rz} \end{vmatrix} \quad (1)$$

ó

$$\vec{M}_{RO} = (\sum M_{Oxi})\hat{\imath} + (\sum M_{Oyi})\hat{\jmath} + (\sum M_{Ozi})\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ r_{xd} & r_{yd} & r_{xd} \\ F_{Rx} & F_{Ry} & F_{Rz} \end{vmatrix} \quad (2)$$

ISSN 2448 – 7945

Notamos que en la segunda equivalencia tenemos que $\vec{r}_d \perp \vec{F}_R$ y que $\vec{M}_{RO}$ debe ser perpendicular al plano que los contiene. El caso más sencillo se muestra en esquema donde $\vec{F}_R$ apunta vertical y el $\vec{r}_d$ está en el plano de ejes a,b, Figura 3.

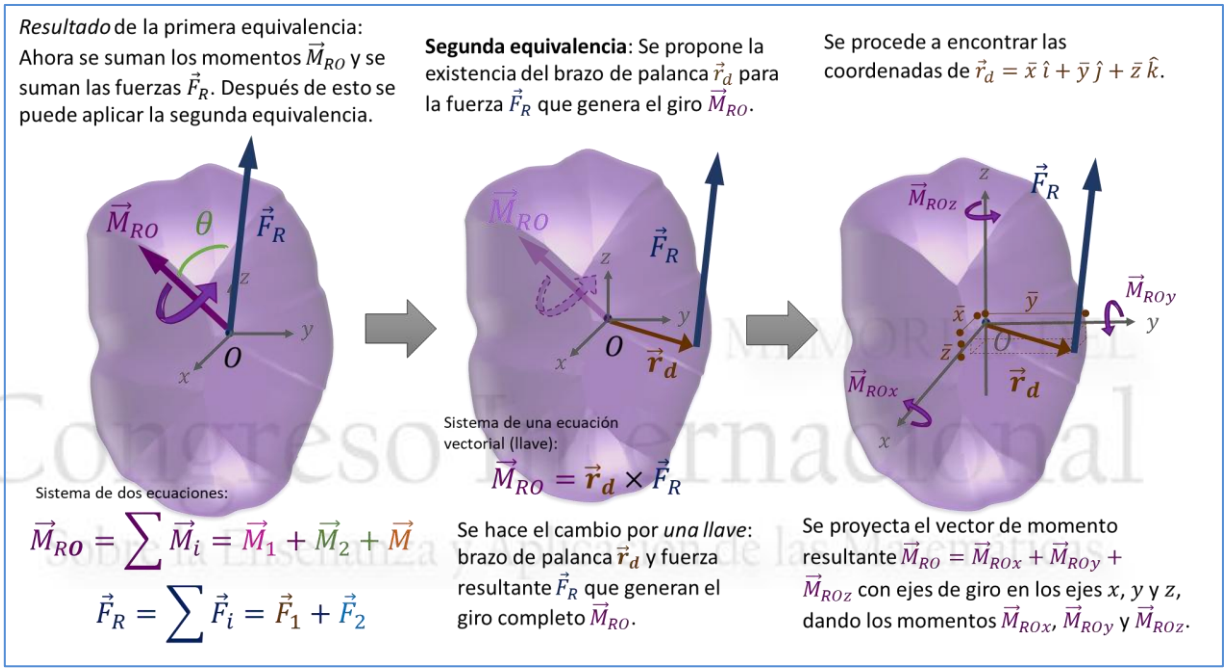


Figura 2. Para la segunda equivalencia se usan los resultados de la primera equivalencia, tomamos la fuerza resultante y se coloca a un brazo de palanca equivalente talque este brazo de palanca y esta fuerza sean los necesarios para generar el momento resultante de la primera equivalencia. Adaptada de INGENIERÍA MECÁNICA. ESTÁTICA (p. 448), por Hibbeler, R. C. (2010), Pearson Education.

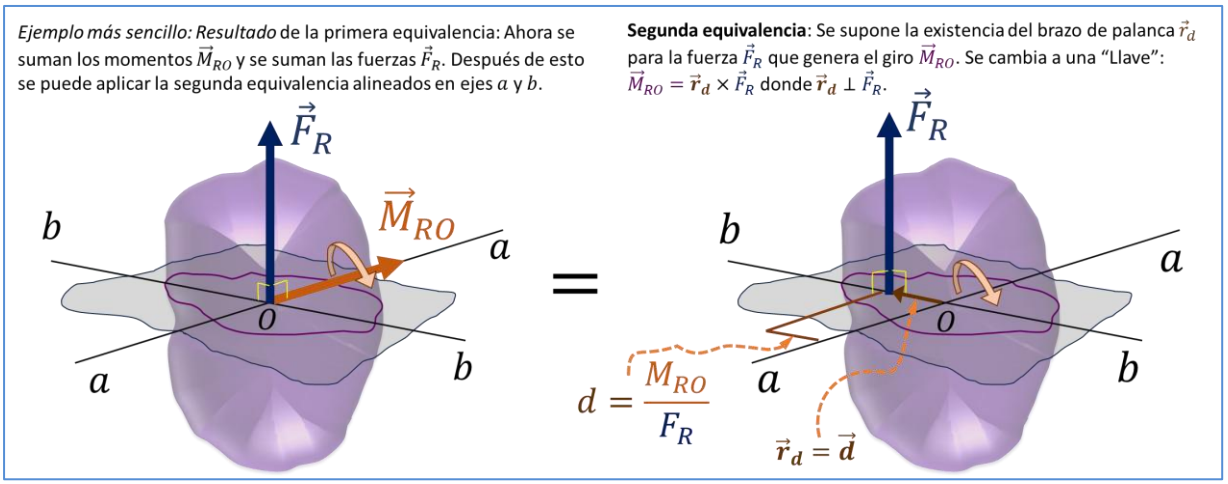


Figura 3. Caso más sencillo de la segunda equivalencia donde el plano de ejes a y b es perpendicular a la fuerza resultante, este plano contiene al brazo de palanca y genera el momento resultante. Adaptada de INGENIERÍA MECÁNICA. ESTÁTICA (p. 448), por Hibbeler, R. C. (2010), Pearson Education.

ISSN 2448 – 7945

La ubicación en el caso más general se escribe como $\vec{r}_d = \bar{x}\,\hat{\imath} + \bar{y}\,\hat{\jmath} + \bar{z}\,\hat{k}$. El efecto en general es que ambas resultantes de momento y fuerza actúan sobre el cuerpo: la fuerza resultante actúa trasladando el cuerpo y el momento resultante actúa haciendo girar el cuerpo respecto al punto O que es el punto de agarre o punto que queda fijo en el cuerpo, Figura 4.

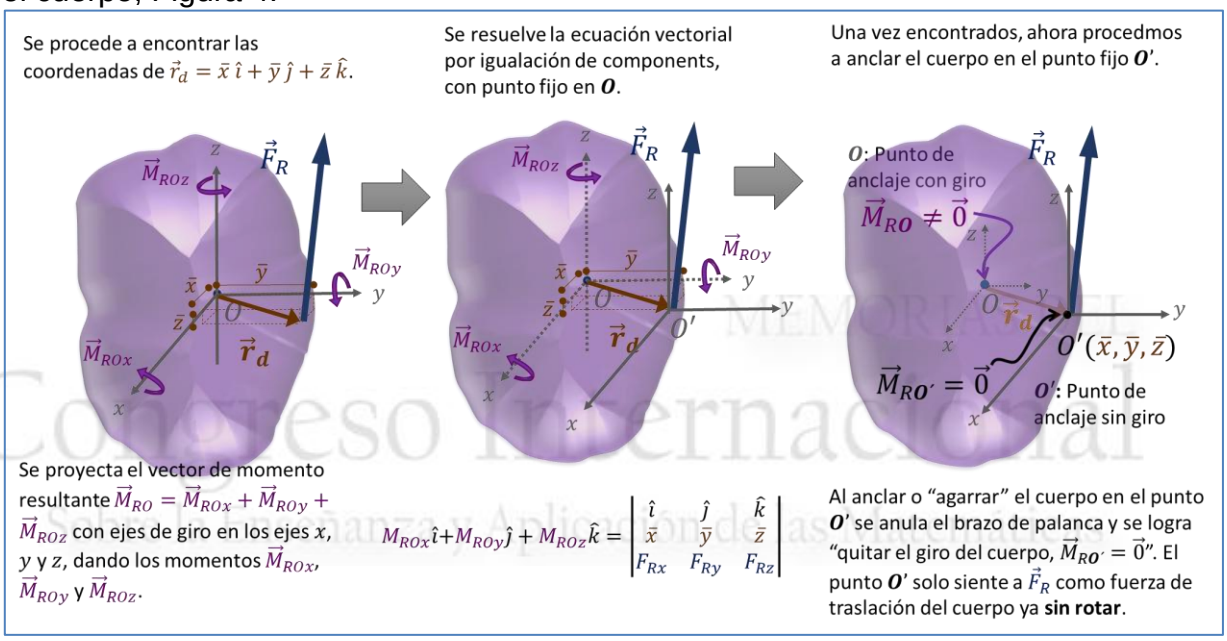


Figura 4. Cuando se sostiene el cuerpo justo en la punta del vector asociado al brazo de palanca la rotación se anula, el punto de donde se sujeta es un punto donde sólo actúan la fuerza resultante ya sin giro. Adaptada de INGENIERÍA MECÁNICA. ESTÁTICA (p. 448), por Hibbeler, R. C. (2010), Pearson Education.

