EN-CASM016

La interpolación de Whittaker-Shannon empleando Maple usos de la función seno cardinal.

Pedro Iván Ramírez Montes [1] Frida María León Rodríguez [1] José Luz Hernández Castillo [1]

[1]Departamento de Matemáticas Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán

Introducción

En este trabajo presentamos el uso del software matemático Maple, para desarrollar una secuencia de actividades que inicia con proporcionar al estudiante una o varias funciones (señal de banda limitada), se le solicita el calculo de la frecuencia máxima, se establece la frecuencia de Nyquist y se prueban dos o mas frecuencias por encima o por de bajo de esta para obtener muestras de la función, finalmente se reconstruye la señal empleando la formula de Whittaker-Shannon y se observan las diferencias con la señal original.

Teorema de muestreo de Nyquist-Shannon: sea $x_c(t)$ una señal de banda limitada que cumple con:

$$X_c(j\Omega) = 0 \quad \text{para } |\Omega| \geq \Omega_N$$

Entonces $x_c(t)$ estará dteremінada de forma única por sus muestras $x[n] = x_c(nT), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, si se cumple que:

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_N$$

Denominamos a $2\Omega_N$ como la frecuencia de Nyquist.

Interpolación de Whittaker-Shannon: Si tenemos una secuencia de muestras, $x[n]$, de una señal podemos reconstruir la señal en tiempo continuo mediante:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T}$$

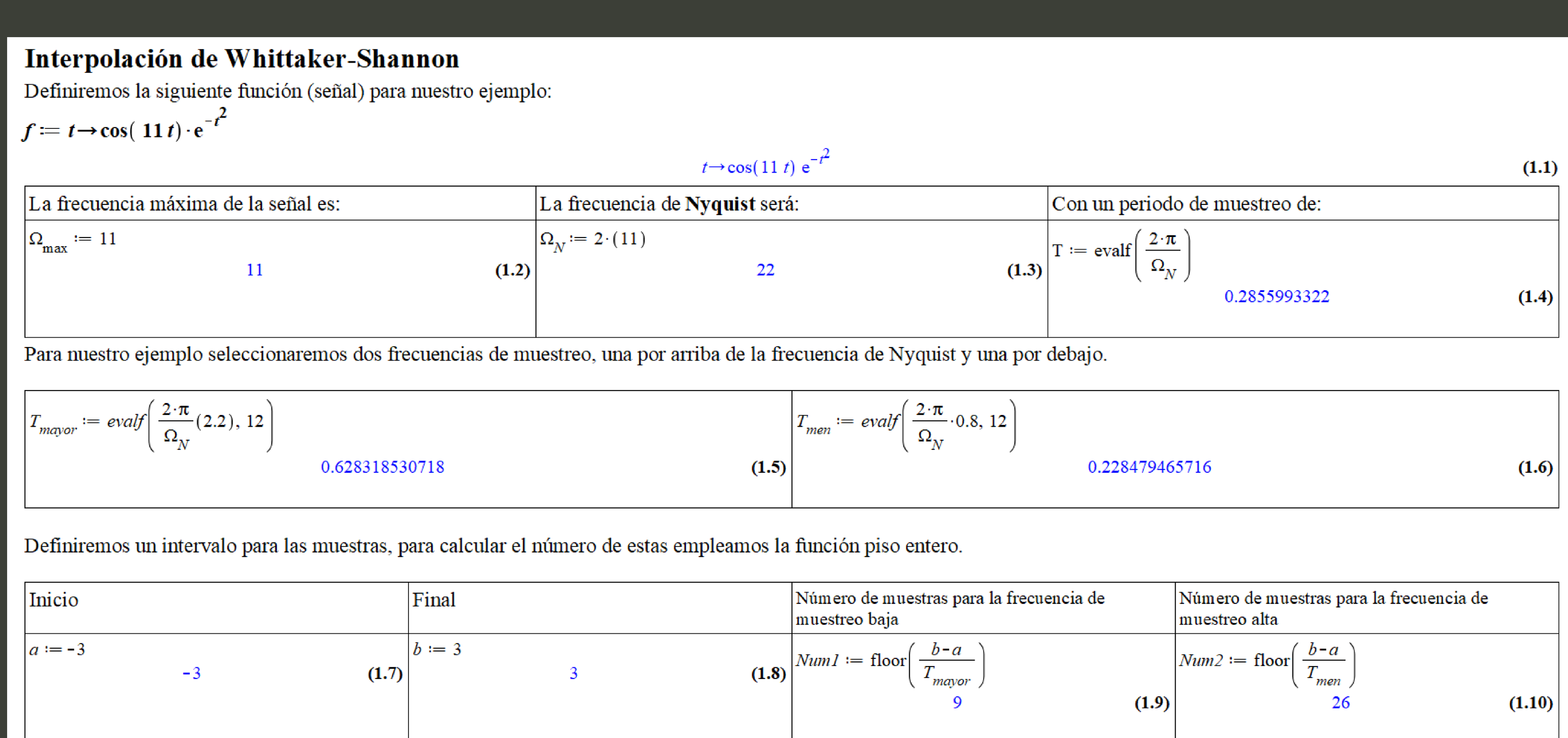
Que es una combinación lineal de las funciones de la base:

$$h_r(t-nT) = \frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T}$$

siendo las muestras $x[n]$ los coeficientes. h_r corresponde con la respuesta al impulso de un filtro de reconstrucción ideal (Oppenheim y Schafer, 2011).

Metodología

Para el desarrollo de la secuencia de actividades propuesta seleccionamos el software matemático Maple, en la Figura 1. mostramos una captura de pantalla, podemos resaltar como características importantes el empleo de tablas para organizar el contenido, el almacenamiento de datos en variables que pueden escribirse con notación matemática, el uso de funciones pre-definidas como la función piso entero o bien el uso de funciones definidas por usuario.



Interpolación de Whittaker-Shannon

Definiremos la siguiente función (señal) para nuestro ejemplo:

$f := t \rightarrow \cos(11\,t)\cdot e^{-t^2}$

$t \rightarrow \cos(11\,t)\,e^{-t^2}$ (1.1)

La frecuencia máxima de la señal es:	La frecuencia de **Nyquist** será:	Con un periodo de muestreo de:
$\Omega_{max} := 11$ 11 (1.2)	$\Omega_N := 2\cdot(11)$ 22 (1.3)	$T := evalf\left(\frac{2\cdot\pi}{\Omega_N}\right)$ 0.2855993322 (1.4)

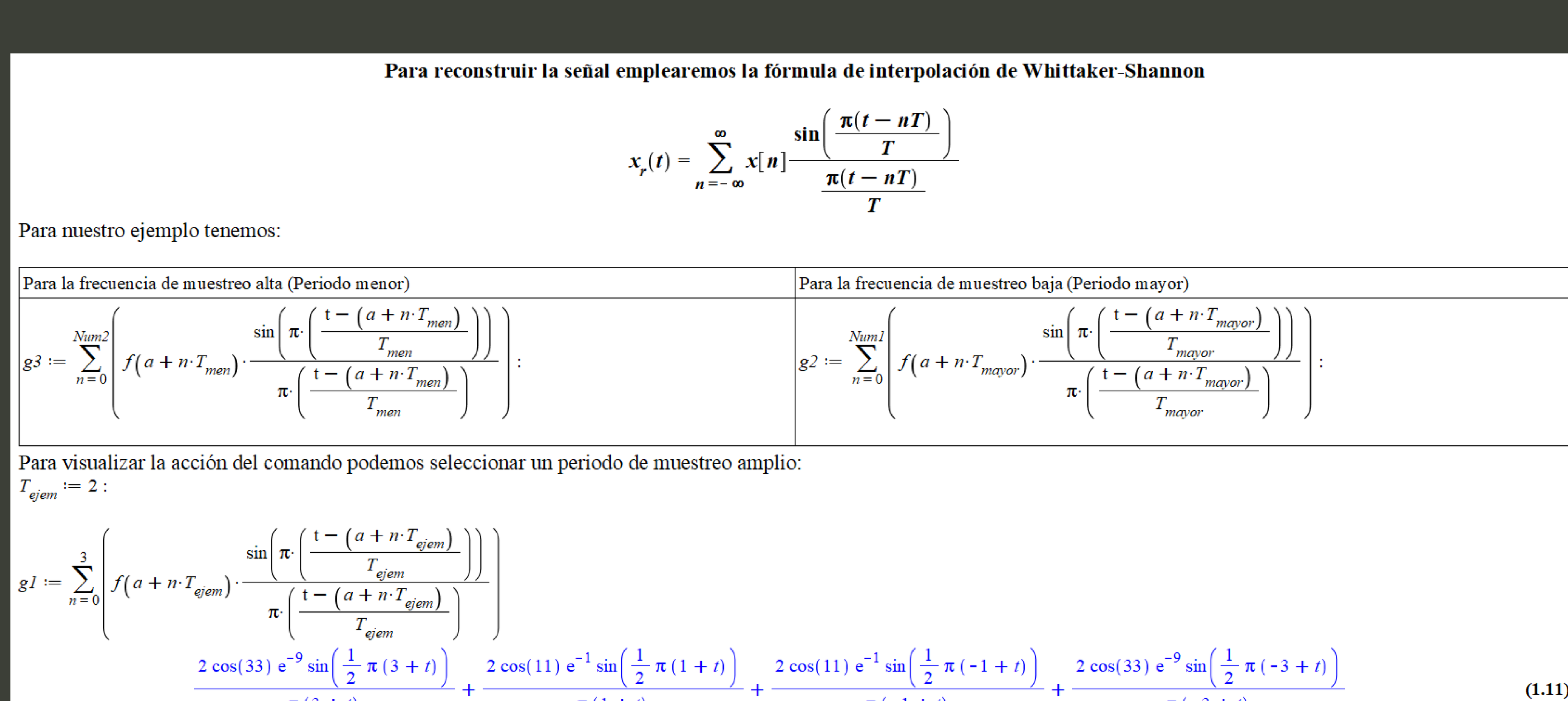
Para nuestro ejemplo seleccionaremos dos frecuencias de muestreo, una por arriba de la frecuencia de Nyquist y una por debajo.

$T_{mayor} := evalf\left(\frac{2\cdot\pi}{\Omega_N}(2.2), 12\right)$ 0.628318530718 (1.5)	$T_{men} := evalf\left(\frac{2\cdot\pi}{\Omega_N}\cdot 0.8, 12\right)$ 0.228479465716 (1.6)