Una vez hecha la primer y segunda equivalencia, se desancla el cuerpo del punto O y ahora lo sujetamos del punto ubicado en $\vec{r}_d$, justo ahí tomamos el nuevo origen O' y notamos que se *neutraliza* la llave porque reducimos el brazo de palanca a cero y sólo queda actuando la fuerza resultante $\vec{F}_R$, es decir al sujetar el cuerpo en la ubicación $\vec{r}_d$ el cuerpo ya no girará y será únicamente empujado o trasladado en dirección de $\vec{F}_R$ sin rotar en absoluto, Figura 4.

4. Resultados de las equivalencias aplicadas al peso $\vec{W} = m\vec{g}$

En la primer y segunda equivalencia el origen la de la fuerza es de tipo de una carga externa, sin embargo, este mismo análisis de equivalencias se puede llevar a cabo si el origen de la fuerza que actúa sobre el cuerpo es la fuerza que le ocasiona su propia masa a través de su propio peso del cuerpo $\vec{W} = m\vec{g}$. Es decir, se aplica la primer y segunda equivalencia para la fuerza del peso $\vec{W} = m\vec{g}$, haciendo el análisis para una distribución de fuerza continua. Comenzando por la fuerza causada por un "trocito de fuerza $d\vec{W}$ causado por un trocito de masa dm que está sometida al campo gravitatorio $\vec{g}$", esta fuerza es la que actúa sobre el cuerpo, dónde $d\vec{W} = \vec{g}\,dm$, Figura 5. Entonces la fuera resultante será la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema, pero

ISSN 2448 – 7945

como tenemos un continuo en la distribución la suma debe ser hecha mediante la suma continua indicada matemáticamente por la integral $\vec{F}_R = \int d\vec{W}$, ahora se debe suponer que existe una distancia $\vec{r}_d$ tal que se obedezca la segunda equivalencia $\vec{M}_R = \vec{r}_d \times \vec{F}_R$ ó en teérminos del peso y las coordenadas para $\vec{r}_d$ tenemos que $\vec{M}_R = (\bar{x}\,\hat{\imath} + \bar{y}\,\hat{\jmath} + \bar{z}\,\hat{k}) \times \int d\vec{W}$.

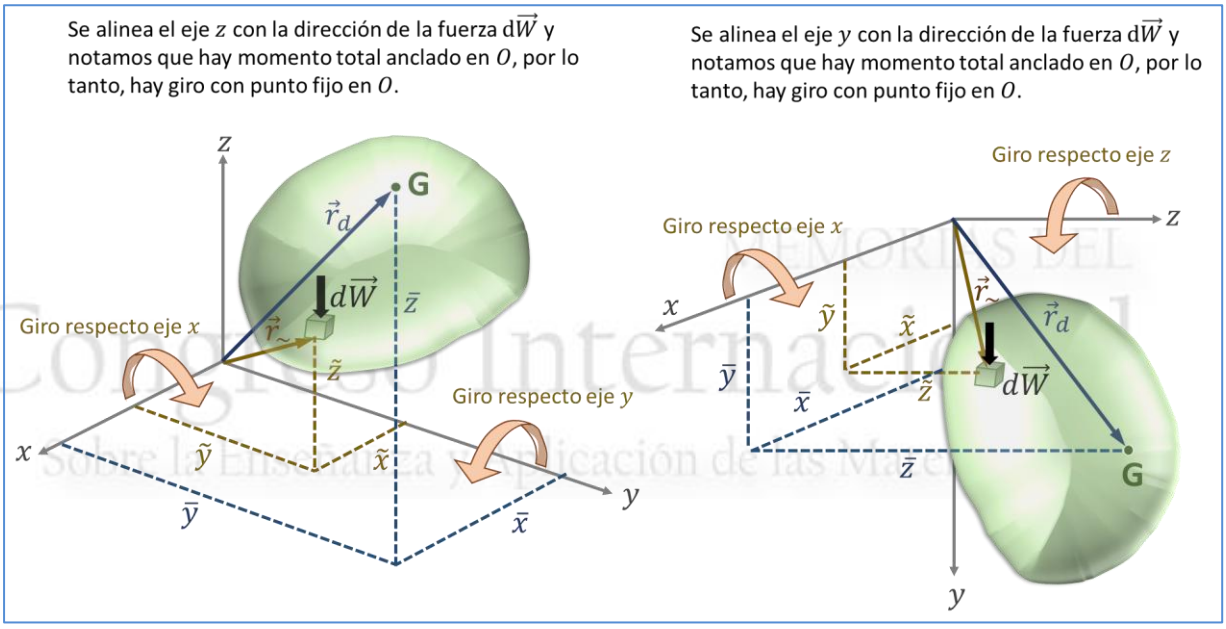


Figura 5. Primera y segunda equivalencias aplicadas a la fuerza que es el peso W sobre un cuerpo con masa. Se muestran dos orientaciones del objeto. Adaptada de INGENIERÍA MECÁNICA. ESTÁTICA (p. 448), por Hibbeler, R. C. (2010), Pearson Education.

Ahora, para encontrar el $\vec{M}_R$ tenemos que es la suma de momentos causados por cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, es decir cada $d\vec{W}$ tiene su brazo de palanca y genera un pequeño momento de giro $\mathrm{d}\vec{M}$, entonces para cada fuerza $d\vec{W}$ ubicamos su brazo de palanca que etiquetamos en general como $\vec{r}_{\sim} = \tilde{x}\,\hat{\imath} + \tilde{y}\hat{\jmath} + \tilde{z}\hat{k}$, y el pequeño momento de giro se escribe como $\mathrm{d}\vec{M} = \vec{r}_{\sim} \times d\vec{W}$ ó también $\mathrm{d}\vec{M} = (\tilde{x}\,\hat{\imath} + \tilde{y}\hat{\jmath} + \tilde{z}\hat{k}) \times d\vec{W}$, Figura 5. Como penúltimo paso, hacemos la suma continua de los pequeños momentos de giro para tener el momento de giro resultante $\vec{M}_R = \int \mathrm{d}\vec{\mathrm{M}} = \int \vec{\mathrm{r}}_{\sim} \times \mathrm{d}\vec{\mathrm{W}} = \int(\tilde{\mathrm{x}}\,\hat{\imath} + \tilde{\mathrm{y}}\hat{\jmath} + \tilde{\mathrm{z}}\hat{\mathrm{k}}) \times \mathrm{d}\vec{\mathrm{W}}$. Y finalmente, sustituimos en la segunda equivalencia: $\vec{M}_R = \vec{r}_d \times \vec{F}_R$ la cual expandimos en sus componentes en la ecuación 3 y representamos en la Figura 6.

$$\int(\tilde{x}\,\hat{\imath} + \tilde{y}\hat{\jmath} + \tilde{z}\hat{k}) \times d\vec{W} = (\bar{x}\,\hat{\imath} + \bar{y}\,\hat{\jmath} + \bar{z}\,\hat{k}) \times \int d\vec{W} \qquad (3)$$

Si usamos los diagramas de Hibbeler para las direcciones del peso en la figura a) $\vec{W} = m\vec{g} = mg\ \hat{\mathrm{k}}$ y la ubicación de la fuerza $\mathrm{d}\vec{\mathrm{W}}$ con brazo de palanca $\vec{r}_{\sim} = \tilde{x}\,\hat{\imath} + \tilde{y}\hat{\jmath}$ y sustituimos en la ecuación 3 y obtenemos la ecuación 4 y 5.

ISSN 2448 – 7945

$$\int(\tilde{x}\,\hat{\imath}+\tilde{y}\hat{\jmath}+\tilde{z}\hat{k})\times g\,dm\,\hat{k}=(\bar{x}\,\hat{\imath}+\bar{y}\,\hat{\jmath}+\bar{z}\,\hat{k})\times\int g\,dm\,\hat{k} \quad (4)$$

$$\int\tilde{\mathrm{x}}(\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{k}})\,g\,dm\;+\int\tilde{\mathrm{y}}(\hat{\mathrm{j}}\times\hat{\mathrm{k}})g\,dm\;+\int\tilde{\mathrm{z}}(\hat{\mathrm{k}}\times\hat{\mathrm{k}})\,gdm\;=\bar{\mathrm{x}}\,(\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{k}})g\int dm+\bar{\mathrm{y}}\,(\hat{\mathrm{j}}\times\hat{\mathrm{k}})g\int dm+\bar{\mathrm{z}}\,(\hat{\mathrm{k}}\times\hat{\mathrm{k}})g\int dm \quad (5)$$

Ahora tenemos por producto cruz vectoriales que $\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{k}}=-\hat{\mathrm{j}}$, $\hat{\jmath}\times\hat{\mathrm{k}}=\hat{\imath}$, $\hat{k}\times\hat{\mathrm{k}}=0$, entonces nos queda la ecuación 6.

$$-\int\tilde{\mathrm{x}}g\,dm\;\hat{\mathrm{j}}+\int\tilde{\mathrm{y}}g\,dm\,\hat{\imath}=-\bar{\mathrm{x}}\,g\int dm\,\hat{\mathrm{j}}+\bar{\mathrm{y}}\,g\int dm\,\hat{\imath} \quad (6)$$

Ahora igualando componentes en $\hat{\imath}$ y $\hat{\mathrm{j}}$ obtenemos las ecuaciones 7 y 8

$$\int\tilde{\mathrm{y}}\,g\,dm=\bar{\mathrm{y}}\,g\int dm \quad (7)$$

$$\int\tilde{\mathrm{x}}\,g\,dm\;=\bar{\mathrm{x}}\,g\int dm \quad (8)$$

Despejando en $\hat{\imath}$ y $\hat{\mathrm{j}}$ para saber las componentes $\bar{x}$ y $\bar{\mathrm{y}}$ del vector $\vec{r}_d=\bar{x}\,\hat{\imath}+\bar{y}\,\hat{\jmath}+\bar{z}\,\hat{k}$ entonces tenemos las ecuaciones 9 y 10.

$$\frac{\int\tilde{\mathrm{y}}\,g\,dm}{g\int dm}=\bar{\mathrm{y}} \quad (9)$$

$$\frac{\int\tilde{x}\,g\,dm}{g\int dm}=\bar{x} \quad (10)$$

Si giramos el esquema tal que la gravedad vaya a lo largo del eje y, notamos que tendremos ejes de giro en x y z, las ecuaciones 11 y 12 son las que se obtienen para esta nueva configuración.

$$\frac{\int\tilde{x}\,g\,dm}{g\int dm}=\bar{x} \quad (11)$$

$$\frac{\int\tilde{z}\,g\,dm}{g\int dm}=\bar{z} \quad (12)$$

Por lo que se obtiene la definición de Cetro de gravedad G como el punto donde debemos trasladar el punto de anclaje para que el cuerpo no gire debido a su peso y que sea el punto donde se concentra el peso como un “sólo punto”, donde las coordenadas del centro de gravedad quedan definidas por las ecuaciones 9, 10, 11 y 12 y se muestran en la Figura 6.

ISSN 2448 – 7945

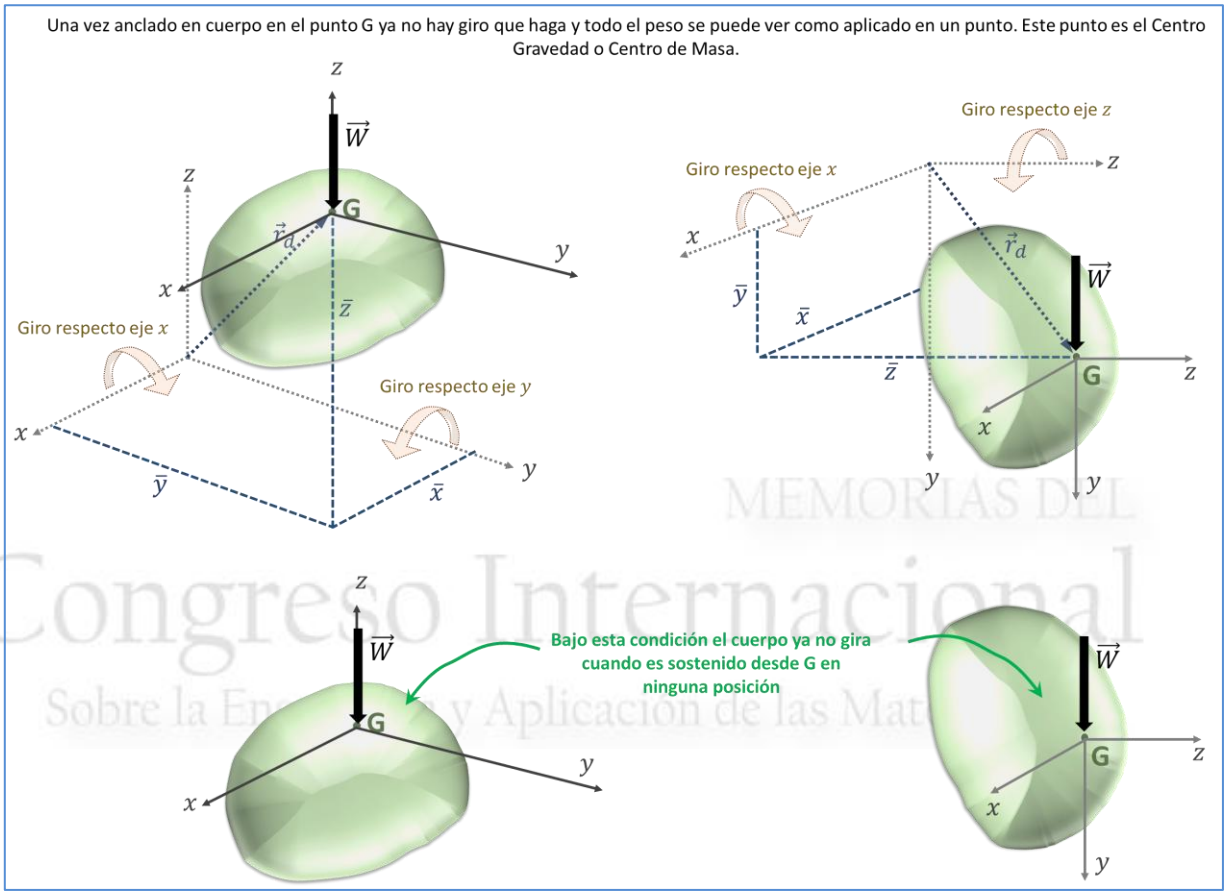


Figura 6. Una vez encontrado el brazo de palanca donde se aplica la fuerza resultante se traslada a ese punto, que es el punto de centro de gravedad donde una vez que se ancle el objeto de él ya no gira el cuerpo. Adaptada de INGENIERÍA MECÁNICA. ESTÁTICA (p. 448), por Hibbeler, R. C. (2010), Pearson Education.

4. Conclusiones

Llevamos a cabo la deducción y desarrollo de los cálculos correspondientes al Centro de Gravedad G, identificando con claridad el planteamiento físico-matemático usando la primera y la segunda equivalencia en cuerpos con masa, el centro de gravedad es un concepto fundamental en la física e ingeniería; conocer las bases de esta definición desde primeros principios en la ciencia en general impacta en todas las áreas de la ciencia.

5. Índice de referencias

- Goldstein, H. (1980). Mecánica del Centro de Masa. (2a Ed.) México: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Halliday, D., Resnick, R., & Krane, K. S. (2017). Fundamentos de Física (8a ed.). México: Cengage Learning.

ISSN 2448 – 7945

- Hibbeler, R. C. (2010). Centro de gravedad y centroide. En L. M. Cruz Castillo (12va ed.), *INGENIERÍA MECÁNICA. ESTÁTICA* (pp. 447-470). México: Pearson Education.
- Hibbeler, R. C. (2015). Análisis de Estructuras (6a ed.). México: Pearson Educación.

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

MATEMÁTICAS, MÁS INTERESANTES DE LO QUE CREES: SU APLICACIÓN A UN PROBLEMA CLÁSICO DE ELECTROMAGNETISMO

Verónica Lucero Villegas Rueda[1], Alanís Collins Carlos Enrique[2], Chacón Carreño Antonio de Jesús[3], Estrada Hernández Alan Zair[4], Carlos López Lima[5]
[1]*Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas, IPN*
[5]*Escuela Superior de Física y Matemáticas, IPN*

AP-POSM079

Resumen

En las carreras de ingeniería el entendimiento y comprensión de las matemáticas es la base fundamental para describir y aplicar fenómenos físicos a dispositivos tecnológicos en las áreas de mecánica, electromagnetismo, termodinámica, etcétera. En este trabajo aplicamos las matemáticas en el electromagnetismo clásico para resolver el campo magnético dentro de un solenoide de longitud finita l. Definimos las variables y resolvemos este caso. Posteriormente, se resuelve el caso idealizado de solenoide de longitud infinita, en la solución del problema se analizan dos tipos de procedimientos; una solución está en el problema 7.14 del libro "Elementos de Electromagnetismo" de Matthew N.O. Sadiku y la otra solución es propuesta por nosotros para comparar al final los resultados. En nuestro análisis hacemos hincapié en la elección de variables, el uso de la integral, diferencial, límites y cambios de variable, todos asociados al modelo físico que describe el fenómeno, mostrando una diferente manera de resolver un mismo problema. Se considera que al utilizar diferentes caminos para resolver un problema estimula a los estudiantes de Ciencias Básicas e Ingeniería en su aprendizaje. Este tipo de análisis impacta, por ejemplo, en los cursos de Electricidad y Magnetismo, Teoría Electromagnética y Máquinas Eléctricas impartidos en la UPIITA.