Definiremos un intervalo para las muestras, para calcular el número de estas empleamos la función piso entero.

Inicio	Final	Número de muestras para la frecuencia de muestreo baja	Número de muestras para la frecuencia de muestreo alta
$a := -3$ -3 (1.7)	$b := 3$ 3 (1.8)	$Num1 := floor\left(\frac{b-a}{T_{mayor}}\right)$ 9 (1.9)	$Num2 := floor\left(\frac{b-a}{T_{men}}\right)$ 26 (1.10)

Figura 1. Captura de pantalla del software Maple, se muestra la aplicacion de: tablas, variables, funciones definidas por el usuario y la combinación de texto con formato y escritura matemática.



Para reconstruir la señal emplearemos la fórmula de interpolación de Whittaker-Shannon

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin\left(\frac{\pi(t-nT)}{T}\right)}{\frac{\pi(t-nT)}{T}}$$

Para nuestro ejemplo tenemos:

Para la frecuencia de muestreo alta (Periodo menor)	Para la frecuencia de muestreo baja (Periodo mayor)
$g3 := \sum_{n=0}^{Num2}\left(f(a+n\cdot T_{men})\cdot\frac{\sin\left(\pi\cdot\left(\frac{t-(a+n\cdot T_{men})}{T_{men}}\right)\right)}{\pi\cdot\left(\frac{t-(a+n\cdot T_{men})}{T_{men}}\right)}\right):$	$g2 := \sum_{n=0}^{Num1}\left(f(a+n\cdot T_{mayor})\cdot\frac{\sin\left(\pi\cdot\left(\frac{t-(a+n\cdot T_{mayor})}{T_{mayor}}\right)\right)}{\pi\cdot\left(\frac{t-(a+n\cdot T_{mayor})}{T_{mayor}}\right)}\right):$