Palabras clave: *Electromagnetismo, Ingeniería, límites, solenoide, integrales.*

1. Introducción

Convivimos de manera peculiar con las matemáticas, sin saber muchas veces el alcance de esta ciencia y sus aplicaciones en diferentes ramas de estudio como las administrativas, en la ingeniería, etcétera. En los todos los cursos de ingeniería la comprensión y uso de las matemáticas es fundamental y se enseña en los primeros semestres de la carrera. En particular la aplicación de vectores, divergencias, gradientes, diferenciales e integrales es fundamental en al cálculo de campos magnéticos y eléctricos que se enseñan en cursos de electromagnetismo para después ser aplicados en los dispositivos tecnológicos. Dentro de los cursos básicos, un sistema que es de interés y es estudiado es el campo magnético dentro de un

[1*] Autor para correspondencia: vvillegasr@ipn.mx

ISSN 2448 – 7945

solenoide de $N - vueltas$ con una longitud finita, l , que lleva una corriente I que a su vez genera un campo magnético $\vec{H}$ y un campo densidad $\vec{B}$, donde la magnitud está dada por $H = \mu B$ para materiales lineales, homogéneos e isotrópicos. Sin embargo, es común que en ingeniería se utilice el valor de campo magnético calculado para un solenoide de longitud infinita, $l - infinita$, y pocas veces se profundiza en el entendimiento de la parte y uso de las matemáticas en los curso de ingeniería de teoría electromagnético en el cálculo para campo magnético $\vec{H}$ sobre el eje longitudinal dentro de un solenoide de longitud finita, $l - finita$, y a calcular este campo es el primer paso para encontrar el campo $\vec{H}$ sobre el eje longitudinal dentro del solenoide de longitud infinita, $l - infinita$, que es el que se conoce comúnmente en los cálculos matemáticos que involucran solenoides de cualquier longitud.

2. Planteamiento del problema en el libro del autor Sadiku.

En el capítulo 7 del libro “Elementos de electromagnetismo” de Mathew N. O. Sadiku el ejemplo 7.4 indica:

“Un solenoide de longitud l y radio a consta de N vueltas de alambre portador de corriente I. Demuestre que en el punto P a lo largo de su eje.

Ecuación 1. $\vec{H} = \frac{n\,I}{2}(cos(\theta_2)\,cos(\theta_1))\hat{k}$

Donde $n = N/l$, θ_1 y θ_2 son los ángulos subtendidos en P por las vueltas en el extremo. Demuestre asimismo que si $l >> a$, en el centro del solenoide, entonces $\vec{H} = n\,I\,\hat{k}$ ” (Sadiku, 2003).

2.1 Completando la solución por el autor Sadiku.

Para resolver como el autor sugiere nosotros completamos los pasos que el autor ha omitido o que están dispersos en diferentes capítulos del libro. Primero, analizaremos el problema en una espira del solenoide. Sabemos que la ecuación del diferencial de Biot-Savart del campo magnético está dada por:

Ecuación 2. $d\vec{H} = \frac{I\,d\vec{l} \times \vec{R}}{4\pi\,R^3}$

Ahora, en la figura 1 podemos observar que el vector $\vec{R}$ es el siguiente:

Ecuación 3. $\vec{R} = z\hat{k} - a\hat{r}$

La magnitud del vector $R = |\vec{R}|$ está dado por las componentes de la Ecuación 3

Ecuación 4. $|\vec{R}| = \sqrt{(z^2 + a^2)}$

Y el diferencial de línea en la espira queda en términos de la longitud de arco de la espira, ecuación 5.

Ecuación 5. $d\vec{l} = a\,d\theta\hat{\theta}$

ISSN 2448 – 7945

Sustituyendo las ecuaciones (3),(4) y (5) en la ecuación del diferencial del campo magnético en (2), se obtiene

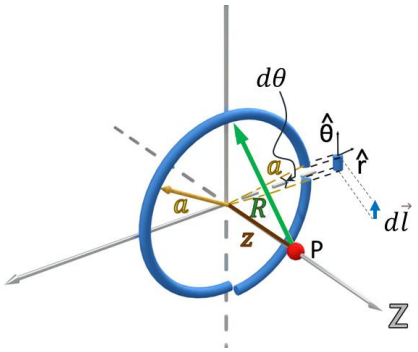


Figura 1. Espira de radio a con corriente I, que genera un campo $\vec{H}$ en el punto P sobre el eje longitudinal, se muestran los diferenciales $d\vec{l}$, dθ, y los vectores unitarios cilíndricos.

Ecuación 6. $d\vec{H} = \frac{I(a\,d\theta\,\hat{\theta})\times(z\hat{k}-a\hat{r})}{4\pi\,(z^2+a^2)^{3/2}}$

Haciendo el producto cruz de la ecuación (6) y considerando

	$\hat{r}$	$\hat{\theta}$	$\hat{k}$
$d\vec{l}$	0	$a\,d\theta$	0
$\vec{R}$	$-a$	0	z

$$\hat{r}(ad\theta z) + \hat{k}(a^2 d\theta)$$

Entonces de la ecuación (6) y el alberga del producto cruz

Ecuación 7. $d\vec{H} = \frac{I[\,\hat{r}(ad\theta z)+\hat{k}(a^2 d\theta)]}{4\pi\,(z^2+a^2)^{3/2}}$

Ecuación 8. $d\vec{H} = \frac{I(ad\theta z)\hat{r}}{4\pi\,(z^2+a^2)^{3/2}} + \frac{I(a^2 d\theta)\hat{k}}{4\pi\,(z^2+a^2)^{3/2}}$

Como el campo magnético se cancela en la dirección radial el campo magnético es cero y obtenemos

Ecuación 9. $d\vec{H} = \frac{I(a^2 d\theta)\hat{k}}{4\pi\,(z^2+a^2)^{3/2}}$

Integramos para saber el campo magnético producido por una espira es decir, la integral es de 0 a 2π

Ecuación 10. $\int d\vec{H} = \int_0^{2\pi} \frac{I(a^2 d\theta)\hat{k}}{4\pi\,(z^2+a^2)^{3/2}}$

ISSN 2448 – 7945

Ecuación 11. $\vec{H} = \frac{Ia^2}{4\pi(z^2+a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta \, \hat{k}$

Ecuación 12. $\vec{H} = \frac{Ia^2 2\pi}{4\pi(z^2+a^2)^{3/2}} \hat{k} = H_k \hat{k}$

Simplificando (12) tenemos que el campo apunta a lo largo del eje z, con componente en H_k, que es el campo de una sola espira a una distancia z de su centro sobre el eje longitudinal, como

Ecuación 13. $H_k = \frac{Ia^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$

Si colocamos las espiras juntas aún podemos considerar la superposición discreta de campo magnéticos de las $N' - espiras$ cuando estemos a una altura z del centro de ellas, considerando la altura z idéntica para las pocas espiras que consideramos, como se muestra en la Figura 2. El campo magnético para $N' - espiras$ queda como la suma de campos, que se deduce a multiplicar por $N' - veces$ el campo para una sólo espira, entonces

Ecuación 14. $N'H_k = N' \frac{Ia^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$

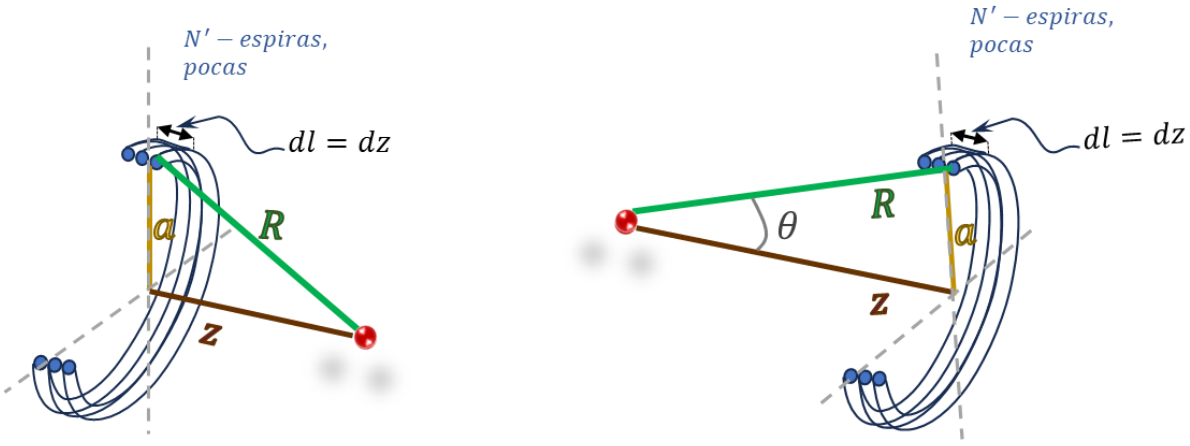


Figura 2. Superposición discreta con la suma directa de contribuciones del campo magnético $\vec{H}$ para $N' - espiras$ y longitud dl, para esta cantidad de espiras se considera que la distancia z es la misma para cada una de ellas, se muestra las configuraciones para ambos lados de ubicación de las $N' - espiras$.

Ahora, si consideramos que las $N' - espiras$ son una fracción pequeña del total de las $N - espiras$ de un solenoide de longitud l, donde se define la densidad $n = N/L$, que es el número de espiras por unidad de longitud y es constante entonces tendremos que el campo de las $N' - espiras$ que son parte de un solenoide queda como sólo una parte del campo total porque sólo tenemos una fracción de las espiras Figura 3, ecuación 15.

ISSN 2448 – 7945

Ecuación 15. $dH_{soleniode} \equiv N'H_k = \frac{N' Ia^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$

Pero como la densidad $n\ es\ constante$ entonces las $N' - espiras$ ocupan un "trozo de longitud del solenoide" dl y se debe tener también que $n = N'/dl$, ó despejando $N' = n\ dl$, quedando en términos del diferencial de longitud del solenoide, ecuación 16.

Ecuación 16. $dH_{solenoide} = \frac{n\ dl\ Ia^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$

El diferencial de línea coincide con z, cambiamos dl por dz, $dl = dz$. Ahora, como queremos integrar con respecto a los ángulos, haremos un cambio de variable de $z = \frac{a}{\tan\theta}$. Para dz, derivamos la ecuación $dz = -a\ csc^2(\theta)\ d\theta$. Desarrollamos la ecuación para que la integral quede más sencilla $dz = -\frac{a}{sen^2(\theta)}d\theta = \frac{-a}{\frac{a^2}{(z^2+a^2)}}d\theta = \frac{-(z^2+a^2)^{3/2}sen(\theta)}{a^2}d\theta$. Sustituimos en la ecuación (26) y obtenemos las ecuaciones (17), (18), (19) y 20.

Ecuación 17. $dH_{soleniode} = \frac{-(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}\ sen(\theta) n\ Ia^2 d\theta}{2a^2(z^2+a^2)^{3/2}}$

Ecuación 18. $dH_{solenoide} = \frac{-\ sen(\theta)\ n\ Id\theta}{2}$

Ecuación 19. $dH_{solenoide} = \frac{-(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}\ sen(\theta) n\ Ia^2 d\theta}{2a^2(z^2+a^2)^{3/2}}$

Ecuación 20. $dH_{solenoide} = \frac{-\ sen(\theta)\ n\ Id\theta}{2}$

Integramos la ecuación (20) para tener todas las contribuciones:

$$H_{solenoide} = \int dH_{solenoide} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{-\ sen(\theta)\ n\ Id\theta}{2} = -\frac{I\ n}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} sen(\theta)\ d\theta$$

La ecuación 20 ya da el resultado del campo para un solenoide de longitud finita, Figura 3.

Ecuación 21. $\vec{H}_{solenoide} = -\frac{n\ I}{2}(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))\hat{k}$

MEMORIAS DEL Congreso Internacional Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

ISSN 2448 – 7945

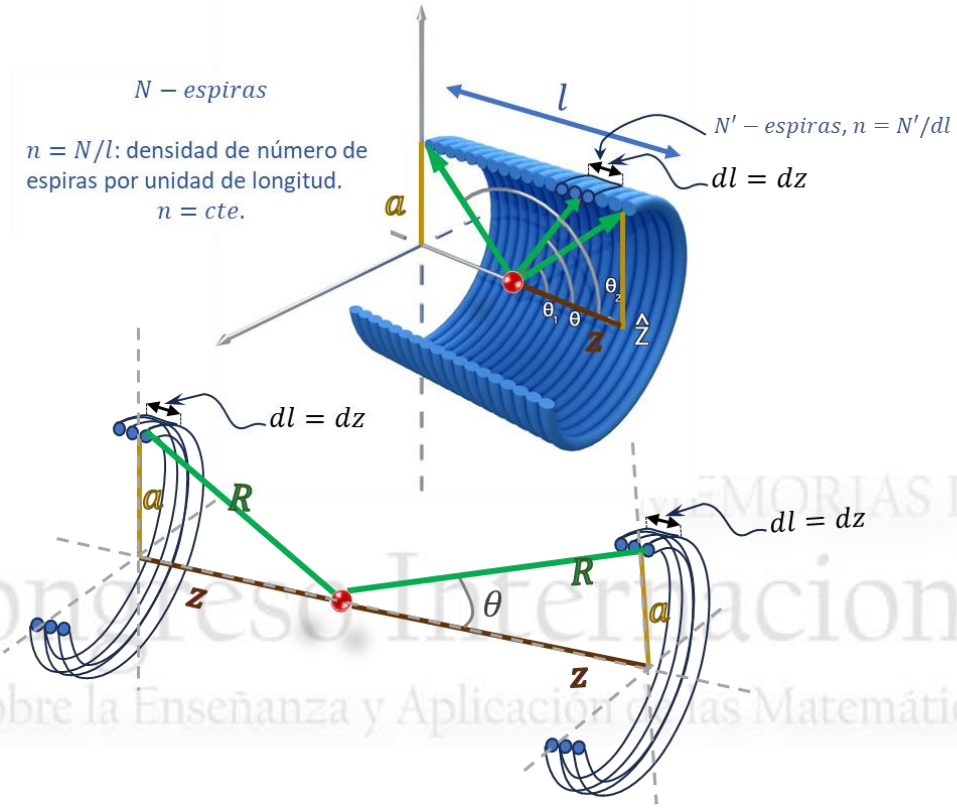


Figura 3. Solenoide con N espiras y longitud l, tomando fracciones de $N' - espiras$ que caben en un trozo de longitud dl del solenoide para hacer la superposición continua mediante la integral de las contribuciones al campo magnético del solenoide $H_{solenoide}$. Se toma como variable el ángulo θ, abriendo desde la horizontal en el eje z, notamos que la longitud finita va desde θ_1 a θ_2 entre valores de 0 a π.

Si $l >> a$, tendremos el caso del solenoide largo que en límites matemáticos se tiene que cuando $\lim_{\theta_2 \to \pi} l = -\infty$ es equivalente a la que la longitud se vaya a $-\infty$, y cuando $\lim_{\theta_1 \to 0} l = +\infty$ tenemos que $\vec{H}_{solenoide} = \frac{n\,I}{2}(\cos(0) - \cos(\pi))\hat{k} = \frac{n\,I}{2}(2)\hat{k}$. La ecuación (22) es el campo para un solenoide de longitud infinita desde $-\infty$ a $+\infty$ en eje z.

Ecuación 22. $\vec{H} = n\,I\,\hat{k} = \frac{N\,I}{l}\hat{k}$

2.2 Solución por los autores

Nosotros proponemos un cambio de variable distinta al de Sadiku, con $z = a\,\tan\alpha$ tomando el diferencial $dz = a\,\sec^2\alpha\,d\alpha$, entonces $z^2 + a^2 = a^2(1 + \tan^2\alpha)$, esta nueva sustitución se hace en las ecuaciones 15 y 16 dando la ecuación 23. Este cambio de variable se muestra en la figura 4.

ISSN 2448 – 7945

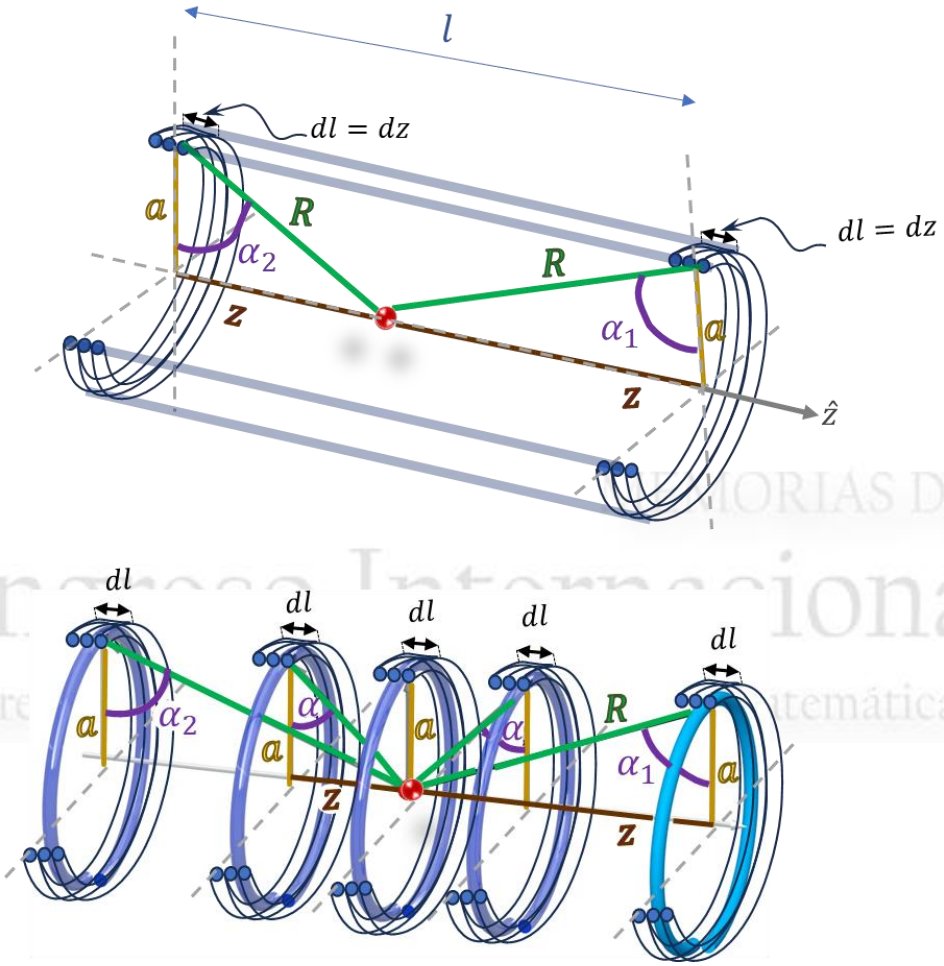


Figura 4. Solenoide con N espiras y longitud l, tomando fracciones de $N' - espiras$ que caben en un trozo de longitud dl del solenoide para hacer la superposición continua mediante la integral de las contribuciones al campo magnético del solenoide $H_{solenoide}$. Se toma como variable el ángulo α, abriendo desde las N'-espirales hasta el punto rojo, notamos que la longitud finita l va desde α_1 a α_2 entre valores de $\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{\pi}{2}$.