Para visualizar la acción del comando podemos seleccionar un periodo de muestreo amplio:

$T_{ejem} := 2:$

$$g1 := \sum_{n=0}^{3}\left(f(a+n\cdot T_{ejem})\cdot\frac{\sin\left(\pi\cdot\left(\frac{t-(a+n\cdot T_{ejem})}{T_{ejem}}\right)\right)}{\pi\cdot\left(\frac{t-(a+n\cdot T_{ejem})}{T_{ejem}}\right)}\right)$$

$$\frac{2\cos(33)\,e^{-9}\sin\left(\frac{1}{2}\pi(3+t)\right)}{\pi(3+t)} + \frac{2\cos(11)\,e^{-1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi(1+t)\right)}{\pi(1+t)} + \frac{2\cos(11)\,e^{-1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi(-1+t)\right)}{\pi(-1+t)} + \frac{2\cos(33)\,e^{-9}\sin\left(\frac{1}{2}\pi(-3+t)\right)}{\pi(-3+t)} \quad (1.11)$$

Figura 2. Construcción de combinación lineal de funciones para reconstruir la señal con base en las muestras.

Metodología

En la Figura 2 mostramos una captura de pantalla del software Maple, donde desarrollamos las operación que permiten reconstruir la señal empleando la sumatoria, cabe señalar que el programa permite almacenar expresiones matemáticas en este caso una suma de funciones en una variable para después emplearla en operaciones subsecuentes.

Resultados

En la Figura 3 de el incisos a-c) se muestran las gráficas tanto de los puntos para las muestras como la función definida por el usuario, para los tres periodos de muestreo desde el mas largo al mas corto. En los incisos d) al f) se muestra la reconstrucción, y en el inciso g) la función original para comparación.