Ecuación 23. $d\vec{H} = \frac{n\ I\left(a\ \sec^2\alpha\ d\alpha\right)}{2(1+\tan^2\alpha)^{3/2}}\hat{k}$

Usando identidades trigonométricas tenemos la reducción de la ecuación 23 a la ecuación 24.

Ecuación 24. $d\vec{H} = \frac{n\ I\ d\alpha}{2\sec\alpha}\hat{k}$

Integrando la ecuación 24 desde α_1 a α_2, es decir, de valores de ángulo negativos a valores de ángulo positivos, ecuación 25. Ahora integrando la ecuación 25 encontramos el campo para un solenoide de longitud finita de α_1 a α_2, ecuación 26.

Ecuación 25. $\vec{H} = \frac{nI}{2}\int_{\alpha 1}^{\alpha 2}\cos\alpha\ \ d\alpha\ \hat{k}$

Ecuación 26. $\vec{H} = \frac{nI}{2}(sen\alpha_2 - sen\alpha_1)\hat{k}$

ISSN 2448 – 7945

Notamos que las variaciones del ángulo α van de $+\pi/2$ a $-\pi/2$ para longitud infinita, y que los signos van como se indica en la figura 5 según el sentido de apertura del ángulo.

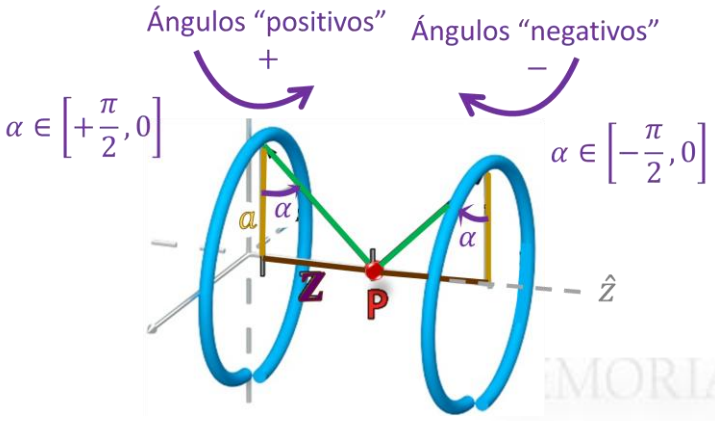


Figura 5. Los ángulos para longitud $l - infinita$ van desde $+\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{\pi}{2}$. Lo que expresado en límites es que $\alpha_1 \to -\frac{\pi}{2}$ y que $\alpha_2 \to \frac{\pi}{2}$.

Para longitud infinita tenemos que $\alpha_1 \to -\frac{\pi}{2} \Rightarrow sen\,\alpha_1 = -1$ y que $\alpha_2 \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow sen\,\alpha_2 = 1$. Sustituyendo los valores de las funciones trigonométricas y obtenemos $\vec{H} = \frac{nI}{2}\left(sen(+\frac{\pi}{2}) - sen(-\frac{\pi}{2})\right)\hat{k} = \frac{nI}{2}(-1-(-1))\hat{k} = nI\hat{k}$. Lo anterior resulta en la ecuación (27) que es la misma que la ecuación (22).

Ecuación 27. $\vec{H} = \frac{N}{L} I\hat{k}$

Demostrando así que se llega al mismo resultado que el autor del libro.

4. Conclusiones

La aplicación de conceptos matemáticos en problemas clásicos de electromagnetismo es crucial para comprender y predecir fenómenos físicos en el mundo real. Desde las ecuaciones de Maxwell hasta la ley de Coulomb, el uso de cálculo vectorial, álgebra lineal y análisis diferencial permite modelar campos eléctricos y magnéticos, calcular fuerzas y energías, y resolver problemas de propagación de ondas electromagnéticas, como se mostró anteriormente. La matemática proporciona la base teórica para desarrollar tecnologías como la electricidad, el magnetismo, las telecomunicaciones y la electrónica, y su aplicación precisa y rigurosa es fundamental para la innovación y el avance en estas áreas.

5. Índice de referencias

Sadiku, M. N. (2003). Ley de Biot Savart. En M. N. Sadiku, *Elementos de Electromagnetismo* (págs. 272-275). CDMX: Alfa Omega.

ISSN 2448 – 7945

FACTORES QUE INFLUYEN EN EL DESEMPEÑO DEL APRENDIZAJE DE MATEMATICAS DISCRETAS EN CIENCIAS COMPUTACIONALES

Gutiérrez Mejía Darwin[1, *], Tirado Lule Judith Margarita[2] y Vázquez González Leonor[3]
[1,2,3]*Escuela Superior de Cómputo (ESCOM) del IPN,*
Av. Juan de Dios Bátiz s/n esq. Av. Miguel Othón de Mendizábal,
Col. Lindavista, Gustavo A. Madero, C. P. 07738, Ciudad de México.

IP-POSM064

Resumen

El aprendizaje de las matemáticas en cualquiera de sus áreas es y ha sido una tarea compleja pero fundamental en la formación de los estudiantes, y las matemáticas discretas no son la excepción pues están formadas por conceptos y métodos matemáticos que ayudan a resolver problemas que involucran una cantidad "numerable", generalmente finita, de elementos o procesos, y las conexiones entre ellos. Así, las Matemáticas Discretas tiene un carácter formativo para carreras en sistemas computacionales, pues le sirven al estudiante como instrumento para desarrollar habilidades fundamentales en su formación, como son: redactar con claridad, formalizar conceptos y adquirir destrezas lógicas para enfrentar situaciones con precisión. La unidad de aprendizaje (UA) de matemáticas discretas es clave en la formación inicial de estudiantes de las carreras de la Escuela Superior de Cómputo del IPN, donde los alumnos la consideran una asignatura difícil de aprender.
Este trabajo presenta los resultados del diagnóstico realizado a los estudiantes para analizar los principales factores que influyen en el aprendizaje de esta UA en los estudiantes. De esta forma, las dificultades se condensaron en tres factores: (AP) autopercepción, (AA) autoeficacia y autonomía y, (AR) actividad en el aula y retroalimentación; encontrando que el factor (AR) es señalado como el factor predominante que influye en el desempeño de los alumnos. Esto supone un mayor compromiso tanto de los profesores como de los alumnos para lograr los objetivos deseados por ambos.

Palabras clave: *matemáticas, discretas, factores, aprendizaje.*
.

1. Introducción

El aprendizaje de las matemáticas en cualquiera de sus áreas es y ha sido siempre una tarea compleja pero fundamental en la formación de los estudiantes de educación superior; donde uno de los objetivos de la enseñanza, como es de esperarse, es el de formar profesionales con las capacidades y competencias necesarias para que puedan realizar aportes sociales en ámbitos como el económico, intelectual y cultural. Sin embargo, el aprendizaje de las matemáticas en general, se considera una asignatura difícil de aprender tanto por los estudiantes, como de enseñar por parte de los docentes (Nortes, 2010).
Particularmente, la matemática discreta está compuesta por una colección de conceptos y métodos matemáticos que ayudan a resolver problemas que involucra

[1*] Autor para correspondencia: DGUTIERREZM@IPN.MX

ISSN 2448 – 7945

una cantidad “numerable”, generalmente finita, de elementos o procesos, así como las conexiones entre ellos (Hart, 2018; Sandefur, 2022). De esta manera, la matemática discreta tiene un carácter formativo para carreras en sistemas computacionales, pues sirve de instrumento que le permite al estudiante desarrollar habilidades fundamentales en su formación, como son: redactar con claridad, formalizar conceptos y adquirir destrezas lógicas para enfrentar situaciones nuevas con precisión.

Uno de los objetivos de la unidad de aprendizaje (UA) de matemáticas discretas, es la de desarrollar capacidad lógica y abstracta en los estudiantes, principalmente a través de la resolución de diversos problemas. Las competencias obtenidas preparan al estudiante para adaptarse a una situación problemática, interpretarla, comprenderla, modelarla y luego presentar una solución efectiva, todo esto, haciendo frente a la ansiedad matemática, que la propia UA representa para el estudiante (Serna, 2013, Delgado-Monge, 2020).

En la Escuela Superior de Cómputo (ESCOM) del IPN, la UA de matemáticas discretas comprende uno de los cursos de primer semestre de las tres carreras que ofrece la escuela (Ingeniería en Sistemas Computacionales, Ingeniería en Inteligencia Artificial y Licenciatura en Ciencia de Datos); en este curso se estudia la lógica matemática y los objetos discretos (limitados al conjunto de los números enteros); siendo los temas fundamentales: lógica matemática, conjuntos, números enteros, relaciones, álgebra Booleana y grafos

Algunas investigaciones encuentran que gran parte de los errores que los alumnos presentan, están relacionados de manera directa con los contenidos y los procedimientos matemáticos más abstractos y formales (Del Sastre, 2008).

Los estudios en el área son insuficientes y muchos de ellos se encuentran elaborados con muestras pertenecientes a instituciones extranjeras (por ejemplo, ver González-Ramírez, 2020), por lo que es importante conocer los factores que influyen en el aprendizaje, en el contexto mexicano. Es por ello que en este trabajo analizamos tres factores principales que influyen en el aprendizaje de las matemáticas discretas de la ESCOM-IPN, a saber: la perspectiva que tienen los estudiantes sobre su propio aprendizaje; la perspectiva que tienen sobre sus propias capacidades de adquirir el conocimiento y finalmente, la perspectiva del aprendizaje que el estudiante adquiere en el aula. Tomando en consideración las repercusiones ocasionadas por la etapa de COVID-19, consideramos que los estudiantes encontraran que el último factor es un factor que influye fuertemente en su aprendizaje.

2. Metodología o desarrollo

2.1 Participantes e instrumento

Los participantes fueron estudiantes que ya habían cursado la UA, pertenecientes a la Escuela Superior de Cómputo del IPN (ESCOM-IPN). Los estudiantes cursaron un total de 108 horas de la UA de matemáticas discretas en un semestre. La muestra está compuesta de 168 alumnos de la ESCOM-IPN, de los cuales 78%

ISSN 2448 – 7945

eran hombres y 22% mujeres. La edad promedio de los participantes es de 20.4 años con una desviación estándar de 1.13 años.

Este estudio sigue una metodología cuantitativa. El instrumento de evaluación fue una encuesta aplicada a través de un cuestionario en Google Forms©, compuesta por un total de 28 preguntas (las dos primeras sobre sexo y edad). El cuestionario recolecta las dificultades que los estudiantes manifiestan tener sobre el curso de Matemáticas discretas, y se solicita a los participantes que respondan en una escala tipo Likert de cinco puntos, valorada de la siguiente manera 0=Muy en desacuerdo, 1=En desacuerdo, 2=Indiferente, 3=De acuerdo y 4=Muy de acuerdo.

2.2 Factores

Los estadísticos básicos sobre las preguntas sobre el sexo y la edad (sin número) ya se mencionaron previamente. El resto de los reactivos del cuestionario (26) fueron agrupados en tres factores, como se presenta en los siguientes apartados.

2.2.1 Autopercepción (AP)

La autopercepción (AP) tiene que ver con cómo sobrellevar la parte afectiva hacia el aprendizaje de las matemáticas, cómo tolerar las emociones, la frustración y la ansiedad que provoca el estudio de las matemáticas discretas; además de reconocer las propias habilidades para resolver problemas (preguntar, observar y experimentar, plantear hipótesis, plantear conjeturas, probar, etc.). Este factor está diseñado a partir de los ítems: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 y 26 (Tabla 1).

Tabla 1. Preguntas del cuestionario para factor AP.

#	Pregunta del cuestionario.
1	Al estudiar, NO me abrumo/canso/distraigo rápidamente.
4	Estudio con mucha poca antelación para los exámenes escritos.
7	Me he dado cuenta de que a veces, no interpreto bien las instrucciones, esquemas, figuras.
10	Resuelvo los problemas no muy rápido, pero ágilmente.
13	Siento que los ejercicios del examen están al nivel de los ejercicios hechos en clase.
16	Siento que los ejercicios del examen están al nivel que los ejercicios que el profesor sugiere para hacer extra (en casa o en su tiempo de repaso).
19	Puedo controlar los nervios para no fallar.
22	No tengo dificultad para entender que es lo que me piden demostrar.
24	Cuando ya identifiqué la problemática, NO tengo dificultad para proceder con lo quiero demostrar.
26	Considero que es objetivo aprobar la materia sea como sea.

ISSN 2448 – 7945

2.2.2 Autoeficacia y autonomía (AA)

La autoeficacia y autonomía (AA) es la confianza que posee el estudiante para enfrentar por sí mismo sus estudios con guía del profesor, aunque sin excesiva dependencia. Se obtuvo a partir de los ítems: 2, 5, 8, 11, 14, 17 y 20 (Tabla 2).

Tabla 2. Preguntas del cuestionario para factor AA.

#	Pregunta del cuestionario.
2	Mis bases de bachillerato son suficientes para la materia
5	La materia es asequible de entender
8	Los conceptos abstractos NO me confunden
11	Gran parte de mi aprendizaje de la materia recae más en mí que en lo visto en clase
14	Leo bien las instrucciones y no me salto instrucciones para ir directo a los problemas
17	Puedo concentrarme en el examen
20	Llego al examen habiendo estudiado mucho

2.2.3 Actividad en el aula y retroalimentación (AR)

La actividad en el aula y retroalimentación (AR) comprende las actividades docentes que realiza el profesor en el aula para propiciar un ambiente de aprendizaje adecuado, así como la retroalimentación del desempeño académico parcial vía las evaluaciones continuas.

Tabla 3. Preguntas del cuestionario para factor AR.

#	Pregunta del cuestionario.
3	Puedo observar la relación de la materia con mi carrera
6	Siento que mi profesor explicó con claridad
9	Para resolver un problema de la materia, debo aplicar soluciones creativas a los problemas
12	Uno de los objetivos de la materia es tener la capacidad de demostrar cualquier ecuación/formula/ resultado de los temas de estudio
15	Los problemas de la materia se pueden resolver cuando el profesor resuelve más de un ejercicio
18	Se necesita resolver muchos ejercicios para aprender a formalizar y pensar de forma lógica
21	Los problemas de la materia son situaciones que el profesor propone para que el estudiante aprenda los conceptos
23	Prefiero controlar la ansiedad y revisar mis respuestas antes que terminar rápido

ISSN 2448 – 7945

25	Puedo resolver problemas, tomando como referencia los problemas que resuelve el profesor en clase

El factor AR se construyó este índice a partir de los ítems: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 y 27 (Tabla 3).

3. Resultados y análisis

El estudio utiliza técnicas de estadística descriptiva que incluyen la construcción de tablas, gráficas y medidas de dispersión. El presente trabajo implementó un enfoque cuantitativo para identificar el factor de mayor dificultad, reportado por las respuestas de los estudiantes. El diseño del cuestionario destinado a delimitar los tres factores fue realizado a partir de información de la literatura similar (Junaedi, 2015; Sandefur 2022, entre otros); experiencias como docentes de los autores; y también se consideraron "comentarios" hechos por los propios estudiantes sobre lo que ellos identifican como necesario para aprender y aprobar la unidad de aprendizaje (algunos de esos comentarios se ilustran en la Figura 1).

- Ser autodidacta
- Hacer muchos ejercicios
- La constancia y la determinación
- Practicar, conocer bien las bases del tema
- Razonar y repasar la mayoría es lógica más que fórmula
- Paciencia por parte de los profesores, principalmente a la hora de demostrar, ese es un factor en la cual muchos alumnos fallan
- Entender bien de dónde surgen los problemas y cómo solucionarlo y con ejercicios parecidos a un examen
- Ser constante
- Estudiar por tu cuenta y tener un buen maestr@
- Aprender sobre abstracción y tener en cuenta y claro, las maneras de expresar e interpretar los problemas y soluciones qué se piden
- Que se realicen ejercicios de todos los temas pero que sean de acuerdo al nivel del examen
- Estudiar y repasar con ejercicios
- Estudio constante y practica de muchos ejercicios
- interés (Promovido por incentivos mayores que aprobar)
- Motivación
- Mejores profesores que sean pacientes con el rezago que hubo por pandemia
- Un buen maestro y un alumno perseverante
- Practicar mucho y no tomarse a la ligera la materia por qué es un poco pesada por los conceptos que usa pero es bastante divertida
- Ser constante es algo fundamental, puedes tener el mejor profesor pero por no estudiar de forma constante repruebas o tener el peor profesor y estudiar bastante para aprobar.
- Estudiar y repasar los apuntes vistos en clase e investigar más por cuenta propia.
- resolución de ejercicios
- Demostrar sí se puede, si no, dar un contraejemplo
- un buen profesor
- Realizar al menos un ejercicio

Figura 1. Percepción de los estudiantes para aprender y aprobar la UA de matemáticas discretas.

3.1 Validez de la estructura interna del cuestionario

Se utilizó el paquete estadístico DataAnalysis de Excel®, para el análisis de la evidencia de validez de la estructura interna del cuestionario, el cual obtuvo el indicador de la α de Cronbach de 0.72 (>7.0). Este valor indica que la consistencia interna del instrumento es bastante aceptable.

3.2 Interpretación de las puntuaciones

Del análisis de los resultados obtenidos, se espera dar indicios sobre cuál de los tres factores estudiados es dominante del desempeño escolar de los estudiantes en la unidad de aprendizaje de matemáticas discretas. Los datos estadísticos

ISSN 2448 – 7945

básicos de las preguntas correspondientes a cada uno de los tres factores se reportan en la Tabla 4.