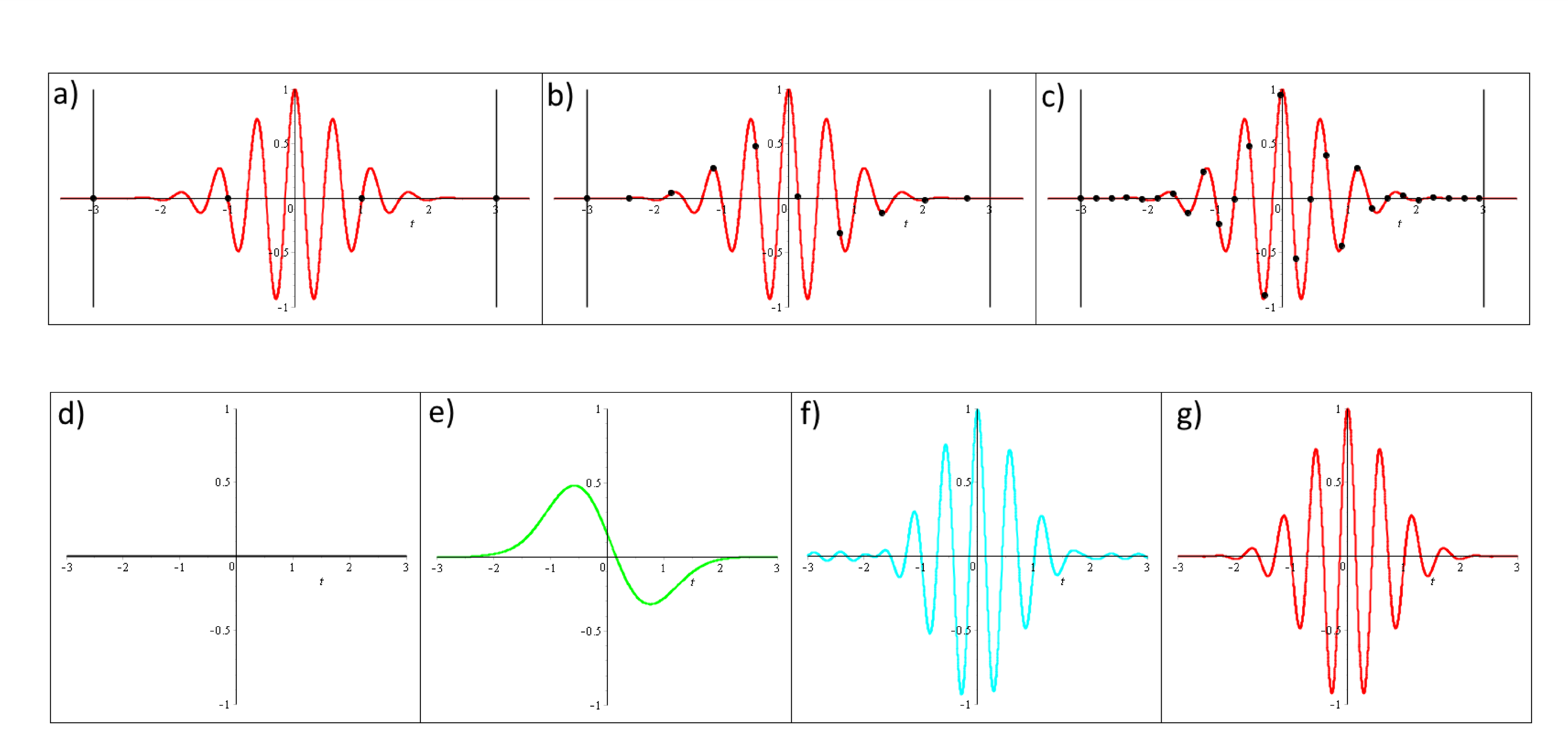


Figura 3. Reconstrucción ideal de una señal de banda limitada. a-c) Muestras de la señal variando el periodo de muestreo ($T_{ejem} = 2$, $T_{men} = 0.22$ y $T_{mayor} = 0.62$). d-f) Señales reconstruidas empleando (T_{ejem},T_{men} y T_{mayor}). g) Señal original definida por el usuario.

En la Figura 3 puede observarse el papel que juegan los coeficientes ($x[nT]$) de la combinación lineal de funciones para determinar la señal reconstruida. Se observa que cuando se emplean periodos de muestreo menores que el requerido por el teorema de Nyquist, la señal reconstruida proviene de una de las frecuencias solapadas de la señal original con respecto a la frecuencia de muestreo utilizada.

Discusión

Los resultados obtenidos durante el desarrollo de la secuencia de actividades muestran que el software matemático Maple representa un ambiente idóneo para llevar acabo las secuencia de actividades propuesta, si bien la función propuesta es sencilla, consideramos que las actividades de la secuencia podrían ampliarse para considerar funciones mas complicadas, por ejemplo para determinar sus frecuencias mediante el uso de la transformada de Fourier(incluida en Maple).

Queremos resaltar que el interés en estas operaciones proviene de su aplicación en el procesado de señales en tiempo continuo mediante sistemas en tiempo discreto (Oppenheim y Schafer, 2011).

Conclusiones

Se propone que actividades como ésta puedan ayudar a generar oportunidades para que los estudiantes exploren conceptos de asignaturas subsecuentes de manera visual e intuitiva antes de su exposición formal en los semestres subsecuentes, empleando los conocimientos desarrollados en la asignatura de Transformadas Especiales. El uso del software Maple evita la necesidad de cambiar de software para realizar operaciones matemáticas diversas y generará la notación matemática asociada.

Referencias bibliográficas

1. Oppenheim, A. V., Schafer, R. W. (2011). Tratamiento de señales en tiempo discreto 3ed. España: Pearson Educación.
2. Kourmychev, Evguenii. Principios del análisis de Fourier: Variaciones sobre un tema clásico, 2017.
3. Lopez, Robert. The Next Phase of Technology - Maplesoft, 2019. Enlace a Maplesoft