Tabla 4. Estadísticos de los tres factores propuestos.

Puntuaciones↓	Autopercepción (AP)	Autoeficacia y autonomía (AA)	Actividad en aula y retroalimentación (AR)
Mínima	2	7	16
Máxima	29	24	39
Promedio	17	14.77	28.51
Desviación	5.1	3.68	4.12

La Figura 2 muestra los promedios por pregunta de cada uno de los 3 factores.

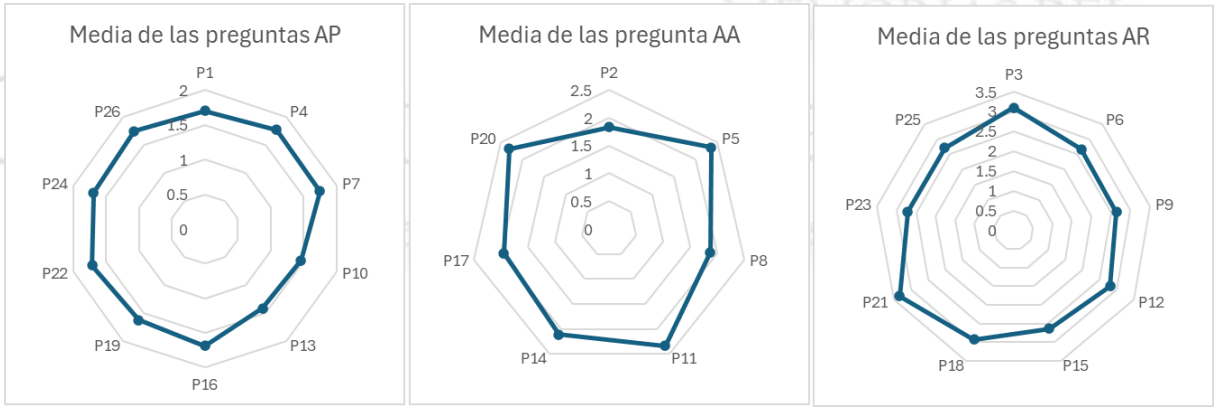


Figura 2. Media de las preguntas de cada uno de los tres factores (AP, AA, AR).

La escala para cada factor se obtiene sumando el puntaje obtenido por cada elemento de la muestra. De esta forma, los rangos de las escalas del cuestionario son: [0,40] para AP; [0,28] para AA y finalmente, [0,36] para AR. La interpretación de los rangos de valores para cada factor es:

- AP: para valores entre 31 y 40 la percepción es muy alta; para valores entre 21 y 30 la percepción es moderadamente alta; para valores entre 11 y 20 la percepción es media; para valores por debajo de 11, la percepción es baja.
- AA: para valores entre 22 y 28 la percepción es muy alta; para valores entre 15 y 21 la percepción es moderadamente alta; para valores entre 8 y 14 la percepción es media; para valores por debajo de 8, la percepción es baja.
- AR: para valores entre 28 y 36 la percepción es muy alta; para valores entre 19 y 27 la percepción es moderadamente alta; para valores entre 10 y 18 la percepción es media; para valores por debajo de 10, la percepción es baja.

Los resultados conjuntos para los tres factores se presentan en la Tabla 5. De estos resultados observamos que los estudiantes tienen, en su mayoría (un 65%), una autopercepción media sobre sus propias habilidades y un manejo medio de las emociones que provoca el aprendizaje de la materia de matemáticas discretas (estrés, frustración, ansiedad, etc.).

ISSN 2448 – 7945

Por su parte, los estudiantes reportan tener autoeficacia y autonomía entre media y moderada (ambas suman cerca del 95%), es decir, perciben tener buna confianza para afrontar la materia por sí mismos, con una interacción provechosa con el profesor.

Tabla 5. Percepciones observadas por los alumnos en los tres factores (AP, AA, AR)

	Nivel para AP		Nivel para AA		Nivel para AR	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
Percepción muy alta	0	0.00%	6	3.57%	51	30.36%
Percepción moderada	37	22.02%	80	47.62%	108	64.29%
Percepción media	109	64.88%	79	47.02%	9	5.36%
Percepción muy baja	22	13.10%	3	1.79%	0	0.00%
Totales	168	100%	168	100%	168	100%

Finalmente, los estudiantes reportan tener una percepción de moderada a alta (30.36% y 64.29%, respectivamente) en la actividad en el aula y retroalimentación; esto indica que los estudiantes consideran que la actividad en el aula y la retroalimentación que obtienen del profesor es, entre los tres factores planteados, el factor que más influencia tuvo en su proceso de aprendizaje de la materia.

4. Conclusiones

Las matemáticas discretas se consideran un pilar para todos aquellos alumnos que estudian carreras referentes a los sistemas computacionales, es por ello que en el presente trabajo, hemos documentado una serie de factores que influyen en el aprendizaje de la UA de matemáticas discretas. Reconocemos la importancia de trascender a la identificación de las causas que provocan las dificultades que los alumnos enfrentan en el aprendizaje de la matemática discreta como un aporte a la educación matemática, esto debe servir para orientar la práctica de los profesores, la elaboración de recursos educativos de apoyo (libros de texto, guías de estudio, cuestionarios, etc.). Estos conceptos deben abordarse a partir de las estrategias pedagógicas que emplean los docentes, a fin de asegurar que los estudiantes reflexionen sobre los posibles errores y que esto permita enfocarse en conceptos más amplios y puedan darles significado a los objetos matemáticos.
Del análisis de las respuestas proporcionadas por los estudiantes, se llegó a la conclusión de que las dificultades no se centran únicamente en la complejidad de los conceptos abstractos de las matemáticas discretas, sino también en la capacidad de los alumnos a sobreponerse al estrés que ocasiona este tipo de asignaturas, así como en los retos que representa formalizar las respuestas, el número de estudiantes por aula y la dedicación de los docentes en cuanto a retroalimentación oportuna, la atención personalizada a los estudiantes (con apoyo

ISSN 2448 – 7945

de las tutorías), además de la misma impartición de la clase. Las principales dificultades de las estudiantes relacionadas con el aprendizaje de la matemática discreta se condensaron en tres factores: (AP) autopercepción, (AA) autoeficacia y autonomía y, (AR) actividad en el aula y retroalimentación; encontrando que el factor (AR) es señalado como el factor predominante que influye en el desempeño de los alumnos. Es decir, los alumnos consideran que, en el desarrollo de la clase, cuenta mucho la preparación, disponibilidad y la actitud del profesor; así como las actividades propuestas y la retroalimentación oportuna por parte del docente. Esto supone un mayor compromiso tanto de los profesores como de los alumnos para lograr los objetivos deseados por ambos. De parte de los profesores, su compromiso radica en desarrollar una instrucción más efectiva para conseguir la atención e interés de los estudiantes y en los alumnos, la obligación es la de hacerse consientes de la importancia de la UA en su carrera, así como de la responsabilidad que tienen ellos en su aprendizaje, pues como se observa en los comentarios (Figura 1), los alumnos mencionan que deben trabajar más en realizar más ejercicios, repasar e investigar por su cuenta. Los resultados de esta investigación exhortan a la institución a crear propuestas docentes para contribuir a elevar los niveles rendimiento académico en la UA de Matemáticas Discretas.

5. Índice de referencias

- Delgado-Monge, I., Castro-Martínez, E. & Pérez-Tyteca, P. (2020). Estudio comparativo sobre ansiedad matemática entre estudiantes de Costa Rica y España. *Revista Electrónica Educare*, 24(2), 296-316.
- Del Sastre, M.; Panella, E. (2008). Dificultades para el aprendizaje de matemática discreta. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C*. 507-515.
- González-Ramírez T. y García-Hernández A. (2020). Estudio de los factores de estudiantes y aulas que intervienen en el 'engagement' y rendimiento académico en Matemáticas Discretas. *Revista Complutense de Educación*, 31(2), 195-206.
- Hart, E. W. & Martin, G. W. (2018). Discrete Mathematics is Essential Mathematics in a 21st Century School Curriculum. In E. Hart and J. Sandefur (Eds.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: Curriculum and Research*. Springer International Publishing.
- Junaedi, I., Suyitno, A. Sugiharti, E. & Eng, C. K. (2015). Disclosure Causes of Students Error in Resolving Discrete Mathematics Problems Based on NEA as A Means of Enhancing Creativity. *International Journal of Education*, 7(4), 31-42.
- Nortes, A. y Nortes, R. (2010). Resolución de Problemas de Matemáticas en las pruebas de acceso a la Universidad. Errores significativos. *Education Siglo XXI*, 28(1), 317- 342.
- Sandefur, J., Lockwood, E., Hart, E. (2022). Teaching and learning discrete mathematics. *ZDM Mathematics Education* 54, 753–775.

ISSN 2448 – 7945

268 • Serna, M., Polo, J.A. (2014). Lógica y abstracción en la formación de ingenieros:
269 una relación necesaria. *Ingeniería, Investigación y Tecnología*. 15(2), 299–310.

MEMORIAS DEL
Congreso Internacional
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas